

## 수중 운동체를 위한 측면 공격 유도 기법

°이보형, 이장규, 한형석, 김병수  
서울대학교 공과대학 제어계측공학과

### Development of Side Attack Guidance Law for an Underwater Vehicle

°Bo-Hyung Lee, Jang-Gyu Lee, Hyung-Seok Han, Byung-Soo Kim  
Dept. of Control & Instrumentation Eng., Seoul National University

#### Abstract

In this paper, two side-attack guidance laws for an underwater vehicle are considered. In order to find the guidance command, we first make use of the optimal guidance law with terminal impact angle constraint. Secondly, the optimal solution of tracking problem is used. This paper shows some brief theory which is used in deriving the side-attack guidance laws, and the method of computing these guidance laws. Simulations on underwater vehicle for a constant moving target prove that the suggested side-attack guidance laws have enhanced side attack performance over the optimal guidance law with miss distance weighting only. Furthermore, from simulation results, we conclude that the guidance law using the optimal solution of tracking problem is more efficient for the side-attack guidance than the optimal guidance law with terminal impact angle constraint.

#### 1. 서론

유도 무기의 유도 제어에 관한 연구는 유도 무기가 주어진 표적에 명중되는 것을 목적으로 하여, 주로 마지막 순간 (final time)의 빗나간 거리(miss distance)를 최소화하는데 많은 노력이 기울어져 왔다. 유도 장치에서 유도 명령을 계산하는 알고리즘인 유도 법칙으로 지금까지 사용된 것들은 다음과 같이 분류될 수 있다.[1]

- 1) 시선 지령식 유도 법칙 ( line of sight guidance )
- 2) 추적 유도 법칙 ( pursuit guidance )
- 3) 비례항법 유도 법칙 ( proportional navigation guidance )
- 4) 최적 유도 법칙 ( optimal guidance )

시선 지령식 유도 법칙은 기준점과 표적을 연결하는 직선 위에 유도 무기를 위치하도록 하는 유도 법칙이고, 추적 유도 법칙은 유도 무기의 속도 벡터 또는 진행 방향이 표적을 향하도록 유도하는 방법이다. 비례 항법 유도 법칙은 동속 운동하는 두 물체가 일정한 상대각을 유지하면서 상대거리가 감소하면 충돌이 보장된다는 사실을 이용하여 유도 무기의 유도 명령을 시선각의 변화율에 비례하는 값으로 주는 방법이며, 최적 유도 법칙은 유도 무기와 표적의 기하학적 관계를 상태방정식에 포함시켜 마지막 시간의 빗나간 거리가 가장 적어지도록 유도 명령을 구하는 방법이다.

이러한 유도 법칙의 주 관심사는 유도 무기가 표적에 명중 (intercept)되는 것으로 충돌시 표적에 주는 손상을 극대화하기 위한 노력은 별로 고려되지 않았다. 그러나, 수중 유도 무기의 경우 표적들이 대부분 견고한 선체 구조를 갖추고 있어 단순히 명중되는 것만으로는 표적에 치명적인 손상을 주기 어려우므로, 충돌시 표적에 주는 손상을 극대화하기 위한 노력이 고려되어야 한다. 수중 유도 무기의 주요 표적들은 대부분 이중 선체 구조를 갖추고 있으므로, 이러한 표적에 치명적인 손상을 주기 위해서는 지향성 탄두가 사용되는데 지향성 탄두의 효율을 극대화하기 위해서는 표적의 중앙 제어실이 있는 측면에 명중되어야 한다. 일반적으로 최종 유도(terminal guidance)단계에서는 예상되는 요격점(intercept point)에서 표적과 유도체가 교차되도록 유도되나, 측면 공격 유도에서는 표적의 측면에 유도체를 수직으로 명중시키기 위하여 근접 추적 단계를 거쳐서 유도명령이 내려져야 한다. 근접 추적 단계에서는 표적의 상태변수를 계속 추정하여 표적을 확인하고, 측면에 수직으로 명중시키기 위한 최적 궤적을 결정한다.

본 논문에서는 유도 무기의 측면 공격 유도 법칙에 관한 연구 결과를 제시한다. 측면 공격 유도 법칙은 표적 충돌각과 가속도 제한을 고려한 최적 유도 법칙과, 추적 문제(tracking problem)의 최적해를 적용한 두가지 방법을 이용한다. 본 논

문의 구성은 2절에서 수중 유도무기 시스템의 운동 방정식과 유도 기하(guidance geometry)를 제시하여 전체 시스템을 상태 방정식으로 표현하고, 3절에서는 2절에서 구한 상태방정식을 이용하여 두가지 방법으로 측면 공격 유도 법칙을 구한다. 4절에서는 시뮬레이션을 통하여 제안된 유도법칙들의 측면 공격 효율성에 대하여 고찰하고 5절에서 전체적인 결론을 제시한다.

## 2. 시스템의 상태 방정식

본 절에서는 유도 무기의 운동방정식과 표적, 유도 무기간의 기하학적 관계를 이용하여 시스템의 상태 방정식을 유도한다.

수중 유도 무기의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= 0 \\ M_y \dot{v} &= Y_{\omega} + Y_{rr} - Mru + Y_s \delta_r \\ J_z \dot{r} &= N_v v + N_r r + N_s \delta_r \\ \dot{\psi}_m &= r \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $u$ 와  $v$ 는 각각 동체 좌표계(body frame)에 대한 수중 운동체의  $x$ 축 방향 속도와  $y$ 축 방향 속도를 나타내며,  $r$ 은 동체 좌표계에 대한 수중 운동체의  $z$ 축 방향 각속도를 나타내고  $\psi_m$ 는 오일러 각(Euler angle)으로 동체 좌표계의 회전각을 의미한다.  $M, M_y, J_z$ 는 수중 운동체의 관성 계수이며,  $Y_v, Y_r, Y_s, N_v, N_r, N_s$ 는 동유체력 계수(hydrodynamic coefficient)로서 전진 속도  $u$ 의 함수이다.

그림 1과 같은 유도 기하(guidance geometry)에 대하여 수중 운동체와 표적의 기하학적 관계는 다음과 같다.

$$Y_{rel} = Y_t - Y_m \quad (2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} Y_{rel} = \frac{d^2}{dt^2} Y_t - \frac{d^2}{dt^2} Y_m \quad (3)$$

여기서,  $Y_t$ 와  $Y_m$ 은 각각 기준 좌표계에 대한 표적과 수중 운동체의  $Y$ 축 방향 위치를 나타낸다. 표적이 기동하지 않는다고 가정하면,  $\frac{d^2}{dt^2} Y_t$  항이 소거되므로 식 (3)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} Y_{rel} &= -\frac{d^2}{dt^2} Y_m = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{d}{dt} Y_m \right] \\ &= -\frac{d}{dt} [ \sin(\psi_m)u + \cos(\psi_m)v ] \\ &= -\cos(\psi_m)\dot{\psi}_m u - \sin(\psi_m)\dot{u} \\ &\quad + \sin(\psi_m)\dot{\psi}_m v - \cos(\psi_m)\dot{v} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)는  $u, v, \dot{\psi}_m$ 에 대하여 비선형이므로 적절한 가정을 도입하여 선형화 해야한다. 공격각(angle of attack)이 매우 작고 전진 속도(forward speed)가 급격히 변하지 않는다면 다음과 같은 가정을 도입할 수 있다.

$$-\psi_m \approx 0 \quad (5)$$

$$-u \approx V_m = \text{constant} \quad (6)$$

$$-|u| \gg |v| \quad (7)$$

여기서  $V_m$ 은 수중 운동체의 속력을 나타낸다.

(5), (6), (7)식을 이용하면 (4)식은 다음과 같이 선형화된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} Y_{rel} &\approx -V_m r - \dot{v} \\ &= -\frac{Y_v}{M_y} v - \left[ \frac{Y_r - MV_m}{M_y} + V_m \right] r - \frac{Y_s}{M_y} \delta_r \end{aligned} \quad (8)$$

시스템의 상태변수  $x$ 를 식 (9)와 같이 정의하고 (1), (2), (8)식을 이용하면 전체 유도 시스템의 상태 방정식은 식 (10)과 같이 표현된다.

$$x = [ Y_{rel} \quad \dot{Y}_{rel} \quad \psi_m \quad r \quad m ]^T \quad (9)$$

$$u = \delta_r \text{ : 방향타 편각(rudder deflection)} \quad (10-1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10-2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left[ \frac{Y_r - MV_m}{M_y} + V_m \right] & -\frac{Y_v}{M_y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{N_r}{J_z} & \frac{N_v}{J_z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_r - MV_m}{M_y} & -\frac{Y_v}{M_y} \end{bmatrix} \quad (10-3)$$

$$B = \left[ 0 \quad -\frac{Y_s}{M_y} \quad 0 \quad \frac{N_s}{J_z} \quad \frac{Y_s}{M_y} \right]^T \quad (10-4)$$

식 (10)으로 정의된 시스템을 이용하여 다음 절에서는 측면 공격 유도 알고리즘을 적용한다.

## 3. 측면 공격용 유도 알고리즘

### 3.1 표적 충돌각과 가속도 입력 제한을 고려한 최적 유도 법칙의 적용[2]

최적 유도 법칙을 구하기 위하여 다음과 같은 성능 지표 함수의 최소화 문제를 고려한다.

$$J = \frac{1}{2} [ (x(t_f) - x_f)^T G (x(t_f) - x_f) + \int_{t_0}^{t_f} u^T(\tau) R u(\tau) d\tau ] \quad (11)$$

여기서  $x(\cdot)$ 는 상태변수 벡터,  $u(\cdot)$ 는 제어 벡터,  $G, R$ 은 각각 양의 준정칙(positive semidefinite), 양의 정칙

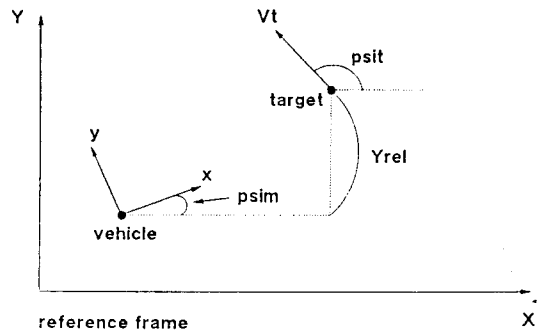


그림 1 유도 기하(guidance geometry)

(positive definite) 가중치 행렬을 나타낸다. 성능 지표 함수의 최소화는 선형 미분 방정식 제한

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (12)$$

와 입력 제한

$$u^T(t)u(t) \leq U_0^2 \quad (13)$$

을 구속 조건으로 갖는다.

이러한 최적 유도 법칙의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$u(t) = -U_0 \text{Sat} \left[ \left( -\frac{1}{U_0} \right) R^{-1} B^T \Phi^T(t_f, t) G(x(t_f) - x_f) \right] \quad (14)$$

여기서 포화 함수  $\text{Sat}(\cdot)$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{Sat}[x] = \begin{cases} x & , \quad \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & , \quad \|x\| > 1 \end{cases}$$

마지막 순간의 상태 변수는 다음과 같은 적분 방정식에 의하여 음함수로 주어진다.

$$x(t_f) - x_f = \Phi(t_f, t_0) x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B U_0 \times \text{Sat} \left[ \left( -\frac{1}{U_0} \right) R^{-1} B^T \Phi^T(t_f, \tau) G(x(\tau) - x_f) \right] d\tau \quad (15)$$

여기서,

$$\Phi(t, t_0) = A\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = I \quad (16)$$

이 성립한다.

수식 (15)로 주어지는 적분방정식의 해석적 해를 계산하는 것은 매우 어렵기 때문에 일반적으로, 가속도 입력 제한을 무시하고 얻어진 다음의  $x(t_f) - x_f$ 를 수식(15)에 대입한 근사적인 해를 이용한다.

$$x(t_f) - x_f = \left[ I + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) B R^{-1} B^T \Phi^T(t_f, t) G dt \right]^{-1} \times \Phi(t_f, t_0) x(t_0) - x_f \quad (17)$$

(14)식으로 표현되는 최적 유도 법칙을 유도 무기의 측면 공격에 적용하는 경우 상태 변수  $x$ 에 마지막 순간의 빗나간 거리(miss distance)와 유도 무기의 자세각이 포함되어야 하며, 표적 충돌시의 원하는 충돌각은  $x_f$ 에 포함되어야 한다. 진행 방향이 일정한 등속 또는 가속 운동 표적일 경우에  $x_f$ 는 상수가 되지만, 진행 방향이 변하는 기동 표적(maneuvering target)의 경우에는  $x_f$ 가 시변으로 주어져 비용함수  $J$ 를 유도 명령을 출력하는 매 시간마다 최소화해야 하므로 문제가 매우 복잡해진다. 본 논문에서는 진행방향이 변하지 않는 표적을 대상으로 (14)식의 유도 명령을 구한다. (14)식의 유도 명령을 구하기 위해서는 상태 전이 행렬(state transition matrix)  $\Phi(t_f, t)$ 와 마지막 순간의 빗나간 거리인 (17)식을 계산해야 하는데 시불변 시스템인 본 논문의 대상 시스템에 대하여 그 계산 방법과 계산 과정을 부록에 제시하였다.

(14)식으로 주어지는 최적 유도 법칙은 부록의 계산과정에서 알 수 있듯이 시스템의 차수가 증가하면  $\Phi(t_f, t)$ 와 (17)식

의 계산이 매우 복잡해지므로 유도 명령을 구하는 것이 거의 불가능하다. 따라서, 운동 방정식과 유도 기하(guidance geometry)가 간단하게 주어지는 경우가 아니면 (14)식의 유도 법칙을 적용하기 어렵다.

3.2 추적 문제(tracking problem)의 최적해(optimal solution) 적용[4]

선형 시스템이 다음과 같이 주어지고,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (18)$$

원하는 출력을  $z(t)$ , 오차벡터를  $e(t) = z(t) - y(t) = z(t) - Cx(t)$ 라 하자. 여기서  $A$ 는  $5 \times 5$ 행렬,  $B$ 는  $5 \times 1$ 행렬,  $C$ 는  $5 \times 5$ 단위 행렬로 가정한다.  $z(t)$ 의 벡터 크기는 출력  $y(t)$ 와 같다.

추적 문제의 목적은 과도한 제어 에너지를 소비하지 않으면서 시스템의 출력  $y(t)$ 가  $z(t)$ 를 따라가도록 시스템을 제어하는 것이다. 이러한 취지에서 오차벡터  $e(t)$ 를 위와 같이 정의한 것이며, 이 때 오차벡터는  $z(t)$ 와  $x(t)$ 의 함수로 표현된다.

최소화시켜야 할 비용 함수(cost functional)는 다음과 같다.

$$J = \frac{1}{2} e^T(T) F e(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [ e^T(t) Q e(t) + u^T(t) R u(t) ] dt \quad (19)$$

여기서  $u(t)$ 에 대한 제한(constraint)은 없으며,  $T$ 는 지정된다.  $R$ 는 양의 정칙 행렬이고,  $F$ 와  $Q$ 는 각각 양의 준정칙 행렬이다. 이 때 최적 제어 법칙은 반드시 존재하고 유일하며, 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$u(t) = -R^{-1}(t) B^T(t) [g(t) - K(t)x(t)] \quad (20)$$

$5 \times 5$  실수, 대칭, 양의 정칙 행렬  $K(t)$ 는 리카티 형태(Riccati-type) 행렬 미분 방정식(matrix differential equation)

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) &= -K(t)A - A^T K(t) \\ &\quad + K(t)BR^{-1}(t)B^T K(t) - C^T Q(t)C \end{aligned} \quad (21)$$

의 해이며, 경계조건은

$$K(T) = C^T F C \quad (22)$$

이다.

$5 \times 1$  벡터  $g(t)$ 는 선형 미분 방정식

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= -[A - BR^{-1}B^T K(t)]^T g(t) \\ &\quad - C^T Q z(t) \end{aligned} \quad (23)$$

의 해이며, 경계조건은

$$g(T) = C^T F z(T) \quad (24)$$

이다.

추적 문제의 최적해 (20)을 측면 공격 유도 알고리즘에 적용하는 경우, 상태 변수  $x$ 에 마지막 순간의 빗나간 거리(miss distance)와 유도 무기의 자세각이 포함되어야 한다. 표적 충돌시의 원하는 충돌각은 추적 문제에서 원하는 궤적(desired trajectory) 벡터  $z(t)$ 의 마지막 순간  $t_f$ 에서의 한 원소값(element value)으로 지정되어야 한다. 원하는 궤적  $z(t)$ 는 상태변수  $x(t)$ 와 대응되므로 마지막 순간의 원하는 궤적 벡터  $z(t)$ 의 원소 값은 시스템의 자세각에 대응되는 표적 충돌각을 제외하고는 0가 된다. 추적 문제의 최적해를 이용하면 3.1절에서 고려한 유도 법칙과 달리 비용 함수 내에 오차 벡터  $e(t)$ 가  $e(t)=z(t)-x(t)$ 와 같이 정의되므로, 시작 시간(initial time)  $t_0$ 에서 마지막 시간(final time)  $t_f$ 사이의 시간  $t$ 의 함수로 주어지는  $z(t)$ 를 미리 지정해야 최적 유도 법칙을 구해낼 수 있다. 본 논문에서는 진행 방향이 변하지 않는 표적을 대상으로 시뮬레이션을 수행하므로 유도 명령이 출력되는 때 순간에  $z(t_f)$  값은 상수로 고정되며, 시간 구간  $[t_0, t_f]$ 에서의  $z(t)$  값은 유도 성능의 향상을 목적으로 상수로 고정하지 않고 표적 충돌각에 대응되는 원소를 잔여 시간(time-to-go)의 2차 함수로 지정하였다. 잔여 시간은 (25)식으로 정의되며, 구간  $[t_0, t_f]$ 에서의  $z(t)$ 의 수식 표현은 식 (26)와 같다.

$$t_{go} = t_f - t \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{At } t = t_0, \quad z_3(t_0) &= \psi_i \\ \text{At } t = t_f, \quad z_3(t_f) &= \psi_{mf} \\ z_3(t) &= \frac{\psi_{mf} - \psi_i}{t_{go}^2} (t - t_{go})^2 + \psi_i \\ z(t) &= [0 \ 0 \ z_3(t) \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (26)$$

여기서,  $z_3(t)$ 는  $z(t)$ 의 3번째 원소, 즉 표적 충돌각에 대응되는 원소이고,  $\psi_i$ 는 표적의 충돌각,  $\psi_{mf}$ 는 마지막 순간의 원하는 충돌각,  $t_{go}$ 는 초기 잔여 시간을 나타낸다. 마지막 순간의 원하는 충돌각  $\psi_{mf}$ 는  $\psi_{mf} = \psi_i \pm \frac{\pi}{2}$ 로 정의된다. 매 순간 유도 명령의 산출에 필요한 잔여시간은 상대거리(relative distance)를 접근 속도(closing velocity)로 나누어 구한다.

최적해 (20)은 진행 방향이 일정한 등속 또는 가속 운동 표적일 경우에  $z(t)$ 가 상수로 되어 이득행렬(gain matrix)을 미리 구할 수 있지만, 진행 방향이 변하는 기동 표적(maneuvering target)의 경우에는  $z(t_f)$ 가 시변으로 주어져 3.1절 유도 법칙과 마찬가지로 비용함수  $J$ 를 유도 명령을 출력하는 때 시간마다 최소화해야 하므로 계산량이 매우 증가하게 된다.

추적 문제의 최적해를 측면 공격 유도에 적용하는 경우, 다른 일반적인 최적 유도 법칙과 구별되는 가장 큰 특징은 식 (20)에서 알 수 있듯이 유도 명령이 상태변수의 되먹임(feedback)항과 더불어 앞먹임(feedforward) 항의 합으로 이루어진다는 사실이다. 상태 변수의 되먹임 유도 명령은 일반적인 최적 유도 법칙에서와 같이 마지막 순간의 상대 거리 오차를 감소 시키는 역할을 한다. 이에 비해 앞먹임 유도 명령은 유도 무기의 자세각을 측면 공격이 가능하도록 제어하여 표적 충돌시 표적 충돌각 오차를 감소시키는 역할을 한다. (표적 충돌각 오차는 표적 충돌시 유도 무기의 자세각과 식 (26)에 보인 원하는 충돌각  $\psi_{mf}$  사이의 오차 각도를 나타낸다)

#### 4. 시뮬레이션 및 고찰

제안된 유도 법칙의 유도 성능을 비교하기 위하여 진행 방향이 변하지 않는 등속 운동 표적을 대상으로 시뮬레이션을 수행한 결과를 정리하면 표 1과 같다. 표 1에서 표적 충돌각 오차의 정의는 3.2절의 정의와 같다. 그림 2, 3, 4는 초기 표적 자세각 45도, 초기 유도 무기 자세각 45도인 상황에서 시뮬레이션 했을 경우 표적과 유도 무기의 궤적을 나타낸 것이다. 그림 2는 상대거리 오차만을 고려한 최적 유도 법칙을 적용한 경우이고, 그림 3과 4는 각각 표적 충돌각, 가속도 제한을 고려한 최적 유도 법칙과 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙을 적용한 경우의 궤적을 나타낸다. 그림 2에 비하여 그림 3과 4에서 측면 공격의 효과가 명확하게 나타나는 것을 쉽게 확인할 수 있다.

표 1에 나타난 시뮬레이션 결과를 분석해 보면, 상대거리 오차 비교시 충돌각, 가속도 제한을 고려한 유도 법칙은 추적 문제의 최적해를 이용한 경우보다 상황에 따라 변화가 심함을 알 수 있으며, 표적 충돌각 비교시 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙이 보다 우수한 성능을 보임을 확인할 수 있다. 이 두 유도 법칙은 상대거리 오차만을 고려한 최적 유도 법칙에 비하여 상대거리 오차는 다소 크지만 표적 충돌각 오차는 우수함을 알 수 있다. 제안된 두 유도 법칙의 최소 상대거리 오차는 유도 무기와 표적을 점으로 가정한 상황에서 시뮬레이션한 결과이므로 실제적인 크기를 감안하면 어느 정도 받아들일 수 있는 수치이다.

전체적인 유도 성능을 평가해볼 때 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙의 성능이 가장 우수하다고 판단 된다. 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙은 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙에 비하여 최소 상대 거리의 변화가 심하지 않으며 표적 충돌각 오차는 다른 유도 법칙에 비해 가장 우수하기 때문이다. 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙은 최소 상대 거리의 변화가 다소 크지만, 측면 공격의 효과는 일반적인 유도 법칙

에 비해 우수하므로 특정한 상황하에서는 가장 우수한 유도 성능을 발휘할 수도 있다.

표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙의 오차 요인으로는 마지막 순간의 상태변수 오차로서 가속도 입력 제한이 없을 경우의 해를 근사화한 (17)식을 이용하는 점과, 모델링시 시스템을 선형 근사화하는 점을 들 수 있다. 추적 문제의 최적 유도 법칙에서 유도 성능을 저하시키는 주요 오차 요인으로는 시스템 모델링시의 선형 근사화와, 유도 명령이 제한 수치를 초과할 경우 입력 수치를 최대 입력가능 수치로 근사화하는 점을 들 수 있다.

본 논문의 결과는 진행 방향이 변하지 않는 등속 운동 표적에 대한 시뮬레이션 결과이지만, 진행 방향이 변하지 않는 가속 운동 모델에서도 비슷한 경향을 나타낸다.

### 5. 결론

표적 충돌시 주는 손상을 극대화하기 위한 측면 공격 기법으로 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙과 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙을 적용하여 유도 성능을 분석하였다. 시뮬레이션 결과 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙이 측면 공격 기법으로 가장 우수한 성능을 보임을 확인할 수 있었고, 논문에서 언급된 두 유도 법칙은 상대 거리 오차만을 고려한 최적 유도 법칙보다 우수한 측면 공격 효과를 보이는 것을 알 수 있었다.

충돌각을 고려한 최적 유도 법칙은 행렬 지수(matrix exponential) 함수와 역행렬 계산이 필요하게 되므로 시스템의 차수가 증가하면 계산량이 급속히 증가하여 복잡한 시스템에 적용하기가 어렵다. 반면 추적 문제의 최적해를 이용하면 리카티 방정식(Riccati equation)과 행렬 미분 방정식을 수치해석적인 방법으로 적분하여 유도 명령을 구할 수 있으므로 계산 측면에서 유리하다.

종합적으로 판단할 때, 추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙이 측면 공격 기법으로 가장 우수한 것으로 판단되며, 보

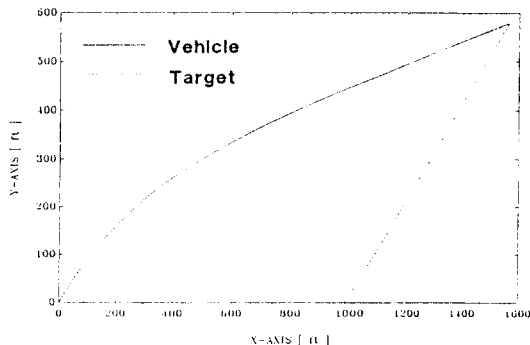


그림 2. 표적과 유도 무기의 궤적

유도법칙의 종류 시뮬레이션 상황			표적충돌각과 가속도제한을 고려한 최적 유도법칙		추적문제의 최적해를 이용한 유도법칙		상대거리 오차만을 고려한 최적유도법칙
			최소 상대 거리 [m]	표적 충돌각 오차 [deg.]	최소 상대 거리 [m]	표적 충돌각 오차 [deg.]	
초기 표적 자세각 [deg.]	초기 유도무기 자세각 [deg.]	원하는 표적 충돌각 [deg.]					
60	60	-30	91.3070	37.3729	6.0029	10.9636	41.3913
45	40	-45	0.4038	32.6738	12.5120	30.0991	59.2127
45	45	-45	2.4706	13.7580	12.0226	28.9328	57.8835
45	50	-45	34.0413	35.6723	8.1953	25.0289	56.6248
45	55	-45	167.8089	68.1307	4.0762	25.0933	55.4481
30	25	-60	0.2500	57.0518	12.6263	44.8144	71.5578
30	35	-60	0.2276	50.5775	17.2736	46.9061	70.6356
-30	-20	60	0.0882	-61.7565	8.1308	-40.9738	-72.6724
-30	-25	60	0.2500	-57.0518	12.6263	-44.8144	-71.5578
-60	-60	30	91.3070	-37.3729	6.0029	-10.9636	-41.3913

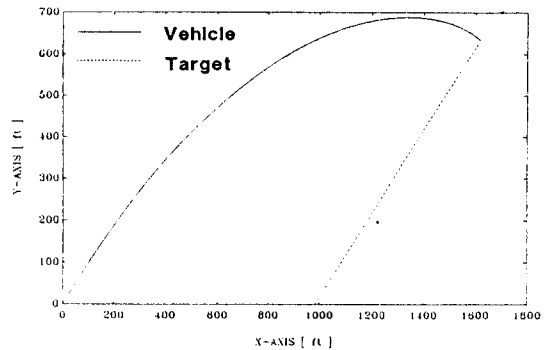


그림 3. 표적과 유도 무기의 궤적

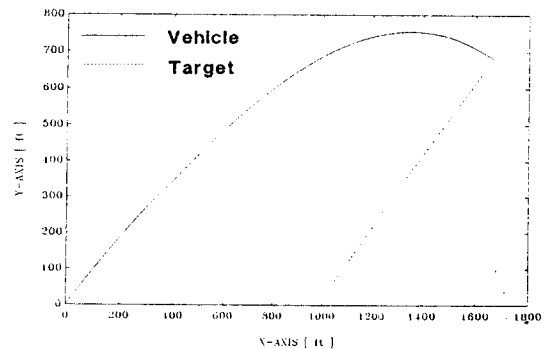


그림 4. 표적과 유도 무기의 궤적

다 향상된 유도 명령을 구하기 위해 앞으로 많은 개선 방법이 가능할 것으로 예상된다. 원하는 궤적(desired trajectory)  $z(t)$ 의 지정 방법, 보다 적절한 가중치 행렬  $R, Q, F$  값의 선택, 앞먹임 명령(feedforward)의 크기 조정 등이 앞으로 연구되어야 할 과제이다.

추적 문제의 최적해를 이용한 유도 법칙을 진행 방향이 변화하는 일반적인 기동 모델에 대해 적용하여 우수한 측면 공격 유도 성능을 발휘하도록 하는 것도 앞으로 주요 연구과제가 될 것이다. 이 연구에는 보다 많은 표적 정보를 얻기 위한 노력이 병행되어야 하며, 궁극적으로는 표적의 크기 정보까지 이용하여 단순한 측면 공격이 아닌 표적 중앙에 대한 측면 공격이 되도록 하는 방법이 필요하다.

#### 부록

A. 표적 충돌각과 가속도 제한을 고려한 최적 유도 법칙에서 유도 명령의 계산

3.1절의 식 (14)와 (17)로부터, 주어진 수중 운동체 시스템에 적용할  $u(t)$ 를 구하기 위해서는, 상태전이 행렬 (state transition matrix)  $\phi(t_f, t)$ 를 계산해야 함을 알 수 있다. 수중 운동체 시스템은 시불변 시스템이므로 다음의 관계식을 이용할 수 있다.

상태 방정식  $\dot{x} = Ax + Bu$ 에서  $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$ 이 성립하며  $e^{At}$

는  $t=0$ 에서 특이 행렬이 아니므로(nonsingular),  $e^{At}$ 는  $\dot{x} = Ax$ 의 기본 행렬(fundamental matrix)이 된다.  $e^{At}$ 가 모든  $t$ 에 대하여 비특이 행렬임을 증명할 수 있으므로  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ 이 성립한다. 따라서  $\dot{x} = Ax$ 의 상태 전이 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = e^{A(t-t_0)} = \phi(t-t_0) \quad (A-1)$$

식 (A-1)을 이용하고,  $t_f - t = t_{go}$ 라 하면,

$$\phi(t_f, t) = \phi(t_f - t) = e^{A(t_f-t)} = e^{At_{go}} \quad (A-2)$$

이 성립한다. 식 (A-2)를 식 (17)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$x(t_f) - x_f = [I + \int_t^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B R^{-1} \{e^{A(\tau-t)} B\}^T G d\tau]^{-1} \times \{e^{A(t_f-t)} x(t) - x_f\} \quad (A-3)$$

$t_f - \tau$ 를  $\tau_{go}$ 로 치환하고,  $R$ 이 스칼라 양임을 이용하면,

$$\begin{aligned} x(t_f) - x_f &= [I + \int_{t_{go}}^0 e^{A\tau} B R^{-1} \{e^{A\tau} B\}^T G (-d\tau_{go})]^{-1} \\ &\times \{e^{At_{go}} x(t) - x_f\} \\ &= [I + \int_0^{t_{go}} e^{A\tau} B R^{-1} \{e^{A\tau} B\}^T G d\tau_{go}]^{-1} \{e^{At_{go}} x(t) - x_f\} \\ &= [I + R^{-1} \int_0^{t_{go}} e^{A\tau} B \{e^{A\tau} B\}^T G d\tau_{go}]^{-1} \{e^{At_{go}} x(t) - x_f\} \end{aligned} \quad (A-4)$$

가 성립한다.

식 (A-4)의 계산에 필요한  $e^{At}$ 는 참고 문헌 [5]의 정리 2-13을 이용하여 구한다.

#### 정리 2-13

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 을 각각 반복 차수(algebraic multiplicity)  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_m$ 인  $A$ 의 서로 다른 고유치라 하고  $f$ 와  $g$ 를 두 다항식이라 하면, 다음의 진술은 동일하다.

$$- f(A) = g(A)$$

-  $f = h_1 \psi + g$  또는  $g = h_2 \psi + f$  이 성립한다. 여기서  $\psi$ 는  $A$ 의 최소 다항식(minimal polynomial)이며,  $h_1$ 과  $h_2$ 는 임의의 다항식이다.

$$- f^{(l)}(\lambda_i) = g^{(l)}(\lambda_i) \text{ for } l=0,1,2,\dots, \bar{n}_i-1; i=1,2,\dots,m$$

여기서  $f^{(l)}(\lambda_i) \equiv \left. \frac{d^l f(\lambda)}{d\lambda^l} \right|_{\lambda=\lambda_i}$ 이며,  $g^{(l)}(\lambda_i)$ 도 비슷하게 정의된다.

본문에 주어진 시스템에서  $A$ 는  $5 \times 5$  행렬로서 고유치는  $0, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2$  이다.

$$f(\lambda) = e^{\lambda t} \quad (A-5)$$

$$g(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^4$$

$$a_1 = t, \quad a_2 = \frac{t^2}{2}$$

$$g(\lambda) = 1 + t\lambda + \frac{t^2}{2} \lambda^2 + a_3 \lambda^3 + a_4 \lambda^4 \quad (A-6)$$

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^4 - \lambda_1^4 \lambda_2^3} \begin{bmatrix} \lambda_2^4 & -\lambda_1^4 \\ -\lambda_2^3 & \lambda_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} - \frac{t^2}{2} \lambda_1^2 - t\lambda_1 - 1 \\ e^{\lambda_2 t} - \frac{t^2}{2} \lambda_2^2 - t\lambda_2 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 t^2 + c_4 t + c_5 \\ a_4 &= d_1 e^{\lambda_1 t} + d_2 e^{\lambda_2 t} + d_3 t^2 + d_4 t + d_5 \end{aligned} \quad (A-7)$$

여기서  $\Delta = \lambda_1^3 \lambda_2^4 - \lambda_1^4 \lambda_2^3$  라 하면,

$$c_1 = \frac{\lambda_2^4}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{-\lambda_1^4}{\Delta}, \quad c_3 = \frac{1}{2\Delta} (\lambda_1^4 \lambda_2^2 - \lambda_1^2 \lambda_2^4)$$

$$c_4 = \frac{1}{\Delta} (\lambda_1^4 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2^4), \quad c_5 = \frac{1}{\Delta} (\lambda_1^4 - \lambda_2^4)$$

$$d_1 = \frac{-\lambda_2^3}{\Delta}, \quad d_2 = \frac{\lambda_1^3}{\Delta}, \quad d_3 = \frac{1}{2\Delta} (\lambda_1^3 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2^3)$$

$$d_4 = \frac{1}{\Delta} (\lambda_1 \lambda_2^3 - \lambda_1^3 \lambda_2), \quad d_5 = \frac{1}{\Delta} (\lambda_2^3 - \lambda_1^3)$$

식 (A-5), (A-6), (A-7)으로부터  $e^{At}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{t^2}{2} A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4 \\ &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 t^2 + A_4 t + A_5 \end{aligned} \quad (A-8)$$

여기서,

$$\begin{aligned} A_1 &= c_1 A^3 + d_1 A^4 \\ A_2 &= c_2 A^3 + d_2 A^4 \\ A_3 &= \frac{1}{2} A^2 + c_3 A^3 + d_3 A^4 \\ A_4 &= A + c_4 A^3 + d_4 A^4 \\ A_5 &= I + c_5 A^3 + d_5 A^4 \end{aligned}$$

따라서  $e^{At}B = A_1 B e^{\lambda_1 t} + A_2 B e^{\lambda_2 t} + A_3 B t^2 + A_4 B t + A_5 B$  이 된다.

$$\begin{aligned} e^{At}B(e^{At}B)^T &= [A_1 B e^{\lambda_1 t} + A_2 B e^{\lambda_2 t} + A_3 B t^2 + A_4 B t + A_5 B] \\ &\times [e^{\lambda_1 t} B^T A_1^T + e^{\lambda_2 t} B^T A_2^T + t^2 B^T A_3^T + t B^T A_4^T + B^T A_5^T] \\ &= e^{2\lambda_1 t} k_1 + e^{2\lambda_2 t} k_2 + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} k_3 \\ &+ e^{\lambda_1 t} t^2 k_4 + e^{\lambda_2 t} t^2 k_5 + e^{\lambda_1 t} t k_6 \\ &+ e^{\lambda_2 t} t k_7 + e^{\lambda_1 t} k_8 + e^{\lambda_2 t} k_9 \\ &+ t^4 k_{10} + t^3 k_{11} + t^2 k_{12} + t k_{13} + k_{14} \end{aligned} \quad (A-9)$$

여기서,

$$\begin{aligned} k_1 &= A_1 B B^T A_1^T \\ k_2 &= A_2 B B^T A_2^T \\ k_3 &= A_1 B B^T A_2^T + A_2 B B^T A_1^T \\ k_4 &= A_1 B B^T A_3^T + A_3 B B^T A_1^T \\ k_5 &= A_2 B B^T A_3^T + A_3 B B^T A_2^T \\ k_6 &= A_1 B B^T A_4^T + A_4 B B^T A_1^T \\ k_7 &= A_2 B B^T A_4^T + A_4 B B^T A_2^T \\ k_8 &= A_1 B B^T A_5^T + A_5 B B^T A_1^T \\ k_9 &= A_2 B B^T A_5^T + A_5 B B^T A_2^T \\ k_{10} &= A_3 B B^T A_3^T \\ k_{11} &= A_3 B B^T A_4^T + A_4 B B^T A_3^T \\ k_{12} &= A_4 B B^T A_4^T + A_5 B B^T A_4^T + A_5 B B^T A_5^T \\ k_{13} &= A_4 B B^T A_5^T + A_5 B B^T A_4^T \\ k_{14} &= A_5 B B^T A_5^T \end{aligned}$$

식 (A-8)과 (A-9)를 이용하면  $x(t_f) - x_f$ 를 계산할 수 있다.

$$x(t_f) - x_f = [I + R^{-1} \int_0^{t_f} e^{A^* \tau} B (e^{A^* \tau} B)^T d\tau G]^{-1} \times \{ e^{A^* t_f} x(t) - x_f \} \quad (A-10)$$

여기서,

$$e^{A^* t} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 t^2 e^{\lambda_1 t} + A_4 t e^{\lambda_1 t} + A_5 \quad (A-11)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_f} e^{A^* \tau} B (e^{A^* \tau} B)^T d\tau G \\ &= \frac{1}{2\lambda_1} [e^{2\lambda_1 t_f} - 1] k_1 + \frac{1}{2\lambda_2} [e^{2\lambda_2 t_f} - 1] k_2 \\ &+ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} [e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t_f} - 1] k_3 \\ &+ \left[ \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t_f} t_{f0}^2 - \frac{2}{\lambda_1^2} e^{\lambda_1 t_f} t_{f0} + \frac{2}{\lambda_1^3} (e^{\lambda_1 t_f} - 1) \right] k_4 \\ &+ \left[ \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t_f} t_{f0}^2 - \frac{2}{\lambda_2^2} e^{\lambda_2 t_f} t_{f0} + \frac{2}{\lambda_2^3} (e^{\lambda_2 t_f} - 1) \right] k_5 \\ &+ \left[ \frac{1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t_f} t_{f0} - \frac{1}{\lambda_1^2} (e^{\lambda_1 t_f} - 1) \right] k_6 \\ &+ \left[ \frac{1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t_f} t_{f0} - \frac{1}{\lambda_2^2} (e^{\lambda_2 t_f} - 1) \right] k_7 \\ &+ \frac{1}{\lambda_1} [e^{\lambda_1 t_f} - 1] k_8 + \frac{1}{\lambda_2} [e^{\lambda_2 t_f} - 1] k_9 + \frac{1}{5} t_{f0}^5 k_{10} \\ &+ \frac{1}{4} t_{f0}^4 k_{11} + \frac{1}{3} t_{f0}^3 k_{12} + \frac{1}{2} t_{f0}^2 k_{13} + t_{f0} k_{14} \end{aligned} \quad (A-12)$$

식 (A-2), (A-10), (A-11), (A-12)를 이용하면 식(A-1)로 주어진 최적 유도 명령을 계산할 수 있다.

## 참고 문헌

- [1] Chang-fang Lin, *Modern Navigation Guidance and Control Processing*. New Jersey : Prentice-Hall Inc., 1991.
- [2] 류창경, 조항주, "표적 충돌각과 최대 가속도 제한을 고려한 최적 유도 법칙", 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 601-609, 1992. 10.
- [3] I. Rusnak, L. Meir, "Optimal Guidance for High-Order and Acceleration Constrained Missile," *J. of Guidance and Control*, Vol. 14, No.3, pp.589-596, May-June 1991.
- [4] M. Athans, P.L. Falb, *Optimal Control*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [5] C.T. Chen, *Linear System Theory and Design*. New York : CBS College Publishing, 1984.
- [6] H.L. Pastrik, S.M. Seltzer, & M.E. Warren, "Guidance Laws for Short-Range Tactical Missiles," *J. of Guidance and Control*, Vol. 4, No.2, pp. 98-108, March-April 1981.
- [7] M. Kim, Kelly V. Grider, "Terminal Guidance For Impact Attitude Angle Constrained Flight Trajectories," *IEEE Trans. on AES*, Vol. AES-9, No.6, pp. 852-859, Nov. 1973.
- [8] R.J. York, H.L. Pastrick, "Optimal Terminal Guidance with Constraints at Final Time," *J. of Guidance and Control*, Vol. 14, No.6, pp. 381-383, June 1977.
- [9] I. Rusnak, L. Meir, "Optimal Guidance for Acceleration Constrained Missile and Maneuvering Target", *IEEE Trans. on AES*, Vol. AES-26, No.4, pp. 618-624, July 1990.
- [10] 김병수, "유도 무기를 위한 통합된 유도/제어기 설계", 석사 학위 논문, 1992. 2.
- [11] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Control*. New Jersey : Prentice-Hall Inc., 1990.