

# 4절기구를 가진 유연한 조작기의 기호적 모델링

° 이재원, 주해호  
영남대학교 기계공학과

## Symbolic Modeling of a 4-Bar Link Flexible Manipulator

° Jae Won Lee, Hae Ho Joo  
Department of Mechanical Engineering, YeungNam University

### Abstract

Nonlinear equation of motion of the flexible manipulator are derived by the Lagrangian method in symbolic form to better understand the structure of the dynamic model. The resulting equations of motion have a structure which is useful to reduce the number of terms calculated, to check correctness, or to extend the model to high order. A manipulator with a flexible 4 bar link mechanism is a constrained system whose equations are sensitive to numerical integration error. This constrained system is solved using the null space matrix of the constraint Jacobian matrix. Singular value decomposition is a stable algorithm to find the null space matrix.

### 1. 서론

로봇 동역학의 주된관심 중의 하나는 계산 효율성이다. 로봇 동역학의 효율적인 형태를 위하여 Newton-Euler, Lagrange, Kane의 방법을 이용하여 동역학방정식을 유도하였다. 유연한 조작기의 경우에 Book은 변환행렬에 의한 반복적 Lagrange법을 이용하여 동역학방정식을 구하였다<sup>[1]</sup>. 하지만 반복적형태(recursive form)의 동역학방정식은 유도된 방정식의 각 항에 대한 물리적 의미를 파악하기 힘들기 때문에 제어기 설계에 적합하지 않다. Cetinkunt는 기호프로그래밍을 이용하여 기호적 동역학방정식을 유도하였지만 동역학방정식의 구조를 이용하지 않았기 때문에 유도과정이 간략화되지 못했다<sup>[2]</sup>. 한편, Tourassis는 Christoffel 기호를 이용하여 질량행렬로부터 동역학방정식을 유도하였고<sup>[3]</sup>, Asada는 Jacobian 행렬을 이용하여 질량행렬을 유도하였다<sup>[4]</sup>.

일반적인 직렬형태의 다자유도 유연로봇에서 두번째링크를 구동하기 위한 모터가 첫번째 링크 끝에 부착되어있기 때문에 모터의 반력과 중량으로 인하여 첫번째 링크를 크게 가진시킴으로 첫번째 링크의 안전성에 문제가 발생한다. 이에 대한 해결책은 평행기구를 이용하는 것이다. 그러나, 견실한 로봇의 경우와 달리 유연한 로봇의 동역학 해석은 평행기구의 변형에 의해 미분방정식과 비선형 구속 대수방정식을 동시에 풀어야한다. 이 방정식은 수치적오차에 민감하므로 안

정된 적분알고리즘을 필요로한다. 이를 위하여 LU', SVD, QR 알고리즘등이 개발되었다<sup>[5,6,7]</sup>.

본 논문에서는 Fig. 1과 같은 유연한 4절 평행기구를 가진 유연한 로봇의 동역학을 유도하기 위한 효율적이며 안정된 방법을 제시하고자 한다.

### 2. Jacobian을 이용한 운동방정식의 유도

유연한 링크의 전체 운동에너지는 식(1)과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^b \int_0^{l_p} \dot{r}_p^T \dot{r}_p \rho_p A_p dx_p \quad (1)$$

여기서 b는 링크의 수이며,  $r_p$ 는 링크 p의 임의점에서의 속도 벡터이며,  $\rho_p A_p l_p$ 는 링크 p의 밀도, 면적, 및 길이이다. 속도벡터는 Jacobian행렬과 일반적인 속도벡터  $\dot{q}_p$ 를 이용하여 식(2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{r}_p = J_p \dot{q}_p \quad (2)$$

식(2)를 식(1)에 대입하면 식(3)과 같다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^b \int_0^{l_p} (J_p \dot{q}_p)^T (J_p \dot{q}_p) \rho_p A_p dx_p \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^b \dot{q}_p^T \left( \int_0^{l_p} J_p^T J_p \rho_p A_p dx_p \right) \dot{q}_p \end{aligned} \quad (3)$$

식(3)을 스칼라형태로 나타내면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \sum_{p=1}^b D_{ijp} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (4)$$

여기서 n은 일반좌표의 갯수이며,  $D_{ijp}$ 은 링크 p의 질량행렬의 ij성분을 나타낸다.  $M_{ij}$ 가 다음과 같이 정의되면,

$$M_{ij} = \sum_{p=1}^b D_{ijp} \quad (5)$$

여기서

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ijp} = \int_0^{l_p} J_p^T J_p \rho_p A_p dx_p$$

식(4)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (6)$$

중력에 의한 위치에너지는 식(7)과 같다.

$$U_g = \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} g^T \gamma_{\rho\rho} A_{\rho} dx_{\rho} \quad (7)$$

여기서  $g$ 는  $3 \times 1$  중력가속도 벡터이다. 탄성변형에 의한 위치에너지는 식(8)과 같다.

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} E_{\rho} I_{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_{\rho}}{\partial x_{\rho}^2} \right)^2 dx_{\rho} \quad (8)$$

여기서  $E_{\rho}$ 는 Young의 탄성계수이며,  $I_{\rho}$ 는 링크  $p$ 의 질량 면적 모멘트이다.  $u_{\rho}$ 는 링크  $p$ 의 탄성처짐이며 이는  $m$ 개의 모드함수와 모드좌표로 나타낼 수 있다.

$$u_{\rho}(x, t) = \sum_{k=1}^m \psi_{\rho k}(x) \xi_{\rho k}(t) \quad (9)$$

따라서 식(8)은 식(10)과 같이 모드좌표로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^b \sum_{k=1}^m \int_0^{l_\rho} E_{\rho} I_{\rho} \left( \frac{\partial^2 \psi_{\rho k}}{\partial x_{\rho}^2} \right) (\xi_{\rho k})^2 dx_{\rho} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\rho=1}^b \sum_{k=1}^m K_{\rho k} \xi_{\rho k}^2 \end{aligned} \quad (10)$$

여기서

$$K_{\rho k} = \int_0^{l_\rho} E_{\rho} I_{\rho} \left( \frac{\partial^2 \psi_{\rho k}}{\partial x_{\rho}^2} \right)^2 dx_{\rho} \quad (11)$$

만약 일반좌표를 식(12)와 같이 정하면,

$$\{q_j\} = \{\theta_p, \xi_{\rho k}\}^T, \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

여기서  $n = b + m$ 은 일반좌표의 갯수이며,  $\theta_p$ 는 링크  $p$ 의 강체운동 좌표이며,  $\xi_{\rho k}$ 는 링크  $p$ 의  $k$ 번째 모드좌표다. 따라서 변형에너지식(10)은 일반좌표계로 표현될 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} q_i^2 \quad (13)$$

Lagrange방정식(14)에 운동에너지와 위치에너지를 대입하면

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial (U_g + U_e)}{\partial q_i} = \tau_i \quad (14)$$

Lagrange방정식의 각 항들은 다음과 같이 구할 수 있다.

첫번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{dM_{ij}}{dt} \dot{q}_j \end{aligned} \quad (15)$$

여기서,

$$\frac{dM_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

따라서,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (16)$$

두번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k \end{aligned} \quad (17)$$

세번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_g}{\partial q_i} &= \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} g^T \frac{\partial r_{\rho}}{\partial q_i} \rho_{\rho} A_{\rho} dx_{\rho} \\ &= \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} g^T J_{\rho}^{(i)} \rho_{\rho} A_{\rho} dx_{\rho} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서  $J_{\rho}(i)$ 는 Jacobian 행렬  $J_{\rho}$ 의  $i$ 번째 열이다. 중력이 한 쪽방향으로만 작용하기 때문에 식(18)은 스칼라로 표시될 수 있다.

$$\frac{\partial U_g}{\partial q_i} = G_i g \quad (19)$$

$$G_i = \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} J_{\rho}[r, i] \rho_{\rho} A_{\rho} dx_{\rho} \quad (20)$$

여기서  $J_{\rho}[r, i]$ 는  $J_{\rho}$ 의  $r$ 번째 행과  $i$ 번째 열이다.

네번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial U_e}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n K_{jk} q_j^2 \right) = \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j \quad (21)$$

그러므로, Lagrange운동방정식은 다음과 같이 일반좌표계로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}(i) \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i g = \tau_i \end{aligned} \quad (22)$$

또는

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}(i) \dot{q}_j \dot{q}_k + G_i g = \tau_i \quad (23)$$

여기서  $q_j$ 는 일반좌표벡터의 항이고,  $M_{ij}$ 는 일반질량행렬의 항이며,  $K_{ij}$ 는 탄성강성행렬의 항이며,  $C_{jk}(i)$ 는 Coriolis력과 원심력의 합성인 속도연성행렬의 항이며,  $G_i$ 는 중력과 관련된 항이며,  $g$ 는 중력가속도 상수이며,  $\tau_i$ 는 일반힘벡터의 항이다. 식(23)에서 질량행렬과 중력힘벡터는 Jacobian행렬을 이용하여 구할 수 있다.

$$M_{ij} = \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} J_{\rho}^T J_{\rho} \rho_{\rho} A_{\rho} dx_{\rho} \quad (24)$$

$$G_i = \sum_{\rho=1}^b \int_0^{l_\rho} J_{\rho}[r, i] \rho_{\rho} A_{\rho} dx_{\rho} \quad (25)$$

강성행렬은 모드함수로부터 구할 수 있다.

$$K_{ij} = \int_0^{l_i} E_i I_i \left( \frac{\partial^2 \psi_{ij}}{\partial x_j^2} \right)^2 dx_i \quad (26)$$

속도연성행렬은 질량행렬로부터 구할 수 있다.

$$C_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (27)$$

이 관계식을 Christoffel기호라 부른다.  $C_{jk}(i)$ 는 링크  $j$ 와 링크  $k$ 의 연성속도에 의해 링크  $i$ 에 미치는 효과를 말한다.

$j = k$ 인 대각선요소는 원심력의 계수이고,  $j \neq k$ 인 비대각선요소는 Coriolis력의 계수이다. 식(23)에서 상태들은 강제상태벡터  $\theta$ 와 탄성상태벡터  $\delta$ 로 나뉘어질 수 있다. 따라서  $M_{ij}$ 는  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 로 나눌 수 있고,  $C_{jk}(i)$ 는  $P_{jk}(i)$ ,  $Q_{jk}(i)$ ,  $R_{jk}(i)$ ,  $P_{jk}(i)$ ,  $Q_{jk}(i)$ ,  $R_{jk}(i)$ 로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_s} A_{ij} \theta_j + \sum_{j=1}^{N_s} B_{ij} \delta_j + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} P_{jk}(i) \theta_j \delta_k \\ + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} Q_{jk}(i) \theta_j \delta_k + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} R_{jk}(i) \delta_j \delta_k \\ + G_i g = \tau_i \quad (i=1, N_r) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N_s} B_{ij} \theta_j + \sum_{j=1}^{N_s} D_{ij} \delta_j + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} P_{jk}(i) \theta_j \delta_k \\ + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} Q_{jk}(i) \theta_j \delta_k + \sum_{j=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_s} R_{jk}(i) \delta_j \delta_k \\ + \sum_{j=1}^2 K_{ij} \delta_j = 0 \quad (i=N_s+1, N) \end{aligned} \quad (29)$$

여기서  $N_s$ 은 강제상태벡터의 수이고,  $N$ 은 전체상태벡터의 수이며,  $N_s$ 은  $N_r + 1$ 이다. 그리고 속도연성행렬은 질량행렬과 다음과 같은 관련식을 이용하여 구할 수 있다.

$$P_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial A_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

$$P_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (30)$$

$$Q_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

$$Q_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (31)$$

$$R_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial B_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

$$R_{jk}(i) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial D_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_j} - \frac{\partial D_{jk}}{\partial q_i} \right) \quad (32)$$

질량 부행렬  $D_{ij}$ 는 탄성상태벡터의 합수가 아니므로  $Q_{jk}(i)$ 와  $R_{jk}(i)$ 의  $D_{ij}$ 와 관련된 항들은 제거될 수 있다. 속도연성행렬의 독립된 요소들의 수는 다음과 같은 대칭성, 비연성, 반영성 등에 의해 줄어들 수 있다<sup>[3]</sup>.

$$C_{kj}(i) = C_{ij}(i) \quad (33)$$

$$C_{ji}(i) = 0 \quad \text{for } j \leq i \quad (34)$$

$$C_{kj}(i) = -C_{ji}(k) \quad \text{for } j \leq i, k \quad (35)$$

그러나 식(35)의 반영성은 유연로봇에서 항상 성립하지 않으므로 분석자의 주의가 요구된다. 기호적프로그램의 유통도는 Fig. 2과 같다.

### 3. Singular Value Decomposition을 이용한 구속시스템의 동적해석

4 절기구와 같은 폐회로를 갖는 시스템의 운동방정식은 일반적으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n K_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{jk}(i) q_j \dot{q}_k \\ + G_i g + \sum_{k=1}^s (\phi_q)_k^T \lambda_k = \tau_i \end{aligned} \quad (36)$$

여기서  $s$ 는 구속방정식의 수이며,  $\lambda_k$ 는 미지의 구속력벡터이며,  $(\phi_q)_k$ 는 구속방정식  $\phi(q) = 0$ 을 시간에 대하여 미분함으로써 얻을 수 있는 Jacobian행렬의 요소들이다.

$$\phi(q) = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial \phi(q)}{\partial t} = \frac{\partial \phi(q)}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} = \phi_q(q) \dot{q} = 0 \quad (38)$$

4절 평행기구를 가진 유연로봇의 운동방정식은 식(36)과 식(38)의 비선형 대수방정식으로 나타낼 수 있다. 식(36)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M \ddot{q} + Kq + F + \phi_q^T \lambda = \tau \quad (39)$$

여기서  $F$ 는 Coriolis력과 원심력 그리고 중력에 의한 힘을 포함하는 비선형 힘들의 벡터이다.

미분방정식과 대수방정식을 동시에 풀기 위하여는 미지의 구속력벡터  $\lambda$ 가 미분방정식으로부터 제외되어야 한다. 구속 Jacobian행렬은 Singular Value Decomposition에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다<sup>[6]</sup>.

$$\phi_q = U \Sigma V^T \quad (40)$$

또는

$$\phi_q = [U_1 \ U_2] [\Sigma_s \ 0] \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \quad (41)$$

여기서  $U_i$ 와  $V_i$ 는 4개의 기본 부공간의 직교기저(basis)이며,  $\Sigma_s$ 는 특이값의 대각선행렬이다.  $V_2$ 는 아래조건을 만족하는  $\phi_q$ 의 영공간(nullspace)이다.

$$\phi_q V_2 = 0 \quad (42)$$

$\phi_q$ 는  $\phi_q$ 의 유사 역행렬이라 부르며 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_q^+ = [V_1 \ V_2] \begin{bmatrix} \Sigma_s^{-1} & 0 \\ 0 & U_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \quad (43)$$

식(39)의 각 항들 앞에  $V_2^T$ 를 곱하고 식(42)의 직교성을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_2^T M \ddot{q} + V_2^T Kq + V_2^T F + (\phi_q V_2)^T = V_2^T \tau \\ V_2^T M \ddot{q} + V_2^T Kq + V_2^T F = V_2^T \tau \end{aligned} \quad (44)$$

미지의 구속력이 운동방정식으로부터 제거된다. 그러나,  $V_2^T M$ 은  $(n-s) \times n$ 인 직각행렬이기 때문에 역행렬을 구하기 위하여 방정식 추가로 필요하다. 따라서, 차원이  $(n-s) \times 1$ 인 새로운 변수  $z$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\dot{q} = V_2 z \quad (45)$$

기하학적으로 보면 이는 속도벡터를 구속표면의 접선평면에다 투상시키는 것이다. 더구나, 식(38)의 시간미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi_q \dot{q} &= \phi_q \dot{q} \\ &= -\dot{q}^T (\phi_q)_q \dot{q} \end{aligned} \quad (46)$$



$$C(6) = \begin{bmatrix} -d_{42} & -d_{52} & d_{62} & d_{72} & 0 & 0 \\ & -d_{52} & \frac{d_{62}}{2} & \frac{d_{72}}{2} & 0 & 0 \\ & & 2 & 2 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

여기서 보는 바와 같이 모든 속도연성행렬은 C(1)과 C(2)의 변수  $d_{ij}$  ( $i=1, 7, j=1, 2$ )로 표현할 수 있다.

연결링크와 작동링크의 운동방정식은 하부와 상부링크에서와 같은 방법으로 유도한다. 각 링크의 위치벡터는 Fig. 5.c와 5.d와 같다.

$$\vec{r}_3 = [l_{1r} \cos \theta_1 + x_3 \cos(\theta_1 + \theta_3)]i + [l_{1r} \sin \theta_1 + x_3 \sin(\theta_1 + \theta_3)]j \quad (67)$$

$$\vec{r}_4 = [l_{1r} \cos \theta_1 + l_{3r} \cos(\theta_1 + \theta_3) + x_4 \cos(\theta_1 + \theta_3 + \theta_4) - u_4 \sin(\theta_1 + \theta_3)]i + [l_{1r} \sin \theta_1 + l_{3r} \sin(\theta_1 + \theta_3) + x_4 \sin(\theta_1 + \theta_3 + \theta_4) + u_4 \cos(\theta_1 + \theta_3 + \theta_4)]j \quad (68)$$

여기서

$$u_4(x_4, t) = \psi_{41}(x_4)\xi_{41}(t) + \psi_{42}(x_4)\xi_{42}(t) \quad (69)$$

RALF에 SVD법을 적용하기 위하여서는 구속방정식이 먼저 구하여야 한다. 링크의 길이에 비해 탄성변형량이 작다고 가정하면 변형된 평행기구에는 Fig. 6와 같다. 가상전달된 조인트 C에서 구속방정식은 두 벡터로 나타낼 수 있다.

$$\overline{AB} + \overline{BB}^T + \overline{B}^T \overline{C}^T = \overline{AD} + \overline{DC}^T \quad (70)$$

Fig. 7과 같은 견실한 평행기구에서는 구속방정식에 변형항이 포함되지 않으므로 영공간행렬  $V_2$ 는 다음과 같다.

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.577 \\ 0 & 0.577 \\ 0 & -0.577 \end{bmatrix} \quad (71)$$

여기서

$$q_r = [ \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 ]^T \quad (72)$$

$V_2$ 는 링크의 각도 및 평행기구의 길이 비에 무관하다. 견실링크의 경우 독립변수는 모든 형태에 대하여 항상  $\theta_1$ 과  $1/\sqrt{3}(\theta_2 + \theta_3 - \theta_4)$ 이다. 하지만 유연링크의 경우  $V_2$ 는 탄성변형과 형태에 따라 다르다. 그러므로  $V_2$ 의 기저의 방향연속성을 보존하기 위하여 매 단계마다 구속 Jacobian행렬을 분해하여야 한다. 그러나 각 적분단계마다 SVD를 수행하는 것은 계산 시간이 엄청나게 증가한다. 그러므로 Mani는 속도노출을 이용하여 재분해를 위한 기준으로 삼았다<sup>[10]</sup>. 한편, 재분해를 피하기 위하여 Kim은 QR분해를 이용한 갱신알고리즘을 제안하였다<sup>[7]</sup>. 그러나 갱신알고리즘은 추가계산을 필요로 하는 역행렬을 포함하고 있다.

## 5. 결론

질량행렬과 중력벡터는 Jacobian행렬로부터 직접 구할 수 있다. Jacobian행렬은 SMP의 위치벡터로부터 쉽게 계산할 수 있다. 유도과정이 간단하기 때문에 잘못된 방정식이 유도될 위험성이 적을 뿐만 아니라 쉽게 다자유도계로 확장할 수 있다. 속도연성행렬은 Christoffel기호를 이용하여 질량행렬로부터 구하고 여러가지 구조적특성을 이용하여 간략화될 수 있다. 최종 속도연성행렬은 계산량이 적고, 쉽게 계산오류를

발견할 수 있을뿐만 아니라 모델을 고차항으로 전개할 수 있는 형태이다.

견실한 링크를 가진 평행기구는 폐회로내의 각도간에 간단한 관련이 있지만 유연한 링크를 가진 평행기구는 링크변형이 관련식에 섭동을 주기 때문에 폐회로내의 각도간의 관계가 비선형이다. 그러므로 미분과 대수 방정식을 동시에 풀어야 한다. 구속 Jacobian행렬의 SVD로부터 유도된 변환행렬  $V_2$ 는 구속운동방정식의 차원을 줄일 수 있고 구속조건에 대한 심각한 수치오차없이 운동방정식을 풀 수가 있다. 그러므로 SVD는 폐회로를 가진 시스템에 대한 안정되고 효과적인 방법이다.

## 참고 문헌

- [1] Book, W.J., "Recursive Lagrangian Dynamics of Flexible Manipulator Arms," The International Journal of Robotics Research, 3(3), Fall 1984, pp 87-101.
- [2] Cetinkunt, S., "Symbolic Modelling and Dynamic Analysis of Flexible Manipulators," Proc. IEEE International Conf. on Robotics and Automation, Rayleigh, NC, 1987, pp 2074 - 2080.
- [3] Tourassis, V.D., and Neuman, C.P., "Properties and Structure of Dynamic Robot Models for Control Engineering Applications," Mechanism and Machine Theory, 20(1), 1985, pp 27-40.
- [4] Asada, H., and Slotine, J.-J.E., "Robot Analysis and Control," John Wiley & Sons, Inc, 1986.
- [5] Wehage, R.A., and Haug, E.J., "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems," ASME Journal of Mechanical Design, 104(1), 1982, pp 247-255.
- [6] Singh, R.P., and Linkins, P.W., "Singular Value Decomposition for Constrained Dynamic Systems," ASME Journal of Applied Mechanics, 52(4), Dec. 1985, pp 943-948.
- [7] Kim, S.S., Vanderploeg, M.J., "QR Decomposition for State Space Representation of Constrained Mechanical Dynamic Systems," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 108, Jun 1986, pp 183-188
- [8] Lee, J. W., "Dynamic Analysis and Control of Lightweight Manipulators with Flexible Parallel Link Mechanisms," PhD thesis, School of Mechanical Engineering, Georgia Institute of Technology, Sep. 1990.
- [9] SMP Reference Manual, Inference Corporation, 1983.
- [10] Mani, N.K., Haug, E.J., and Atkinson, K.E., "Application of Singular Value Decomposition for Analysis of Mechanical System Dynamics," ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 107, Mar. 1985, pp. 82-87.

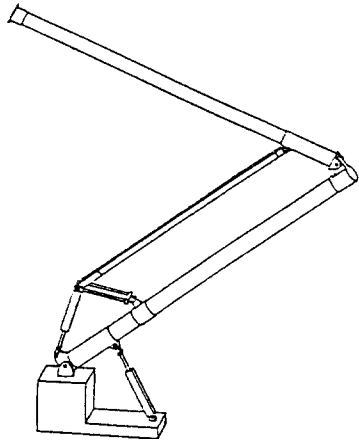


Fig. 1 : RALF (Robotic Arm, Large and Flexible)

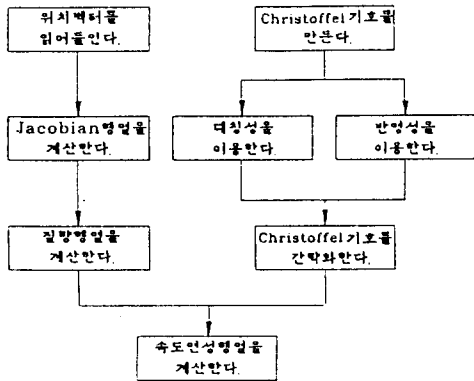


Fig 2 : Flow chart of symbolic program

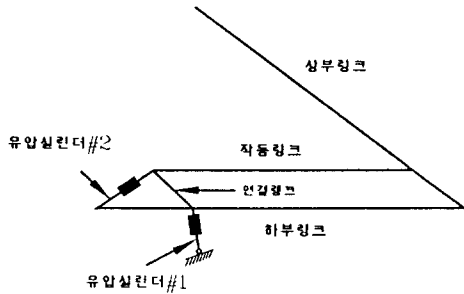


Fig 3 : Structural data of RALF

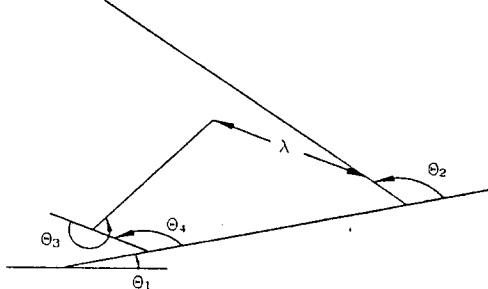


Fig 4 : Open tree structure of RALF

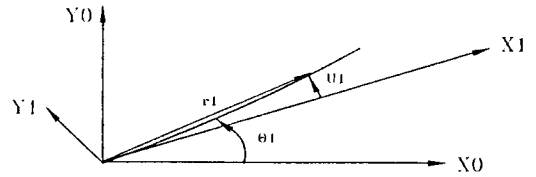


Fig 5.a : Position vector of the lower link

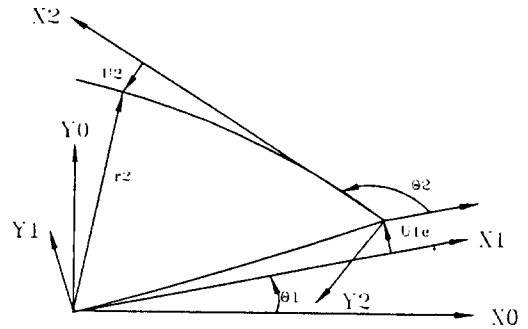


Fig 5.b : Position vector of the upper link

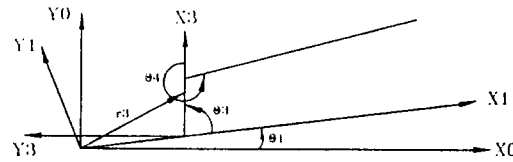


Fig 5.c : Position vector of the connecting link

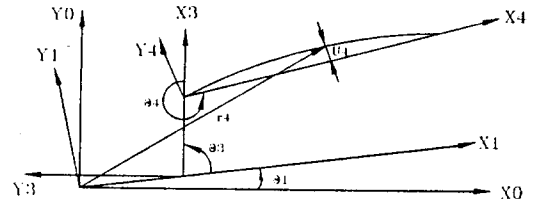


Fig 5.d : Position vector of the actuating link

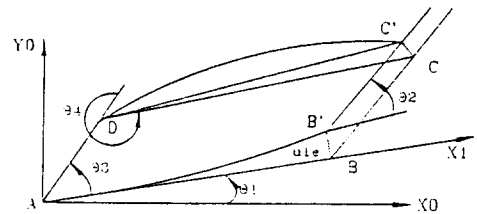


Fig 6 : Flexible parallel link mechanism

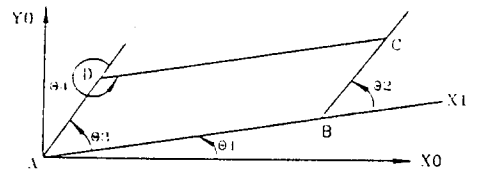


Fig 7 : Rigid parallel link mechanism