'93 한국자동제어학술회의논문집 (1993.10.20~22)

로봇 매니퓰레이터의 새로운 견실제어기 설계

°한명철*, Chen Ye-Hwa**

New Robust Control Designs of Robot Manipulators

°Han Myung Chul*, Ye-Hwa Chen**
* Institute of Advanced Machinery and Design, Seoul National University
** Mechanical Department of Georgia Institute of Technology

ABTRACT

A new robust control law is proposed for uncertain rigid robots and two composite robust control laws for flexible-joint manipulators which contain uncertainties. The uncertainty is nonlinear and (possibly fast) time-varying. Therfore, the uncertain factors such as imperfect modeling, friction, payload change, and external disturbances are all addressed. Based only on the possible bound of the uncertainty, a robust controller is constructed for the rigid counterpart of the flexible-joint robot. Some feedback control terms are then added to the robust control law to stabilize the elastic vibrations at the joints. To show that the proposed composite robust control laws are indeed applicable to flexible-joint robots, a singular perturbation approach and the stability study based on Lyapunov function are proposed.

1. 서론

로봇 시스템의 제어 문제에 있어, 지난 이십여 년간 중요한 제어 알고리즘들이 강성 모델(rigid model)에 대해 개발되어 왔다. 그러나 Sweet and Good[14]의 실험적 결과에 의해 경우에 따라 유연성(flexibility)이 고려되어야 함이 입증되었다. 이렇게 실험적 발견에 의해 제기된 유연 관절 로봇의 제어기 설계는 Spong[12], Ghorbel and Spong[5], Lozano and Brogliato[7], Nicosia and Tomei[8] 등에 의해 이론적으로 뒷받침되었다.

한편, 실제 로봇 시스템의 모델링에 불가피하게 포함되는 불확실성(uncertainty)을 고려한 견실제어기설계는 Chen[3], Chen and Pandey[3], Reithmeier and Leitmann[9], Shoureshi *et al.*[10], Singh[11]등에 의해 강성 모델에 제시되었다. 이 견실제어는 불확실성의 가능한 범위를 제어기설계 시 사용하거나, 주어진 제어기가 견딜 수 있는 불확실성 정도를 분석한다.

불확실성이 포함된 모델에 대한 또 다른 접근 방법은 적응제어기 설계이다. 유연 관절의 적응제어기는 Spong[13], Lozano and Brogliato[7], Nicosia and Tomei[8] 등에 의해 발전되었다.

본 논문은 첫째, 불확실 강성 로봇에 대한 새로운 종류의 견실제어기를 제안하였다. 둘째, 특이섭동 접근방법에 의해, 관절의 유연성을 고려한 복합견실제기를 제안하였으며, 셋째, 이 복합견실기의 한계를 극복할 수 있는 다른 종류의 제어기를 제안되었다.

2. 시스템 운동방정식

일반적으로 n 관절 로봇 매니퓰레이터의 운동방정식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)+f(q,\dot{q},t)=\tau(t) \quad (1)$$

여기서,

q : $n\times 1$ vector of joint positions

τ : $n\times 1$ vector of joint torques supplied by the actuator

$M(q)$: $n\times n$ inertia matrix

$C(q,\dot{q})\dot{q}$: $n\times 1$ vector of centrifugal and Coriolis forces

$g(q)$: $n\times 1$ vector of gravity force

$f(q,\dot{q},t)$: $n\times 1$ vector of uncertain torques

행렬 $M(q)$은 대칭형(symmetric)이며 positive definite이다. 그리고, $\dot{M}(q)-2C(q,\dot{q})$이 skew symmetric이 될 수 있도록 적당히 $C(q,\dot{q})$가 선택될 수 있다.[13] 불확실성 항 $f(q,\dot{q},t)$는 구조적, 비구조적 불확실성에 의해 발생되는 모든 토크를 포함한다. 예를 들면, 마찰력, payload 등에 의한 토크나 외란 등이 여기에 속할 수 있다.

3. 추종제어를 위한 견실제어기

위 로봇의 운동방정식에서 불확실성 항 $f(q,\dot{q},t)$뿐만 아니라 $M(q)$, $C(q,\dot{q})$, $g(q)$ 등에도 불확실성이 존재한다. 그 불확실성의 기준 값으로부터 각 항의 예측 가정한 값을 각각 $\hat{M}(q)$, $\hat{C}(q,\dot{q})$, $\hat{g}(q)$, $\hat{f}(q,\dot{q},t)$라 하면 추종제어를 위해 다음과 같은 견실제어기가 제안된다.

$$\tau = \hat{M}(q)(\ddot{q}_d - S\dot{e}) + \hat{C}(q,\dot{q})(\dot{q}_d - Se) + \hat{g}(q) + \hat{f}(q,\dot{q},t) + p(q,\dot{q},t) - K_a e - K_b \dot{e} \tag{2}$$

여기서,

q_d : desired trajectory

$e = q - q_d$ $\quad \dot{e} = \dot{q} - \dot{q}_d$

$S = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \cdots, s_n)$: positive constant matrix

$K_a = \mathrm{diag}(k_{a1}, k_{a2}, \cdots, k_{an})$: positive constant matrix

$K_b = (k_{b1}, k_{b2}, \cdots, k_{bn})$: positive constant matrix

$p(q,\dot{q},t)$: robust control term

견실제어 항 $p(q,\dot{q},t)$은 다음과 같은 절차로 정의된다. 먼저

$$\phi(q,\dot{q},t) \equiv (\hat{M}-M)(\ddot{q}_d - S\dot{e}) + (\hat{C}-C)(\dot{q}_d - Se) + \hat{g} - g + \hat{f} - f \tag{3}$$

의 경계함수를 찾는다.

$$\rho(q,\dot{q},t) \ge \|\phi(q,\dot{q},t)\| \tag{4}$$

이 경계함수를 찾기 위해 불확실성 인자값들이 속한 집합들의 경계치에 대한 정보가 필요하다. 그러나 그 인자들의 시간에 따른 구현방식과 견실제어기설계는 서로 독립적이다. 그러므로 적응제어에서는 고려되기 어려운 고 주파수 시변불확실성 인자도 본 연구의 대상시스템에 포함될 수 있다.

본 논문에서 사용되는 백터의 노옴(norm)은 유클리디안 노옴(Euclidean norm)이고, 행렬의 노옴은 유클리디안 유도 노옴(induced norm)이다. 즉 예를 들어, 행렬 M의 노옴 $\|M\|$은 $\sqrt{\lambda_{\min}(M^T M)}$이다. 여기서 $\lambda_{\min}(\cdot)$ (혹은 $\lambda_{\max}(\cdot)$)은 최소(혹은 최대) 고유치(eigenvalue)를 나타낸다.

그 다음, 견실제어항이 아래와 같이 정의된다.

$$p = [p_1\ p_2\ \cdots\ p_n]^T$$

$$p_i = \begin{cases} -\dfrac{\mu_i}{\|\mu_i\|}\rho, & \text{if } \|\mu_i\| \ge \varepsilon \\ -\rho \sin(\pi\mu_i / 2\varepsilon), & \text{if } \|\mu_i\| < \varepsilon \end{cases} \tag{5}$$

여기서, ε은 설계자에 의해 선택되는 상수이고,

$$\mu_i \equiv (\dot{e}_i + s_i e_i)\rho(q,\dot{q},t) \tag{6}$$

다음 정리는 제안된 제어기에 의한 로봇시스템 성능을 서술한다.

<u>정리 1</u> 제안된 제어기 식 (2)에 의해, 불확실성 로봇시스템 식 (1)은 광역적으로 실용적으로 안정(globally practically stable)하다. (실용적 안정성의 정의는 참고문헌 [1][4][6] 참조)

증명: 다음의 함수를 Lyapunov 함수 후보로 택한다.

$$V(\bar{e},t) = (\dot{e}+Se)^T M (\dot{e}+Se) + e^T (K_a + SK_b) e \tag{7}$$

여기서,

$$\bar{e} \equiv [e^T, \dot{e}^T]^T = [e_1 \cdots e_n\ \dot{e}_1 \cdots \dot{e}_n]^T$$

먼저 다음과 같은 부등식이 항상 성립하도록 각 경계함수의 양의 상수 ψ_1, ψ_2가 존재함을 보인다.

$$\psi_1 \|\bar{e}\|^2 \le V(\bar{e},t) \le \psi_2 \|\bar{e}\|^2 \tag{8}$$

식 (7)으로부터 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\bar{e},t) &\ge \lambda_{\min}(M)\|\dot{e}+Se\|^2 + e^T(K_a+SK_b)e \\ &= \lambda_{\min}(M)\sum_{i=1}^{n}(\dot{e}_i + s_i e_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(k_{ai}+s_i k_{bi})e_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\lambda_{\min}(M)\dot{e}_i^2 + 2\lambda_{\min}(M)s_i \dot{e}_i e_i \\ &\quad + \lambda_{\min}(M)s_i^2 e_i^2 (k_{ai}+s_i k_{bi})e_i^2] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[e_i\ \ \dot{e}_i]\begin{bmatrix} \lambda_{\min}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\min}(M)s_i \\ \lambda_{\min}(M)s_i & \lambda_{\min}(M) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_i \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

다음과 같이 ψ_{1i}를 정의하므로서

$$\psi_{1i} \equiv \lambda_{\min}\left\{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\min}(M)s_i \\ \lambda_{\min}(M)s_i & \lambda_{\min}(M) \end{bmatrix}\right\} \tag{10}$$

다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\bar{e},t) &\ge \sum_{i=1}^{n}\psi_{1i}(e_i^2 + \dot{e}_i^2) \\ &\ge \psi_1 \sum_{i=1}^{n}(e_i^2 + \dot{e}_i^2) \\ &= \psi_1 \|\bar{e}\|^2. \end{aligned} \tag{11}$$

여기서 $\psi_1 \equiv \min(\psi_{1i})$.

한편, 위와 비슷한 분석을 통해 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} V(\bar{e},t) &\le \lambda_{\max}(M)\|\dot{e}+Se\|^2 + e^T(K_a+SK_b)e \\ &= \sum_{i=1}^{n}[e_i\ \ \dot{e}_i]\begin{bmatrix} \lambda_{\max}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\max}(M)s_i \\ \lambda_{\max}(M)s_i & \lambda_{\max}(M) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_i \\ \dot{e}_i \end{bmatrix} \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\psi_{2i}(e_i^2 + \dot{e}_i^2) \\ &\le \psi_2 \|\bar{e}\|^2 \end{aligned} \tag{12}$$

여기서,

$$\psi_{2i} \equiv \lambda_{\max}\left\{\begin{bmatrix} \lambda_{\max}(M)s_i^2 + k_{ai} + s_i k_{bi} & \lambda_{\max}(M)s_i \\ \lambda_{\max}(M)s_i & \lambda_{\max}(M) \end{bmatrix}\right\} \tag{13}$$

$\psi_2 \equiv \max(\psi_{2i})$

결과식 (11)과 (12)로 부터 부등식 (8)이 성립함을 알 수 있다. 그리고, 관련된 행렬들이 positive definite이므로 상수 ψ_{1i}, ψ_{2i}들이 양수이다.

다음은 Lyapunov함수 후보인 $V(\bar{e},t)$의 시간에 대한 미분치가 0을 중심으로한 어느 볼(ball)의 외부에서는 항상 음임을 보여준다. 제어되는 시스템의 임의의 궤도를 따른 $V(\bar{e},t)$의 시간에 대한 미분치는 아래와 같다.

$$\dot{V}(\bar{e},t) = 2(\dot{e}+Se)^T M(\ddot{e}+S\dot{e}) + (\dot{e}+Se)^T \dot{M}(\dot{e}+Se) + 2e^T(K_a+SK_b)\dot{e} \tag{14}$$

식 (1)과 (2)로 부터, 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} M\ddot{e} &= -M\ddot{q}_d - C(\dot{q}_d - Se + Se + \dot{e}) - g - f + \hat{M}(\ddot{q}_d - S\dot{e}) \\ &\quad + \hat{C}(\dot{q}_d - Se) + \hat{g} + \hat{f} + p - K_a e - K_b \dot{e} \\ &= (\hat{M}-M)\ddot{q}_d - \hat{M}S\dot{e} + (\hat{C}-C)(\dot{q}_d - Se) - C(\dot{e}+Se) \\ &\quad + \hat{g} - g + \hat{f} - f + p - K_a e - K_b \dot{e} \end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)를 식 (14)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e},t) &= 2(\dot{e}+Se)^T[(\hat{M}-M)(\ddot{q}_d - S\dot{e}) + (\hat{C}-C)(\dot{q}_d - Se) \\ &\quad + \hat{g} - g + \hat{f} - f + p] + (\dot{e}+Se)^T(\dot{M}-2C)(\dot{e}-Se) \\ &\quad - 2(\dot{e}+Se)^T(K_a e + K_b \dot{e}) + 2e^T(K_a+SK_b)\dot{e} \\ &= 2(\dot{e}+Se)^T(\phi+p) - 2e^T SK_a e - 2\dot{e}^T K_b \dot{e} \end{aligned} \tag{16}$$

일반성을 잃지 않고, 다음을 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\|\mu_i\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, l, \\ &\|\mu_i\| \ge \varepsilon, \quad i = l+1, l+2, \cdots, n \end{aligned} \tag{17}$$

또한, 다음 부등식을 이용하여

$$\|\dot{e}+Se\| \le \|\dot{e}_1 + s_1 e_1\| + \|\dot{e}_2 + s_2 e_2\| + \cdots + \|\dot{e}_n + s_n e_n\| \tag{18}$$

식 (17), (18)을 식 (16)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{e},t) \le\ & 2\sum_{i=1}^{n}\|\dot{e}_i + s_i e_i\|\rho - \sum_{i=1}^{l}\frac{2}{\varepsilon}\|\dot{e}_i + s_i e_i\|^2\rho^2 \\ & - \sum_{i=l+1}^{n} 2\|\dot{e}_i + s_i e_i\|\rho - \sum_{i=1}^{n}(2 s_i k_{ai} e_i^2 + 2k_{bi}\dot{e}_i^2) \end{aligned}$$

$$\leq 2\sum_{i=1}^{L}(\|\dot{e}_i+s_ie_i\|\rho-\frac{1}{\varepsilon}\|\dot{e}_i+s_ie_i\|^2\rho^2) \tag{19}$$
$$-k_0\sum_{i=1}^{n}(e_i^2+\dot{e}_i^2)$$
$$= l\frac{\varepsilon}{2}-k_0\|\bar{e}\|^2$$

여기서,

$k_0 = \min(2s_ik_{ai}, 2k_{bi})$.

그러므로, $\|\bar{e}\|>\sqrt{l\varepsilon/2k_0}$일때, Lyapunov함수 후보 $V(\bar{e},t)$의 시간에 대한 미분치는 항상 음이다.

결과적으로, 식 (8)과 (19)를 종합하여 볼 때, 불확실성 로봇시스템의 광역적 실용성 안정성(global practical stability)이 보장된다.[1][4][6] 여기서 제안된 제어기 식 (2)는 다음과 같은 기존 견실제어기들의 단점들을 극복하였다. 첫째, 역행렬의 계산을 피할 수 있었고(참고문헌 [2][13]과 비교), 둘째, 제어기 설계 시 행렬 $M(q)$의 최대, 최소 고유치(eigenvalue)가 불필요하며(참고문헌 [13]과 비교), 추측값 $\hat{M}(q)$에 대한 제한을 제거했다(참고문헌 [2]와 비교).

4. 유연 관절로봇의 견실제어기

다음과 같이 단순화된 운동방정식으로 표현되는 유연 관절 로봇을 생각한다.

$$D(q_1)\ddot{q}_1+C(q_1,\dot{q}_1)\dot{q}_1+g(q_1)+f(q_1,\dot{q}_1,t)+K(q_1-q_2)=0 \tag{20}$$

$$I_a\ddot{q}_2-K(q_1-q_2)=\tau(t) \tag{21}$$

여기서, 벡터 q_1 과 q_2는 각각 링크 각도와 액츄에이터의 각도를 나타내고, 대각(diagonal) 행렬 K는 관절의 강성(stiffness)를 나타낸다. I_a는 액츄에이터의 관성행렬로 식 (1)과 (20)을 비교하면 $M(q)=D(q_1)+I_a$이다.

이와 같이 관절의 유연성이 고려된 불확실성 로봇 시스템에 대해, 다음의 복합 제어 알고리즘을 생각한다.

$$\tau(t)=\tau_r(t)+K_c(\dot{q}_1-\dot{q}_2) \tag{22}$$

여기서, $\tau_r(t)$은 3절에서 제안된 제어기이며, 제어 상수 K_c는 식 (33)의 행렬이 안정(Huwitz)되도록 설계된다.

다음은 안정성 분석을 위하여, 식 (21), (22), (23)의 폐회로 시스템 방정식을 적절한 특이섭동(singularly perturbed) 모델로 변환한다. 먼저, 상수 대각 행렬 K, K_c을 다음과 같이 나타낸다.

$$K=K_1/\delta^2, \quad K_c=K_2/\delta \tag{23}$$

여기서, δ는 작은 값의 파라미터이다. 그리고, $x_1=-K(q_1-q_2)$라 놓으면, 식 (20)과 (21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M(q_1)\ddot{q}_1+C(q_1,\dot{q}_1)\dot{q}_1+g(q_1)+f(q_1,\dot{q}_1,t)=x_1 \tag{24}$$

$$\delta^2I_a\ddot{x}_1+\delta K_2\dot{x}_1+K_1x_1=K_1(\tau_r-I_a\ddot{q}_1) \tag{25}$$

여기서

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \delta\dot{x}_1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

이면, 식 (25)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}k_2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ I_a^{-1}K_1 \end{bmatrix}(\tau_r-I_a\ddot{q}_1) \tag{27}$$

유연성을 무시할 수 있는 경우 즉 $\delta=0$일 때,

$$x=\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(\tau_r-I_a\ddot{q}_1) \tag{28}$$

이다. 강성(rigid) 로봇과 유연관절 로봇의 x 값의 차이를 다음과 같이 정의 하면,

$$y=x-\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(\tau_r-I_a\ddot{q}_1) \tag{29}$$

식 (27)은

$$\begin{aligned} \delta\dot{y} &= \delta\dot{x}-\delta\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\tau}_t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix}(y+\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}(\tau_r-I_a\ddot{q}_1)) \\ &\quad +\begin{bmatrix} 0 \\ I_a^{-1}K_1 \end{bmatrix}(\tau_r-I_a\ddot{q}_1)-\delta\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\tau}_t \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix}y-\delta\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\tau}_t \end{aligned} \tag{30}$$

으로 변환된다. 여기서, $\tau_t=\tau_r-I_a\ddot{q}_1$. 결국, 다음과 같은 특이섭동 모델을 얻었다.

$$D(q_1)\ddot{q}_1+C(q_1,\dot{q}_1)\dot{q}_1+g(q_1)+f(q_1,\dot{q}_1,t)=[0 \;\; I]y+\tau_r \tag{31}$$

$$\delta\dot{y}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix}y-\delta\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}\dot{\tau}_t \tag{32}$$

제어 상수 행렬 K_c(즉 K_2)는 다음의 상수 행렬이 안정(Hurwitz)하도록 그 값을 정한다.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -I_a^{-1}K_1 & -I_a^{-1}K_2 \end{bmatrix} \tag{33}$$

제어된 시스템 식 (31)과 (32)의 안정성을 조사하기 위하여 다음과 같은 분석을 한다. 아래와 같은 Lyapunov 함수 후보를 생각하자.

$$V_0(z,t)=(1-d)V(\bar{e},t)+dy^TPy, \quad 0<d<1 \tag{34}$$

여기서, $z=[\,\bar{e}^T\; y^T]^T$, 그리고 $P>0$는 Lyapunov 방정식의 해이다.

$$A^TP+PA+Q=0, \quad Q>0 \tag{35}$$

양수 d의 선택에 대해서는 아래 분석 중 설명될 것이다.

이 Lyapunov함수 후보의 시간에 대한 미분치를 구하면

$$\dot{V}_0(z,t)=(1-d)\dot{V}(\bar{e},t)+2dy^TP\dot{y} \tag{36}$$

식 (19)에 따라

$$\begin{aligned}\dot{V}_0(z,t)\leq\; &(1-d)\left(\frac{l\varepsilon}{2}-k_0\|\bar{e}\|^2+2\|\dot{e}+Se\|\|y\|\right) \\ &+dy^TP\left(\frac{2}{\delta}Ay-2\,[I\;\;0]^T\dot{\tau}_t\right)\end{aligned} \tag{37}$$

여기서 다음을 이용한다.

$$\begin{aligned}\|\dot{e}+Se\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\dot{e}_i+s_ie_i)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(2\dot{e}_i^2+2s_i^2e_i^2)} \\ &\leq \sqrt{\alpha_1^2\sum_{i=1}^{n}(\dot{e}_i^2+e_i^2)} \\ &= \alpha_1\|\bar{e}\|\end{aligned} \tag{38}$$

여기서 $\alpha_1^2=\max_{i\in N}\{2,2s_i^2\}$. 다음의 부등식

$$2y^TP[I \;\; 0]^T\dot{\tau}_t\leq\alpha_2\|y\|^2+\alpha_3\|y\| \tag{39}$$

이 성립한다면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{V}_0(z,t) \le -(1-d)k_0\|\bar{e}\|^2 - \left(\frac{d}{\delta}\lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2\right)\|y\|^2 + 2(1-d)\alpha_1\|\bar{e}\|\|y\| + d\alpha_3\|y\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2}$$
$$= -[\|\bar{e}\| \ \ \|y\|]R[\|\bar{e}\| \ \ \|y\|]^T + d\alpha_3\|y\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2} \quad (40)$$

여기서,

$$R = \begin{bmatrix} (1-d)k_0 & -(1-d)\alpha_1 \\ -(1-d)\alpha_1 & \frac{d}{\delta}\lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

부등식

$$(1-d)k_0\left(\frac{d}{\delta}\lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2\right) - (1-d)^2\alpha_1^2 > 0 \quad (42)$$

을 만족하는 δ에 대하여, 즉,

$$\delta < \frac{dk_0\lambda_{\min}(Q)}{(1-d)\alpha_1^2 + dk_0\alpha_2} \equiv \delta_1 \quad (43)$$

행렬 R은 positive definite이다. 그러므로, 식 (43)을 만족하는 δ에 대하여, $\|z\|^2 = \|\bar{e}\|^2 + \|y\|^2 \ge \|y\|^2$이기 때문에 다음이 성립한다.

$$\dot{V}_0(z,t) \le -\lambda_{\min}(R)\|z\|^2 + d\alpha_3\|y\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2}$$
$$\le -\lambda_{\min}(R)\|z\|^2 + d\alpha_3\|z\| + \frac{(1-d)l\varepsilon}{2} \quad (44)$$

식 (44)로부터, (43)를 만족하는 δ와 아래 부등식을 만족하는 z에 대해 $\dot{V}_0(z,t)$는 항상 음임을 알 수 있다.

$$\|z\| > \frac{d\alpha_3 + \sqrt{d^2\alpha_3^2 + 2(1-d)l\varepsilon\lambda_{\min}(R)}}{2\lambda_{\min}(R)} \equiv l_1 \quad (45)$$

여기서 식 (39)를 다시 생각해 본다. 그 가정이 성립한다면 안정성 문제를 광역적(global)으로 다룰 수 있으나, 일반적으로 상수 α_2와 α_3가 존재하기 위하여 지역적(local)으로 안정성 문제를 생각하는 것이 자연스럽다. 먼저 $\bar{e}=0$에 중심을 두고 반지름이 l_2인 닫힌(closed) 볼을 생각한다. 이 볼에서 $O(1/\varepsilon)$인 상수 α_2와 α_3가 존재함을 알 수 있다. 그러나 식 (39)가 만족할 지라도 $l_1 < l_2$일 때만 지역적 안정성이 의미를 갖기 때문에 다음에서 l_1의 값을 분석한다. 식 (41)을 기초로 다음을 얻는다.

$$\lambda_{\min}(R) = \frac{\eta_2 - \sqrt{\eta_2^2 - 4\eta_1}}{2} \quad (46)$$

여기서

$$\eta_1 = (1-d)k_0\left(\frac{d}{\delta}\lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2\right) - (1-d)^2\alpha_1^2$$
$$\eta_2 = (1-d)k_0 + \frac{d}{\delta}\lambda_{\min}(Q) - d\alpha_2$$

다음의 극한값을 고려하여

$$\lim_{\delta\to 0}\lambda_{\min}(R) = (1-d)k_0 \quad (47)$$

다음의 l_1의 극한치를 얻을 수 있다.

$$\lim_{\delta\to 0} l_1 = \frac{d\alpha_3 + \sqrt{d^2\alpha_3^2 + 2(1-d)^2 k_0\varepsilon}}{2(1-d)k_0} \quad (48)$$

여기서 ε과 d는 임의의 작은 수로 취할 수 있기 때문에 $O(\varepsilon^2)$의 d를 선택한다면 l_2보다 작은 l_1의 값을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그 때의 δ값을 δ_2라 하고 편리를 위해 $\delta^* \equiv \min(\delta_1, \delta_2)$라 정의한다.

다음의 정리에서 이 절의 결과를 종합한다.

정리 2 견실복합제어기 식 (22)에 의한 특이섭동 시스템 식 (31), (32) (유연관절 로봇)은 모든 $\delta \in (0,\delta^*)$에 대하여 실용적으로 안정하다.

위의 분석 결과와 정리 2.에서 알 수 있듯이 복합견실제어기 식 (22)를 적용함에 있어 제한이 따른다. 즉, 어느 값 이상의 강인성(rigidity)를 가진 관절 로봇에 적용했을 경우에 한하여 안정성을 보장해 준다.

5. 유연 관절로봇의 견실제어기 II

앞 절의 특이섭동 접근방법에 의한 견실제어기 설계는 로봇 관절의 유연성 정도가 어느 값 이상일 때 안정성을 보장할 수 없는 단점을 갖고 있다. 이 절에서 제안되는 제어기는 이 점을 극복하기 위한 것으로, 액츄에이터의 위치와 속도는 제한된 값에 수렴하는 것으로 충분하다는 생각에서 출발한다. 즉 실질적으로 링크의 상태변수를 제어하는 일이 중요하며 액츄에이터의 위치와 속도가 특정 값으로 제어될 필요는 없다. 다음의 제어기를 생각해 보자.

$$\tau = \hat{D}(q_1)(\ddot{q}_{1d} - S\dot{e}) + \hat{C}(q_1,\dot{q}_1)(\dot{q}_{1d} - Se) + \hat{g}(q_1) + \hat{f}(q_1,\dot{q}_1,t) + \hat{I}_a(\ddot{q}_{2d} - S\dot{e}_2) + p(q,\dot{q},t) - K_3(\dot{e}_1 + Se_1) - K_4(\dot{e}_2 + Se_2) \quad (49)$$

여기서,

q_{1d} : a desired trajectory of q_1, which is four times differentiable.

q_{2d}: not real desired trajectory of q_2, which will be chosen later.

$e_1 = q_1 - q_{1d}$, $e_2 = q_2 - q_{2d}$

$S = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \cdots, s_n)$: positive constant matrix

$K_3 = \mathrm{diag}(k_{31}, k_{32}, \cdots, k_{3n})$: positive constant matrix

$K_4 = (k_{41}, k_{42}, \cdots, k_{4n})$: positive constant matrix

$p(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t)$: robust control term

견실제어 항 $p(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t)$은 다음과 같은 절차로 정의된다. 먼저

$$\phi(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t) \equiv (\hat{D}-D)(\ddot{q}_{1d} - S\dot{e}_1) + (\hat{C}-C)(\dot{q}_{1d} - Se_1) + \hat{g} - g + \hat{f} - f + (\hat{I}_a - I_a)(\ddot{q}_{2d} - S\dot{e}_2) \quad (50)$$

의 경계함수를 찾는다.

$$\rho(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t) \ge \|\phi(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t)\| \quad (51)$$

그 다음, 견실제어항이 아래와 같이 정의된다.

$$p = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n]^T$$

$$p_i = \begin{cases} -\frac{\mu_i}{\|\mu_i\|}\rho, & \text{if } \|\mu_i\| \ge \varepsilon \\ -\rho\sin(\pi\mu_i/2\varepsilon), & \text{if } \|\mu_i\| < \varepsilon \end{cases} \quad (52)$$

여기서, ε은 설계자에 의해 선택되는 상수이고,

$$\mu_i \equiv (\dot{e}_{2i} + s_i e_{2i})\rho(q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2,t) \quad (53)$$

이 견실제어기에 의해 제어되는 전체 시스템의 안정성 분석을 위해 다음의 Lyapunov 함수 후보를 생각한

다.

$$V= (\dot e_1+Se_1)^TD(\dot e_1+Se_1)+(\dot e_2+Se_2)^TI_a(\dot e_2+Se_2) + \int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)^Tdt K\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt \tag{54}$$

제어되는 시스템의 임의의 궤도를 따른 V의 시간에 대한 미분치는 아래와 같다.

$$\dot V= (\dot e_1+Se_1)^T\{\dot D(\dot e_1+Se_1)+2D(\ddot e_1+S\dot e_1)\} +2(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)^TK\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt \tag{55}$$

한편, 시스템 방정식 (20)으로 부터

$$D\ddot e_1=-C\dot q_1-g-f-K(q_1-q_2)-D\ddot q_{1d} \tag{56}$$

을 얻을 수 있고, $\dot D(q)-2C(q,\dot q)$이 skew symmetric이기 때문에 다음의 등식이 이용할 수 있다.

$$x^T\dot Dx=x^T2Cx \tag{57}$$

여기서, x는 임의의 벡터이다.

식 (57)을 이용하여 V의 시간에 대한 미분치 식 (55)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot V= & 2(\dot e_1+Se_1)^T\Big\{C(\dot e_1+Se_1)+D(\ddot e_1+S\dot e_1) +K\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt\Big\}\\ & +2(\dot e_2+Se_2)^T\Big\{I_a(\ddot e_2+S\dot e_2) -K\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt\Big\}\end{aligned} \tag{58}$$

식 (58)에서 첫 중괄호 안의 것을 식 (56)을 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned}w_1\equiv & C(\dot e_1+Se_1)+D(\ddot e_1+S\dot e_1) +K\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt\\ = & D(-\ddot q_{1d}+S\dot e_1)+C(-\dot q_{1d}+Se_1)-g-f +K\Big\{-q_{1d}-e_1(0)+e_2(0)+S\int_0^t(e_1-e_2)dt\Big\}+Kq_{2d}\end{aligned} \tag{59}$$

여기서 desired trajectory q_{2d}를 아래와 같이 선택하면

$$q_{2d}= K^{-1}\Big[-K_1(\dot e_1+Se_1)+D(\ddot q_{1d}-S\dot e_1)+C(\dot q_{1d}-Se_1)-g-f +K\Big\{q_{1d}+e_1(0)-e_2(0)-S\int_0^t(e_1-e_2)dt\Big\}\Big] \tag{60}$$

식 (59)는 다음의 값을 갖는다.

$$w_1=-K_1(\dot e_1+Se_1) \tag{61}$$

다음, 식 (58)의 두번 째 중괄호 안의 식을 정리한다.

$$w_2\equiv I_a(\ddot e_2+S\dot e_2)-K\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt \tag{62}$$

식 (21)로 부터 다음을 얻을 수 있다.

$$I_a\ddot e_2=\tau+K(q_1-q_2)-I_a\ddot q_{2d} \tag{63}$$

또한, 식 (56), (59), (61)로 부터

$$\begin{aligned}&K(q_1-q_2)-K\int_0^t(\dot e_1+Se_1-\dot e_2-Se_2)dt\\ &=D(-\ddot q_{1d}+S\dot e_1)+C(-\dot q_{1d}+Se_1)-g-f+K_1(\dot e_1+Se_1)\end{aligned} \tag{64}$$

을 얻을 수 있다. 이 식 (64)와 (63)를 식 (62)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$w_2= \tau+I_a(-\ddot q_{2d}+S\dot e_2)+D(-\ddot q_{1d}+S\dot e_1) +C(-\dot q_{1d}+Se_1)-g-f+K_1(\dot e_1+Se_1) \tag{65}$$

여기에 식 (49)로 제안된 제어기를 대입하여 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}w_2= & (\hat D-D)(\ddot q_{1d}-S\dot e_1)+(\hat C-C)(\dot q_{1d}-Se_1)\\ & +(\hat I_a-I_a)(\ddot q_{2d}-S\dot e_2)+(\hat g-g)+(\hat f-f)+p-K_2(\dot e_2+Se_2)\\ = & \phi+p-K_2(\dot e_2+Se_2)\end{aligned} \tag{66}$$

두 개의 결과 식 (61)과 (66)을 식 (58)에 대입하여 V의 시간에 대한 미분치를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot V= & -2(\dot e_1+Se_1)^TK_1(\dot e_1+Se_1)\\ & +2(\dot e_2+Se_2)^T\{\phi+p-K_2(\dot e_2+Se_2)\}\\ = & -2(\dot e_1+Se_1)^TK_1(\dot e_1+Se_1)-2(\dot e_2+Se_2)^TK_2(\dot e_2+Se_2)\\ & +2(\dot e_2+Se_2)^Tp+2(\dot e_2+Se_2)^T\phi\end{aligned} \tag{67}$$

식 (67)의 마지막 두 항의 최대치를 알아보자.

$$\begin{aligned}W_3\equiv & (\dot e_2+Se_2)^Tp+(\dot e_2+Se_2)^T\phi\\ \le & \sum_{i=1}^n(\dot e_{2i}+s_ie_{2i})p_i+\|\dot e_2+Se_2\|\rho\end{aligned} \tag{68}$$

다음의 부등식은 항상 성립함을 알 수 있다.

$$\|\dot e_2+Se_2\|\le\sum_{i=1}^n\|\dot e_{2i}+s_ie_{2i}\| \tag{69}$$

여기서 일반성을 잃지 않고 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\|\mu_i\|<\varepsilon,\quad i=1,2,\cdots,l\\ &\|\mu_i\|\ge\varepsilon,\quad i=l+1,l+2,\cdots,n\end{aligned} \tag{70}$$

견실제어항 식 (52)를 식 (68)에 대입하고, 식 (69), (70)을 이용하여 w_3의 최대치를 얻는다.

$$\begin{aligned}\|w_3\|\le & -\sum_{i=1}^l\frac{1}{\varepsilon}\|\dot e_{2i}+s_ie_{2i}\|^2\rho^2-\sum_{i=l+1}^n\|\dot e_{2i}+s_ie_{2i}\|\rho\\ & +\sum_{i=1}^n\|\dot e_{2i}+s_ie_{2i}\|\rho\\ = & \sum_{i=1}^l\Big\{-\frac{1}{\varepsilon}\|\dot e_{2i}+s_ie_{2i}\|^2\rho^2+\|\dot e_{2i}+s_ie_{2i}\|\rho\Big\}\\ \le & \frac{l\varepsilon}{4}\end{aligned} \tag{71}$$

이 결과를 식 (67)에 대입하면 결국 다음 식을 얻는다.

$$\dot V\le-l_0\|\eta\|^2+\frac{l\varepsilon}{2} \tag{72}$$

여기서, $l_0\equiv\min(2k_{3l},2k_{4l})$, $\eta\equiv[(\dot e_1+Se_1)^T\ (\dot e_2+Se_2)^T]^T$

결국 광역적 실용적 안정성 (global practical stability)가 보장됨을 알 수 있다. (참고문헌 [1][4][6] 참조) .

다음의 정리에서 앞의 결과를 종합한다.

정리 3 복합견실제어기 식 (49)에 의해 제어되는 유연관절로봇시스템 식 (20), (21)은 광역적으로 실용적 안정성이 보장된다.

6. 결론

세 종류의 견실제어기가 본 논문에서 제안되고 그 적용의 타당성이 안정성 분석을 통하여 증명되었다. 강성로봇 모델에 적용된 새로운 종류의 견실제어기는 기존 견실제어기들의 단점인 역행렬 계산, 불확실 행렬 $M(q)$의 최대, 최소 고유치 계산, 측정치 $\hat M(q)$에 대한 제한 등을 극복할 수 있었다. 유연관절 로봇에 제안된 두개의 복합견실제어기 중 특이섭동 접근방법에의한 제어기 설계는 관절 유연성에 제한을 가지나, 액츄에이터에 제한된 진동을 허용하는 두번 째 제어기는 그 유연성에 대한 제한을 극복할 수 있었다.

참고문헌

[1] Chen, Y.H., 1986, "On the deterministic performance of uncertain dynamical systems", *International Journal of Control*, Vol. 43, No. 5, pp. 1557-1579.

[2] Chen, Y.H., 1991, "Robust computed torque schemes of mechanical manipulators: non-adaptive versus adaptive", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 113, pp. 324-327.

[3] Chen, Y.H., and Pandey, S., 1990, "Uncertainty bounded-based hybrid control for robot manipulators", *IEEE Transactions on Robotic s and Automation*, Vol. 6, No. 3, pp. 303-311.

[4] Corless, M.J., and Leitmann, G., 1981, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol AC-26, No. 5, pp. 1139-1144.

[5] Ghorbel, F., and Spong, M.W., 1992, "Adaptive integral manifold control of flexible joint robot manipulators", *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Nice, PP. 707-714.

[6] Leitmann, G., 1981, "On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 103, pp. 95-102.

[7] Lozano, R., and Brogliato, B., 1992, "Adaptive control of robot manipulators with flexible joints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No. 2, pp. 174-181.

[8] Nicosia, S., and Tomei, P., 1991, "A new approach to control elastic joint robots with application to adaptive control", *Proceeding of the 30th IEEE Conference of Decision and Control"*, Brighton, England, pp. 343-347.

[9] Reithmeier, E., and Leitmann, G., 1991, "Tracking and force control for a class of robotic manipulators", *Dynamics and Control*, Vol. 1, pp. 133-150.

[10] Shoureshi, R., Corless, M., and Roesler, M.D., 1987, "Control of industrial manipulators with bounded uncertainties", *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 109, pp. 53-58.

[11] Singh, S.N., 1985, "Adaptive model-following control for nonlinear robotic systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-30, No. 11, pp. 1099-1100.

[12] Spong, M.W., 1990, "The control of flexible joint robots: a survey", in *New Tends and Applications of Distributed Parameter Control Systems*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, G. Chen, E.B. Lee, W. Littman, and L. Markus, Eds., Marcel Dekker Publishers, New York, pp. 355-382.

[13] Spong, M.W., and Vidyasagar, M., 1989, *Robot Dynamics and Control*, John Wiley & Sons, New York.

[14] Sweet, L.M., and Good, M.C., 1984, "Redefinition of the robot motion control problem: effects of plant dynamics, drive system constraints, and user requirements", *Proceeding of the 23rd IEEE Conference of Decision and Control"*, Las Vegas, pp. 724-730.