

## 수중운동체의 $H_\infty$ 및 시변슬라이딩모드 제어

°박철재, 이만형, 홍금식  
부산대학교 공과대학 제어기계공학과

## $H_\infty$ and Time-Varying Sliding Mode Control of Underwater Vehicle

°C.J. Park, M.H. Lee, K.S. Hong  
Department of Control and Mechanical Engineering,  
Pusan National University

### ABSTRACT

When modeling an underwater vehicle uncertainty arises in the presence of unsteady flow. It is difficult to include the uncertainty in the model and is therefore desirable to investigate robust controller design methods for the underwater vehicle.

In the paper two robust control methods are applied for the underwater system. One is standard  $H_\infty$  control, and the other is time-varying sliding mode control with modified saturation function. Suboptimal design parameters for  $H_\infty$  control, and design parameters for time-varying switching surfaces are provided. Simulations and comparison are carried out.

### 1. 서론

수중운동체가 수중에서 고속으로 기동할때 유체의 비정상 유동으로 인해 수중운동체의 모델링에 불확실성(uncertainty)이 발생하게 된다. 이러한 불확실성을 포함한 시스템에 대해서도 안정성과 성능을 보장할 수 있는 강인한 제어기(robust controller)를 설계하는 것은 중요하다.

본 논문에서는 모델링의 불확실성에 대한 안정도 및 강인성 문제를 해결할 수 있는 상태공간 설계기법으로의  $H_\infty$  제어기와, 또한 제어대상 시스템의 파라미터 변동 및 외란에 대하여 정확한 정보를 알 수 없더라도 강인한 제어를 보장하는 슬라이딩모드 제어를 수중운동체의 강인한 제어목적에 적용하고자 한다. 그리고 슬라이딩모드 제어에서는 기존의 슬라이딩모드 제어에서 나타나는 과도한 제어입력과 채터링 문제, 그리고 상태벡터의 과도한 오버슈트 문제를 해결할 수 있는 시변슬라이딩모드 제어기 설계방법을 사용하고자 한다.

### 2. 시스템 모델링

일반적으로 수중운동체는 6자유도 운동방정식<sup>[1-2]</sup>으로 나타나며, 롤, 피치, 요오 운동이 서로 커플링 되어 나타나는 비선형의 형태이나, 본 논문에서는 이러한 운동을 횡방향의 운동과 종방향의 운동으로 분리하여 나타낼 수 있다는 가정하에<sup>[3]</sup> 이를 각각의 방향에서 원점에 대해 선형화 한 다음의 운동방정식을 이용한다.

#### 1) 횡방향의 운동방정식

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_H x + B_H \delta_r \\ y &= C_H x \end{aligned} \quad (2.1)$$

여기서,

$$A_H = \begin{bmatrix} -0.66 & 0.05 & 0 & 0 & -0.27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.43 & -15.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.19 & -0.02 & 0 & 0 & -1.62 \end{bmatrix}$$

$$B_H = \begin{bmatrix} 0.047 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.271 \end{bmatrix}, \quad C_H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\text{방향 속도} \\ \text{롤각} \\ \text{롤변화율} \\ \text{요오각} \\ \text{요오변화율} \end{bmatrix}$$

그리고  $\delta_r$ 은 횡방향 제어입력인 수평타각(rudder)을 나타낸다.

#### 2) 종방향의 운동방정식

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_V x + B_V \delta_e \\ y &= C_V x \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A_V = \begin{bmatrix} -0.11 & 0 & 0.096 & 0 \\ 0 & -0.68 & -0.002 & 0.26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.08 & -0.008 & -1.68 \end{bmatrix}$$

$$B_V = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.076 \\ 0 \\ -0.434 \end{bmatrix}, \quad C_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\text{방향 속도} \\ z\text{방향 속도} \\ \text{피치각} \\ \text{피치변화율} \end{bmatrix}$$

그리고  $\delta_e$ 는 종방향 제어입력인 승강타각(elevator)을 나타낸다. 수중운동체의 운동방정식에 대한 보다 자세한 유도는 [8]에서 찾아볼 수 있다.

### 3. $H_\infty$ 제어기 설계

최적제어 이론에서 가장 많이 사용되는 성능 지수는  $H_2$  일반화된 LQG) 노름(norm)과  $H_\infty$  노름이다.  $H_2$  최적제어 이론은 1960년대에 LQG 최적제어 문제로써 주로 연구되었고  $H_\infty$  최적제어 문제는 최근 활발히 연구되고 있다. 전자의 경우는 외부 신호가 고정된 신호이거나 고정된 파워 스펙트럼을 가질 때 해석하는 기법이므로 만일 외란을 포함하는 외부입력 신호가 인가될 때, 혹은 모델의 불확실성이나 오차에 대한 보상을 하고자 할때는  $H_\infty$  노름을 사용하는 것이 더 적합하다.

따라서 본 장에서는 주파수영역에서 강인 제어 성능을 가지는  $H_\infty$  제어기를 상태공간 설계기법으로 설계 하고자 한다.

#### 3.1 $H_\infty$ 제어이론

$H_\infty$  제어에 대한 자세한 내용은 [4]을 참조 바라며 본 논문에서는 필요 부분만 간략히 서술한다.

$H_\infty$  제어기 설계문제는 그림1과 같이 표준 보상이 불려선도(Standard Compensator Block Diagram)로 표현 할 수 있다.

여기서,  $P$ 는  $[w \ u]^T$ 에서  $[z \ y]^T$ 로의 전달함수행렬(Transfer Function Matrix, TFM)이고,  $K$ 는 제어기의 TFM이다. 또,  $w$ 는 외부입력,  $u$ 는 제어입력,  $z$ 는 제어된 출력,  $y$ 는 측정된 출력을 나타낸다.

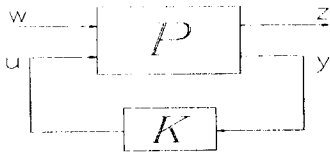


그림 1.  $H_\infty$  표준 보상기 블록선도

$H_\infty$  제어문제에서는 먼저 다음을 가정한다.

$$P = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}; \quad m_1 \geq p_2, \quad p_1 \geq m_2$$

여기서  $P_{11}(s) \in R(s)^{p_1 \times m_1}$ ,  $P_{12}(s) \in R(s)^{p_1 \times m_2}$ ,  $P_{21}(s) \in R(s)^{p_2 \times m_1}$ ,  $P_{22}(s) \in R(s)^{p_2 \times m_2}$  이고  $R(s)^{p \times q}$  는 실계수를 가진  $p \times q$  proper rational matrix의 집합이다.  $w$  에서  $z$  까지의 패루프 전달함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_{zw}(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (3.1)$$

최적  $H_\infty$  제어 문제는 위의 패루프 전달함수의 무한 노름(infinity norm)을 최소로 하는 안정한 제어기  $K_{opt}$  를 찾는 문제이다. 여기서  $K_{opt}$ 는 다음을 만족한다.

$$\inf \{ \|T_{zw}(P, K)\|_\infty : K \text{ stabilizes } P \} = \gamma_{opt} \\ = \|T_{zw}(P, K_{opt})\|_\infty \quad (3.2)$$

그러나 (3.2)를 만족시키는 최적  $H_\infty$  제어문제가 항상 적절한 것은 아니므로 무한 노름이 다음과 같은 경계를 가지는 준최적(suboptimal) 문제를 얻는다.

$$\|T_{zw}(P, K)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.3)$$

여기서  $\gamma > \gamma_{opt}$ 이고, 이 경계를 만족시키는 제어기의 집합이 있다.<sup>[4]</sup>

일반적으로  $H_\infty$  제어기는 다음과 같은 설계사양을 요구한다.

$$\bar{\sigma}(S(j\omega)) \leq |W_1^{-1}(j\omega)| \quad (3.4)$$

$$\bar{\sigma}(T(j\omega)) \leq |W_3^{-1}(j\omega)| \quad (3.5)$$

여기서  $S$ 는 감도(sensitivity)행렬,  $|W_1^{-1}(j\omega)|$ 은 요구하는 외란 제거를 위한 가중행렬,  $T$ 는 여감도(complementary sensitivity)행렬,  $|W_3^{-1}(j\omega)|$ 은 모델링 오차 및 센서잡음에 대한 강인성을 위한 가중행렬이다. 식 (3.4)(3.5)는 각각 외란이 에너지를 가지는 저주파와 고주파에서의 강인 제어 성능을 만족시키는 식이다.

### 3.2 $H_\infty$ 제어기 설계

2장의 수중운동체에 대하여 상기의  $H_\infty$  제어이론을 적용한 시뮬레이션 및 결과를 요약하면 다음과 같다.

그림 2(a)와 3(a)는 각각 횡방향 및 종방향의 개루프 전달함수의 특이값선도들이다. 그림 2(b)는 (3.4)(3.5)식으로 나타난 가중함수 행렬들의 특이값 선도들이며, 횡방향 및 종방향 공히 적용된다. 본 논문에서 사용된 가중함수행렬  $(\gamma W_1)^{-1}(s)$ ,  $W_3^{-1}(s)$ 는 다음과 같다.

$$(\gamma W_1)^{-1}(s) = \gamma^{-1} \frac{0.01 \cdot (100s + 1)}{0.01s + 1} I_{(1 \times 1)}$$

$$W_3^{-1}(s) = \frac{1000}{s^2} I_{(1 \times 1)}$$

여기서  $\gamma$ 는 준최적  $H_\infty$  제어문제의 설계 파라메타이고, 최적으로 결정된 준최적 값들은 횡방향 제어시  $\gamma_{subopt} = 18.5$ , 그리고 종방향 제어시  $\gamma_{subopt} = 18.8$ 로 선정하였다.

$\gamma$ 가 1부터 증가함에 따라 감도함수와 여감도 함수는 그림 2(c), 2(d), 3(b), 3(c)에서 보는 것처럼 각각 그들의 한계치(limit)인  $(\gamma W_1)^{-1}(s)$ 과  $W_3^{-1}(s)$ 을 따라서 움직임을 알 수 있다. 그리고

이 그림들은 설계사양인 식 (3.4) (3.5)를 만족하고 안정도-강인성을 만족하는 바람직한 루프 형상을 나타낸다.

그림 2(e)와 3(d)는 각각 횡방향과 종방향의 패루프 전달함수  $T_{zw}(P, K)$ 의 특이값선도를 나타내었고 이는 식(3.3)을 만족하는 준최적 문제의 해이다.

## 4. 슬라이딩모드 제어기 설계

슬라이딩모드 제어는 제어대상 파라미터 변동이나 외란에 대하여 정확한 정보를 알 수 없다 하더라도 그 경계치만 알고 있다면 강인한 제어를 실현할 수 있을 뿐 아니라, 미지의 파라미터를 추정할 필요가 없으므로 제어기 설계 알고리즘이 간단한 잇점이 있다. 또한 상태공간에서 표시점이 미리 정의된 스위칭 평면에 도달하여 슬라이딩모드 운동을 하는 동안 제어대상 시스템은 변수변화 및 외란에 대하여 매우 둔감함을 나타낸다.

그러나 위와 같은 슬라이딩모드 제어기(고정된 스위칭평면을 갖는 슬라이딩모드 제어기)는 표시점이 슬라이딩 운동을 시작하기 전에는 시스템의 불확실성에 매우 민감하며 또한 명령 추적 시간도 길어진다는 단점이 있다. 따라서 슬라이딩모드 제어기를 설계할 때 스위칭 평면까지 도달하는 데 걸리는 시간인 도달시간(reaching time)을 줄여줄 필요가 있다.

본 장에서는 스위칭 평면을 시간에 따라 변화시켜 도달시간을 줄여줄 수 있는 시변슬라이딩모드 제어기를 설계하고자 한다.

### 4.1 시변슬라이딩모드 제어이론

본 논문에서 사용된 시변슬라이딩모드 제어의 자세한 이론적 내용은 참고문헌[5]을 참조 바람이며 이를 간단히 요약하면 다음과 같다. 먼저 스위칭평면 근방에서 연속적으로 변화하는 스위칭논리를 발생시키기 위하여 수정된 포화함수(modified saturation function, MOD) 스위칭논리를 사용한다.

$$MOD(z) = \begin{cases} \text{sgn}(z) & |z| \geq 1 \\ z & |z| < 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

여기서

$$z = \sigma(x, t) / (p \cdot N(x))$$

이고,  $p$ 는 양의 정수이며 본 논문의 시뮬레이션에서는  $p=1$ 을 사용하였고  $N(x)$ 는 노름으로 다음과 같이 정의된다.

$$N(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

그리고  $x$ 는 상태변수,  $\sigma(x, t)$ 는 시변 스위칭 평면 함수이며 다음과 같이 정의된다.

$$\sigma(x, t) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i(t) x_i) + c_n x_n \quad (4.2)$$

여기서

$$c_i(t) = c_{i\min} + (c_{i\max} - c_{i\min}) \cdot H_i(t)$$

$$c_n = 1$$

여기서  $H_i(t)$ 는 0에서 1로 변화하는 단조 증가 연속함수이다. 시변슬라이딩모드 제어는 스위칭 평면계수를  $c_{i\min}$ 에서  $c_{i\max}$ 로 증가시킴으로써 도달시간을 단축시킬 수 있는 반면, 초기에는  $c_{i\min}$ 을 사용함으로써 과도한 입력 및 채터링을 예방할 수 있는 장점이 있다. 슬라이딩 운동이 발생할 필요충분조건은<sup>[5,7]</sup>

$$\sigma(x, t) \cdot \dot{\sigma}(x, t) < 0 \quad (4.3)$$

이므로 이 조건에서 스위칭 평면계수를 찾는다. 이때 제어법칙은 다음과 같다.

$$u(x, t) = \left( - \sum_{i=1}^n \psi_i(t) |x_i| \right) \cdot MOD(z) \quad (4.4)$$

여기서

$$\psi_i(t) = \psi_{i\min} + (\psi_{i\max} - \psi_{i\min}) \cdot G_i(t)$$

이고  $G_i(t)$ 는 0에서 1로 단조증가하는 연속함수이다. 따라서  $\psi_i(t)$ 를 찾을 수 있으면 제어대상 시스템은 슬라이딩모드를 유지한다.

그림 4는 위상공간에서 고정된 스위칭 평면을 가지는 슬라이

딩모드 제어와 스위칭평면이 시간에 따라 점차적으로 변화하면서 최종적으로 슬라이딩모드에 도달하면 원점으로 슬라이딩 운동을 하는 시변슬라이딩모드 제어를 나타낸다.

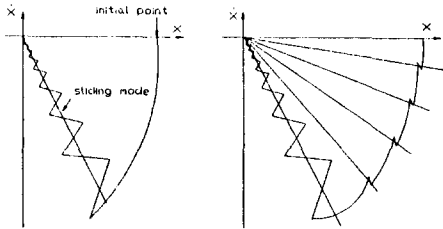


그림 4. 고정된 스위칭 평면과 시변 스위칭 평면

4.2 시변슬라이딩모드 제어기 설계

고정된 스위칭 평면을 가지는 슬라이딩모드 제어기와 시변슬라이딩모드 제어기의 성능 비교를 위한 시물레이션 선도가 그림 5와 6에 도시되어 있다.

시물레이션을 위한 파라미터는 각 방향에 대하여 식(4.3)를 만족하도록 적절한 값을 선정하였다.<sup>[6]</sup> 여기서 스위칭 평면함수와 제어법칙을 선정하는데 필요한 가중치 함수는 다음과 같이 정하였다.

$$H_i(t) = \begin{cases} \sin(h_i \cdot t) & , h_i \cdot t < \pi/2 \\ 1 & , h_i \cdot t \geq \pi/2 \end{cases}$$

$$G_i(t) = \begin{cases} \sin(g_i \cdot t) & , g_i \cdot t < \pi/2 \\ 1 & , g_i \cdot t \geq \pi/2 \end{cases}$$

여기서  $h_i$  및  $g_i$ 는 양의 정수들이며, 본 시물레이션에서는  $h_i = g_i = 1, (i = 1, \dots, n-1)$  을 사용하였다. 이와 같이 선정된 파라미터는 표 1에 요약되어 있다. 또한 시물레이션을 위한 초기치는 횡방향운동의 경우는  $x(0) = [2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3]^T$ 이며 종방향은  $x(0) = [4 \ 2 \ -3 \ -5]^T$  로 두었다.

시물레이션 결과로부터 다음을 알 수 있다.

- 1) 횡방향 및 종방향의 슬라이딩모드 제어시 수정된 포화함수 스위칭 논리를 이용함으로써 연속 제어입력과 채터링(chattering)이 적은 제어를 발생시켰다.
- 2) 시변슬라이딩모드 제어기의 제어입력은 고정된 스위칭 평면을 가지는 슬라이딩모드 제어기의 제어입력 보다 크기가 아주 줄어들었고 제어종료 시간도 단축되었다.
- 3) 시변슬라이딩모드 제어기의 경우 각 상태의 오버슈트와 언더슈트의 크기가 매우 줄었다.
- 4) 횡방향의 상태증  $x_2$ 와  $x_3$ , 즉 물각과 물각변화율은 시물레이션 선도에서 차이가 거의 없으므로 물각이 두 제어기의 제어 성능에 미치는 영향은 미소함을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구는 모델링에 불확실성을 가지는 수중운동체에 대하여 강인한 제어성능을 가지는 제어기를 설계하는 데 주안점을 두었다.

먼저 상태공간 설계기법을 이용하여 외란제거 성능, 모델링 오차와 센서잡음에 대한 저감도를 만족하며 페루프 시스템을 안정시키는  $H_\infty$ 제어기를 설계하였다. 그리고 기존의 슬라이딩모드 제어기가 갖고 있던 몇가지 문제점들을 보완한 시변슬라이딩모드 제어기를 설계하였고 기존의 제어기와 시변슬라이딩모드 제어기의 성능을 비교하여 시변슬라이딩모드 제어기의 성능이 우수함을 시물레이션 결과를 통해 입증하였다.

참 고 문 헌

[1] 박철재, 이만형, "수중운동체의 오차해석", 대한기학회 '92 추계학술대회는문집(I), pp. 727-731  
 [2] 박철재, 이만형, "Error Analysis of Underwater Vehicle with Disturbance and Measurement noise", 대한기학회 '93 춘계학술대회는문집(I), pp. 360- 364  
 [3] Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini,

"Feedback Control of Dynamic Systems", ADDISON-WESLEY PUBLISHING COM. April, 1991.

[4] X.P.Li and B.C.Chang, and S.S.Banda and H.H. Yeh, "Robust Control Systems Design Using  $H_\infty$  Optimization Theory", Journal of Guidance, Control, and Dynamics Vol.15, No.4, July-August 1992.  
 [5] Fumio Harashima, Hideki Hashimoto and Koji Maruyama, "Sliding Mode Control of Manipulator with Time-Varying Switching Surfaces", Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers, Vol. 22, No. 3, Mar. 1986.  
 [6] Kar-Keung D. Young, "Controller Design for a Manipulator Using Theory of Variable Structure Systems", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. smc-8, No.2, Feb. 1978.  
 [7] Fumio Harashima, "Sliding Mode Control of Manipulator with Time-Varying Switching Surfaces", Trans. of the Society of Instrument and Control Eng. Vol. 22, No. 3, Mar. 1986.  
 [8] Lopes, L.A., "Motion Equation for Torpedos," NAVORD Rep. 2090, Feb., 1954.

표 1. 슬라이딩모드 제어기 설계를 위한 파라미터

시변슬라이딩모드 제어 파라미터	고정형 슬라이딩모드 제어 파라미터				
	횡방향	종방향	횡방향	종방향	
$c_{1min} \sim c_{1max}$	10~36.5	10~140	$c_1$	36.5	140
$c_{2min} \sim c_{2max}$	15~387.6	25~60	$c_2$	387.6	60
$c_{3min} \sim c_{3max}$	12~595.2	15~35	$c_3$	595.2	35
$c_{4min} \sim c_{4max}$	13~739.5		$c_4$	739.5	
$\psi_{1min} \sim \psi_{1max}$	3.5~37	5.5~24	$\psi_1$	37	24
$\psi_{2min} \sim \psi_{2max}$	3.5~24	5.5~10	$\psi_2$	24	10
$\psi_{3min} \sim \psi_{3max}$	3.5~27	5.5~27	$\psi_3$	27	27
$\psi_{4min} \sim \psi_{4max}$	3.5~35	5.5~12	$\psi_4$	35	12
$\psi_{5min} \sim \psi_{5max}$	3.5~21		$\psi_5$	21	

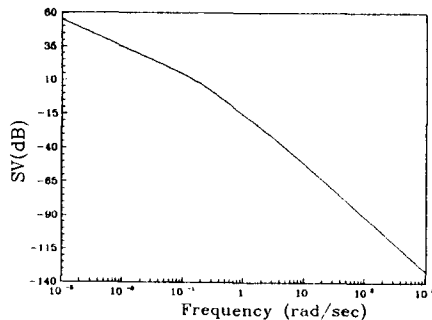


그림 2(a) 횡방향 개루프 전달함수의 특이값 선도

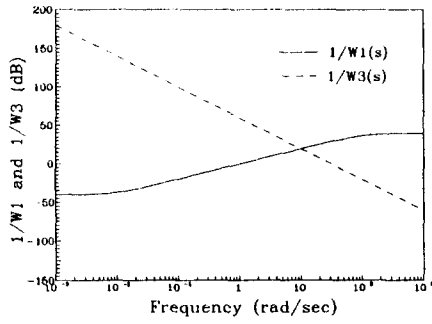


그림 2(b) 가중함수 행렬의 특이값선도

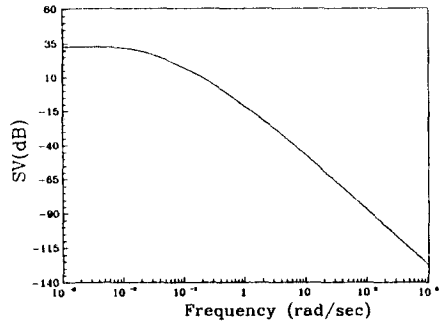


그림 3(a) 중방향 개루프 전달함수의 특이값선도

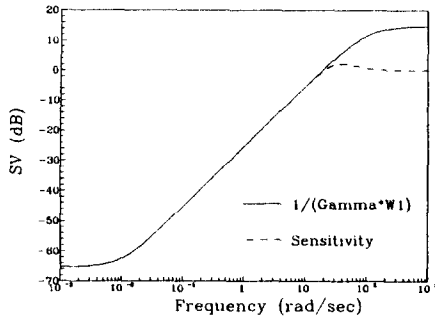


그림 2(c) 평방향의 감도함수와  $(\gamma W_1)^{-1}(s)$

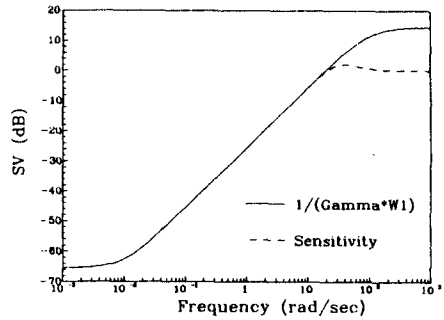


그림 3(b) 중방향의 감도함수와  $(\gamma W_1)^{-1}(s)$

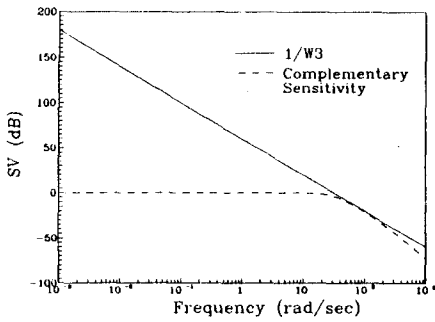


그림 2(d) 평방향의 여감도함수와  $W_3^{-1}(s)$

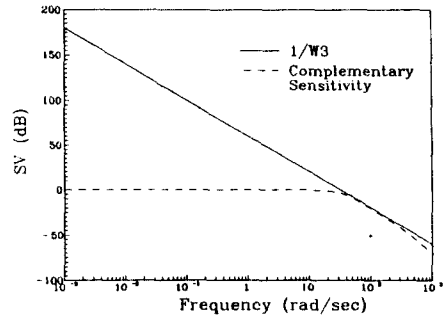


그림 3(c) 중방향의 여감도함수와  $W_3^{-1}(s)$

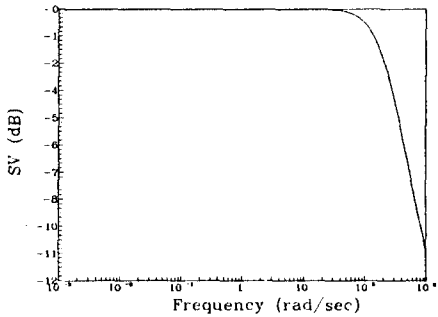


그림 2(e) 평방향 폐루프 전달함수  $T_w(P,K)$ 의 특이값선도

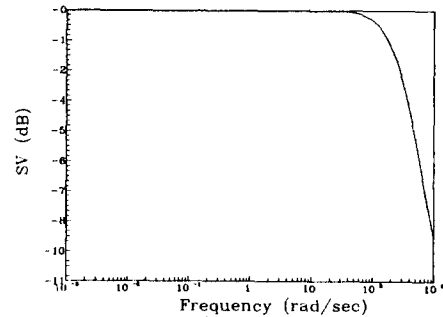


그림 3(d) 중방향 폐루프 전달함수  $T_w(P,K)$ 의 특이값선도

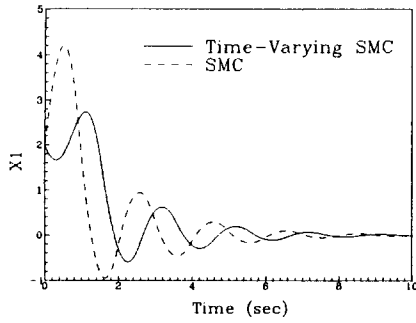


그림 5(a) 횡방향운동의 상태  $x_1$ (=y방향 속도)의 변화

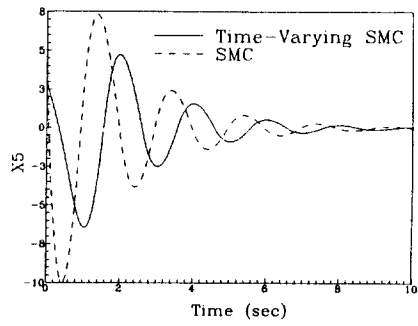


그림 5(e) 횡방향운동의 상태  $x_5$ (=요오변화율)의 변화

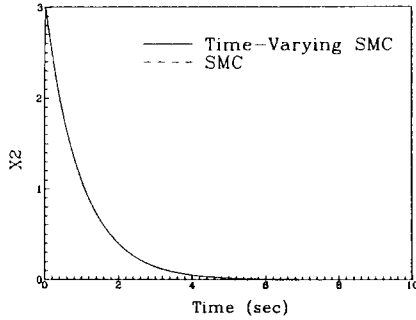


그림 5(b) 횡방향운동의 상태  $x_2$ (=롤각)의 변화

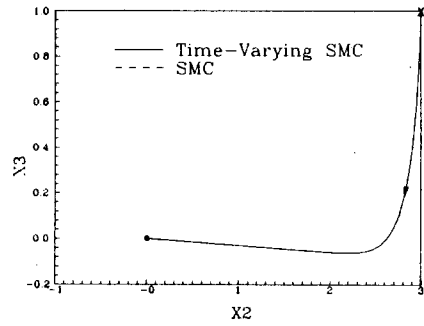


그림 5(f) 횡방향운동의 롤각,롤변화율의 위상평면 궤적

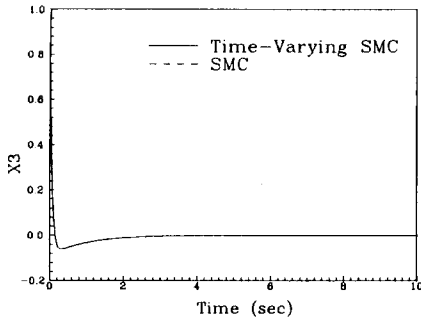


그림 5(c) 횡방향운동의 상태  $x_3$ (=롤변화율)의 변화

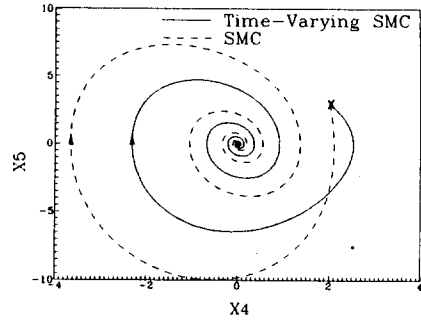


그림 5(g) 횡방향운동의 요오각,요오변화율의 위상평면 궤적

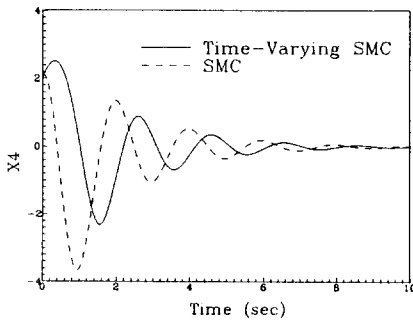


그림 5(d) 횡방향운동의 상태  $x_4$ (=요오각)의 변화

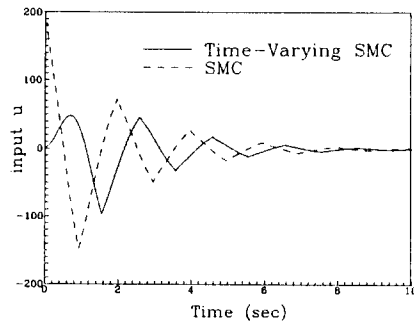


그림 5(h) 횡방향운동의 제어입력

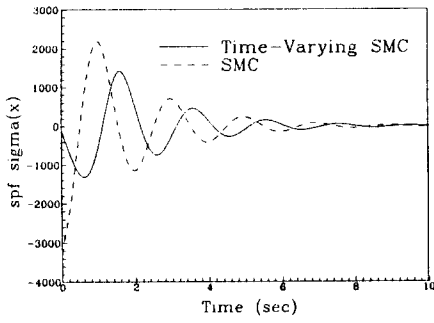


그림 5(i) 횡방향운동의 스위칭 평면함수

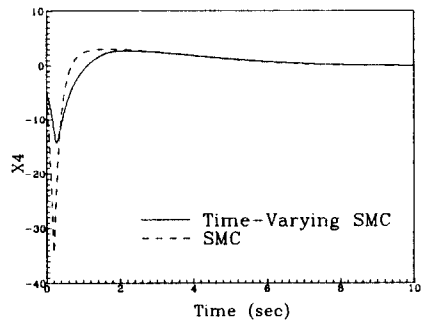


그림 6(d) 종방향운동의 상태  $x_4$ (=피치변화율)의 변화

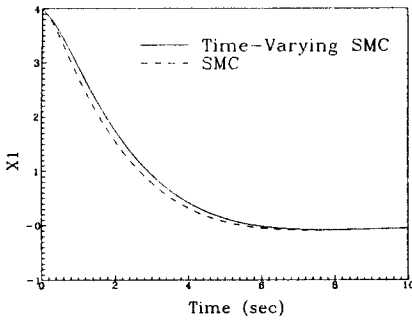


그림 6(a) 종방향운동의 상태  $x_1$ (=x방향속도)의 변화

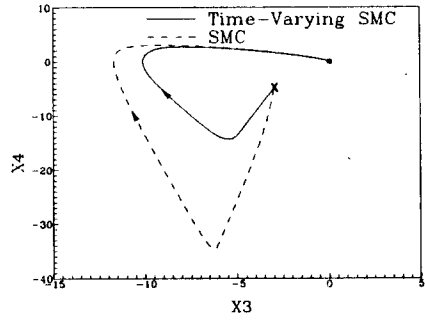


그림 6(e) 종방향운동의 피치각, 피치변화율의 위상평면 궤적

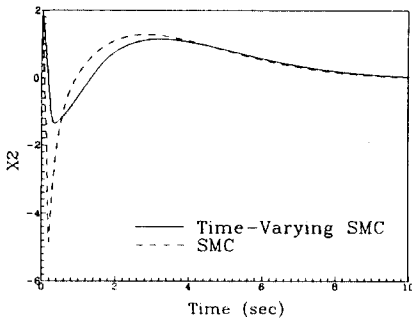


그림 6(b) 종방향운동의 상태  $x_2$ (=z방향속도)의 변화

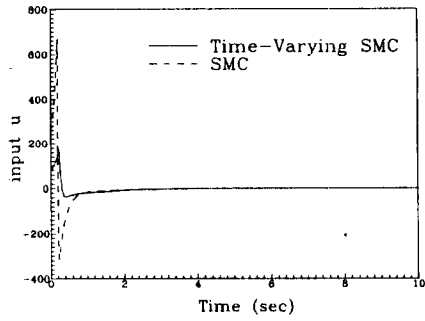


그림 6(f) 종방향운동의 제어입력

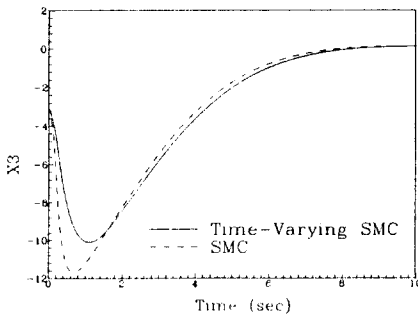


그림 6(c) 종방향운동의 상태  $x_3$ (=피치각)의 변화

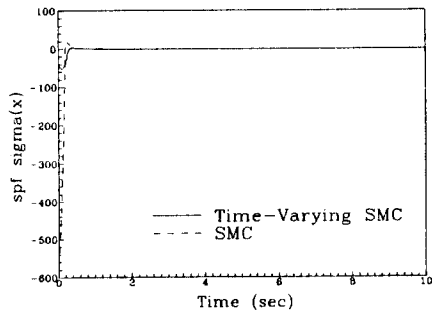


그림 6(g) 종방향운동의 스위칭 평면함수