

표준플랜트의 재구성을 통한 H^∞ 제어기설계

* 박준근*, 방경호*, 임태호**, 박홍배*
 * 경북대학교 공과대학 전자공학과, ** 산업과학기술연구소 제어연구부

H^∞ Controller Design Via the Reformulation of the Standard Plant

* Jun Gok Park*, Kyeong Ho Bang*, Tae Ho Um** and Hong Bae park*
 * Dept. of Electronics, Kyungpook National University
 ** Control Dept., Research Institute of Industrial Science & Technology

Abstract: This paper presents an improved algorithm which enables to find a suboptimal H^∞ controller. In the H^∞ control problem with output multiplicative uncertainty, the Glover-Doyle algorithm has some constraints for the standard plant. The proposed algorithm removes them by reformulating the standard plant. We show the validity of this algorithm by investigating the variation of norm-bound.

$$\|G(s)\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] < \infty \quad (2.1)$$

와 같이 정의되고 $\bar{\sigma}(\cdot)$ 는 최대 특이치(largest singular value)이다.

상태공간 표현
선형이고 시불변인 시스템이

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

로 주어진 경우 이를 (A, B, C, D) 혹은 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 로 나타낸다. 여기서 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{p \times n}$, $D \in R^{p \times m}$ 이고 전달함수는 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 로 주어진다.

정의 2.1

$G^*(s)G(s) = I$ 를 만족하는 행렬 $G(s) \in RH^\infty$ 를 inner라 한다.

정의 2.2

$Re s > 0$ 에서 해석적인 우역수(right-inverse)를 가지는 $G(s) \in RH^\infty$ 를 outer라 한다.

소인수 분해(coprime factorization)

전달함수행렬 $G(s)$ 의 우소인수분해(right coprime factorization) 및 좌소인수분해(left coprime factorization)는 $G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$ 와 같이 쓸 수 있으며, 여기서 $N, M, \tilde{N}, \tilde{M}$ 는 Hardy space H^∞ 에 속하는 행렬이다.

정규화된 소인수 분해(normalized coprime factorization)

(\tilde{N}, \tilde{M}) 가 행렬 $G(s) \in R$ 의 정규화된 좌소인수분해일 필요충분조건은

i) (\tilde{N}, \tilde{M}) 가 행렬 $G(s)$ 의 좌소인수분해이고,

I. 서론

모델링오차, 비선형성, 측정오차, 및 외란 등의 불확실성을 가지는 시스템의 페루프 안정성을 유지하고 성능최적화를 이루는 제어기설계를 다루는 건설제어이론은 최근 상당한 관심을 받고 있다. 1981년 Zames[9]는 H^∞ 제어에서 감도함수 최소화를 제안하였고, 1983년 Doyle[3]은 선형분수변환(linear fractional transformation)을 유도하여 일반적인 케환시스템의 문제를 모델정합(model matching)문제로 귀결시켰다. 1984년 Glover[5]는 H^∞ 최적화문제의 해를 다변수전달함수의 근사문제으로써 상태공간에서 Hankel norm에 의한 근사해를 구하였다. 이후 1988년 Doyle과 Glover[4]는 상태공간에서 두개의 대수 리카티방정식의 해를 통해 주어진 페루프 전달함수의 H^∞ -norm이 주어진 경계치 $\gamma (> \gamma_{min})$ 보다 작게 되는 건설안정화문제를 해결하였다.

출력 승산섭동을 가지는 시스템의 경우, Glover-Doyle 알고리즘을 적용하기 위한 표준플랜트에 대한 가정들 중 공칭플랜트가 진유리함수(strictly proper rational function)이거나, 표준플랜트의 요소가 허수축상에 transmission zero를 가지는 경우에는 알고리즘을 적용하여 해를 구할 수가 없다. 본 논문에서는 표준플랜트의 재구성을 통하여 제어기를 설계할 수 있는 알고리즘을 제시하였고, 원래의 문제와 변형된 문제 사이의 norm 경계치에 대한 관계를 유도하였다.

II. 수학적 배경 및 예비지식

이 장에서는 본 논문에서 사용되는 용어들과 건설제어이론 전개에 필요한 수학적 배경에 대해 살펴보고자 한다.

Hardy space

실유리 함수 $G(s)$ 가 ORHP(open right half plane)에서 해석적이고 유한한 H^∞ -norm을 가지면 Hardy space H^∞ 라 하며, H^∞ -norm $\|G(s)\|_\infty$ 은

ii) $\tilde{N} \tilde{N}^* + \tilde{M} \tilde{M}^* = I$ for all $s \in j\mathbb{R}$ 를 만족해야 한다

이다. 이때 행렬 $[\tilde{N}, \tilde{M}]$ 는 co-inner가 된다.

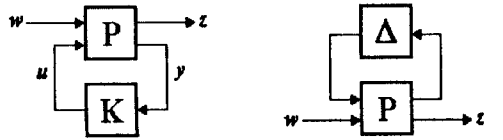
(N, M) 이 행렬 $G(s) \in R$ 의 정규화된 우소인수분해일 필요충분조건은

- i) (N, M) 이 행렬 $G(s)$ 의 우소인수분해이고,
- ii) $N^* N + M^* M = I$ for all $s \in j\mathbb{R}$ 를 만족해야 한다

이다. 이때 행렬 $\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$ 는 inner가 된다.

선형분수변환(LFT: linear fractional transformation)

일반적으로 선형분수변환은 표준블럭선도의 전달함수를 나타내고 $F(\cdot, \cdot)$ 로 표현되며 제어시스템에서 다양한 폐환구조를 표준화하는 수단으로서 그림 2.1과 같은 구조를 가진다.



(a) Lower LFT 구조 (b) Upper LFT 구조

그림 2.1 표준블럭선도
Fig. 2.1 Standard block diagram.

여기서 w 는 명령신호, 교란 등의 외부입력, u 는 제어입력, z 는 제어될 출력, y 는 관측된 출력, P 는 플랜트, K 는 제어기, Δ 는 섭동을 나타낸다.

정의 2.3

불확실성을 가진 시스템의 선형분수변환은 식(2.3)과 (2.4)의 두가지 형태로 표현한다.

- i) Lower linear fractional transformation(LLFT)

$$F_L\left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K\right) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (2.3)$$

여기서 $\det(I - P_{22}K) \neq 0$ 이다.

- ii) Upper linear fractional transformation(ULFT)

$$F_U\left(\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Delta\right) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \quad (2.4)$$

여기서 $\det(I - P_{11}\Delta) \neq 0$ 이다.

III. 불확실성을 가지는 시스템의 건실안정화

3.1 불확실성을 고려한 시스템의 모델링

수학적으로 모델링한 시스템과 실제시스템 사이에는 모델링 오차나 시스템의 섭동으로 표현되는 불확실성이 존재한다. 이러한 시스템의 불확실성이 존재하더라도 제한된 섭동의 한계치 내에서는 항상 시스템의 안정성을 보장할 수 있는 제어기의 설계가 건실안정화문제이다.

섭동의 형태로는 크게 구조적 섭동(structured perturbation)과 비구조적 섭동(unstructured perturbation)이 있다. 본 논문에서 다루는 비구조적 섭동은 주파수의 함수로서 그 크기의 상한치만 알 수 있고 플랜트에 들어오는 형태에 따라 가산 섭동, 승산 섭동, 소인수요소 섭동으로 나눌 수 있다. G, G_s 를 각각 공칭 및 섭동을 가진 플랜트의 전달함수라고 할 때 이들의 일반화된 형태는 식(3.1-3.4)와 같고 이들에 대한 블럭선도는 그림 3.1과 같다.

- i) 가산 섭동(additive perturbation)

$$G_s = G + \Delta_A \quad (3.1)$$

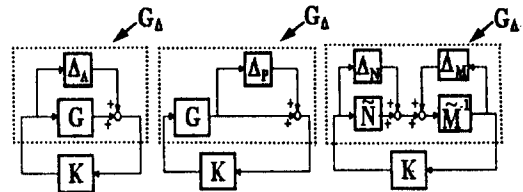
- ii) 승산 섭동(multiplicative perturbation)

$$G_s = (I + \Delta_P)G \quad (3.2)$$

- iii) 소인수요소 섭동(coprime factor perturbation)

$$G_s = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta_N) \quad (3.3)$$

여기서 $\tilde{N}_s = \tilde{N} + \Delta_N$ 와 $\tilde{M}_s = \tilde{M} + \Delta_M$ 는 G_s 의 좌소인수분해이다.



a) 가산 섭동 b) 승산 섭동 c) 소인수요소 섭동

그림 3.1 섭동을 가진 폐환시스템

Fig. 3.1 Feedback system with perturbation.

섭동을 가진 시스템모델 G_s 는 식(3.4)의 ULFT의 형태로 표현이 가능하다.

$$G_s = F_U(P, \Delta) \quad (3.4)$$

여기서 P 는 공칭플랜트를 포함하는 표준플랜트이고, Δ 는 가능한 섭동의 모델이다.

앞에서 언급한 세가지 유형의 섭동에 대한 각각의 표준플랜트는 식(3.5-3.7)과 같다.

- i) 가산 섭동

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & G \end{bmatrix}; (\Delta = \Delta_A) \quad (3.5)$$

$$F_L(P, K) = K(I - GK)^{-1}$$

ii) 승산 섭동

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & G \end{bmatrix}; (\Delta = \Delta_P) \quad (3.6)$$

$$F_L(P, K) = GK(I - GK)^{-1}$$

iii) 소인수요소 섭동

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \tilde{M}^{-1} & G \\ \tilde{M}^{-1} & G \end{bmatrix}; (\Delta = [\Delta_N, -\Delta_M]) \quad (3.7)$$

$$F_L(P, K) = \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \\ (I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K \\ I \end{bmatrix} (I - GK)^{-1} \tilde{M}^{-1}$$

3.2 안정화 조건

이 절에서는 LLFT 형태에서 표준플랜트 P 의 최소 상태공간 표현(minimal state space representation)에 대한 건설안정화조건에 대해 알아본다.

가정 3.1

P 의 최소 상태공간 표현을

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$P_{ij} = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij} \quad (3.8)$$

와 같이 표현할 때, (A, B_2) 는 stabilizable하고 (C_2, A) 는 detectable하다고 가정한다.

따라서 가정 3.1을 만족하는 제어기가 P_{22} 를 안정화시킬 수 있으면 전체시스템 P 를 안정화시킬 수 있다.

정리 3.1

그림 3.1의 폐환시스템이 내부적으로 안정할 필요충분조건은

- i) 가정 3.1이 만족된다
- ii) 식(2.3)으로부터 $(I - P_{22}K)$ 에서 $P_{22} = -\tilde{M}^{-1}\tilde{N}$, $K = UV^{-1}$ 를 대입하면, $(I - P_{22}K)^{-1}$ 가 모든 주파수에서 invertible하면서 RH^∞ 에 속하기 위해서는 $(\tilde{M}V + \tilde{N}U)^{-1}$ 가 RH^∞ 에서 unit 함수, 즉 함수 자체 및 그 역도 RH^∞ 에 속하는 함수이어야 한다

이다.

정리 3.2 건설한 안정화조건

그림 3.1에서 가정 3.1을 만족하는 P 와 $\|\Delta\|_\infty < \varepsilon$ 인 모든 Δ 에 대해 $F_U(P, \Delta)$ 를 안정화시키는 제어기일 필요충분조건은

- i) 제어기 K 가 $F_U(P, 0)$ 를 안정화시킨다
- ii) $\|F_L(P, K)\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}$

이다.

따라서 섭동 $\|\Delta\|_\infty < \varepsilon$ 인 모든 Δ 에 대해

$$\varepsilon_{\max} = (\inf_K \|F_L(P, K)\|_\infty)^{-1} \quad (3.9)$$

를 만족하고 페루프시스템을 안정화시키는 제어기가 H^∞ 최적화를 피하는 건설한 제어기이다.

지금부터는 앞에서 언급한 섭동의 형태에 따른 시스템의 건설한 안정화조건에 대해 알아본다.

보조정리 3.1

$G_\Delta = (G + \Delta_A)$ 일 때 이를 안정화시킬 필요충분조건은

- i) 제어기 K 가 G 를 안정화시킨다
- ii) $\|K(I - GK)^{-1}\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}$

이다.

보조정리 3.2

$G_\Delta = (I + \Delta_P)G$ 일 때 이를 안정화시킬 필요충분조건은

- i) 제어기 K 가 G 를 안정화시킨다
- ii) $\|GK(I - GK)^{-1}\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}$

이다.

보조정리 3.3

$G_\Delta = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1}(\tilde{N} + \Delta_N)$ 일 때 이를 안정화시킬 필요충분조건은

- i) 제어기 K 가 G 를 안정화시킨다
- ii) $\left\| \begin{bmatrix} K(I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \\ (I - GK)^{-1}\tilde{M}^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}$

이다.

IV. 제어기 설계

4.1 Glover-Doyle 알고리즘

일반적으로 섭동의 최대한계치의 역수인 γ_{\min} 에 대한 최적의 해를 얻기가 불가능하므로 다음과 같은 반복적인 과정을 거쳐 준최적의 해를 구한다.

준최적 H^∞ 문제는 $\gamma (> \gamma_{\min})$ 에 대해 식(4.1)을 만족하는 안정화 제어기를 찾는 문제이다.

$$\|F_L(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (4.1)$$

불확실성을 가진 시스템의 표준플랜트 P 의 최소 상태공간 표현을 식(4.2)와 같이 가정한다.

$$P^{(p_1, p_2) \times (m_1, m_2)} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

이때 알고리즘전개가 가능하기 위해서는 먼저 표준플랜트가 가정 4.1을 만족해야한다.

가정 4.1

(A1) (A, B_2, C_2) 는 stabilizable하고 detectable하다.

(A2) $\text{rank}(D_{12}) = m_2, \text{rank}(D_{21}) = p_2$

(A3) $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{m_2} \end{bmatrix}; D_{21} = [0 \ I_{p_2}];$ and $D_{11} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} \\ D_{1121} & D_{1122} \end{bmatrix}$

(A4) $D_{22} = 0$

(A5) $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + m_2$ for all $\omega \in \mathbb{R}$

(A6) $\text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + p_2$ for all $\omega \in \mathbb{R}$

가정 4.1을 만족하는 표준플랜트 P 에서 $D_{1\cdot} = [D_{11} \ D_{12}]$, $D_{\cdot 1} = \begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix}$ 이라 두고, R 과 \hat{R} 을 식(4.3)과 (4.4)와 같이 정의한다.

$$R = D_{\cdot 1}^* \cdot D_{1\cdot} \cdot \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\hat{R} = D_{\cdot 1} D_{\cdot 1}^* \cdot \begin{bmatrix} \gamma^2 I_{p_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

해가 존재한다고 가정할 때 두개의 대수 리카티방정식의 해 X_∞, Y_∞ 을 식(4.5)와 (4.6)과 같이 정의한다.

$$X_\infty = \text{Ric} \left[\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ -C_1^* D_{1\cdot} \end{bmatrix} R^{-1} [D_{\cdot 1}^* \ C_1 B^*] \right] \quad (4.5)$$

$$Y_\infty = \text{Ric} \left[\begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_1 B_1^* & -A^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C \\ -B_1 D_{\cdot 1} \end{bmatrix} \hat{R}^{-1} [D_{1\cdot} \ B_1^* C] \right] \quad (4.6)$$

그리고, 상태궤환행렬과 출력궤환행렬을 식(4.7)과 (4.8)과 같이 정의한다.

$$F_I = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_2 \end{bmatrix} = -R^{-1} [D_{\cdot 1}^* \cdot + B^* X_\infty] \quad (4.7)$$

$$H_I = [H_{11} \ H_{12} \ H_2] \\ = -[B_1 D_{\cdot 1}^* \cdot + Y_\infty C^*] \hat{R}^{-1} \quad (4.8)$$

주어진 시스템이 가정 4.1을 만족할 때 $\|F_L(P, K)\|_\infty < \gamma$ 를 만족하는 안정화 제어가 존재할 필요충분조건은

- i) $\gamma > \max \{ \bar{\sigma}[D_{1111} \ D_{1112}], \bar{\sigma}[D_{\cdot 1111} \ D_{\cdot 1121}] \}$
- ii) $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ 을 만족하며 앞에서 정의한 두개의 대수 리카티방정식을 만족하는 $X_\infty \geq 0, Y_\infty \geq 0$ 가 존재한다

이며, 여기서 $\rho(\cdot)$ 는 가장 큰 고유치(largest eigenvalue)이다. 위의 모든 조건을 만족하는 제어기는 주어진 경계치 γ 에 대해 $\|\phi\|_\infty < \gamma$ 인 $\phi \in RH^\infty$ 를 포함하는 LLFT영역 즉, $K = F_L(K_\phi, \phi)$ 로 나타낼 수 있다. 여기서

$$K_\phi = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_{11} & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & \hat{D}_{22} \end{bmatrix} \text{이고, 각각의 변수들은 다음과 같다.}$$

$$\hat{A} = A + H_1 C + \hat{B}_2 \hat{D}_{12}^{-1} \hat{C}_1 \quad (4.9)$$

$$\hat{B}_1 = -H_2 + \hat{B}_2 \hat{D}_{12}^{-1} \hat{D}_{11} \quad (4.10)$$

$$\hat{B}_2 = (B_2 + H_{12}) \hat{D}_{12} \quad (4.11)$$

$$\hat{C}_1 = F_2 Z + \hat{D}_{11} \hat{D}_{21}^{-1} \hat{C}_2 \quad (4.12)$$

$$\hat{C}_2 = -\hat{D}_{21} (C_2 + F_{12}) Z \quad (4.13)$$

$$Z = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (4.14)$$

$$\hat{D}_{11} = -D_{1121} D_{1111}^* (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^*)^{-1} D_{1112} - D_{1122} \quad (4.15)$$

단, $\hat{D}_{12} \in R^{m_2 \times m_2}, \hat{D}_{21} \in R^{p_2 \times p_2}$ 는 임의의 행렬로서 식(4.14)와 식(4.15)를 만족해야 한다.

$$\hat{D}_{12} \hat{D}_{12}^* = I - D_{1121} (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^*)^{-1} D_{1112}^* \quad (4.16)$$

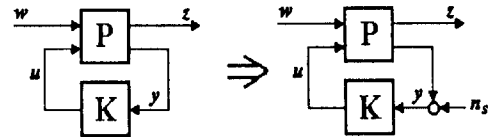
$$\hat{D}_{21}^* \hat{D}_{21} = I - D_{1112} (\gamma^2 I - D_{1111} D_{1111}^*)^{-1} D_{1121} \quad (4.17)$$

그러나, 실제시스템에 있어서는 위 가정들을 만족하지 않는 플랜트가 자주 존재한다. 존재된 가정들을 만족하지 않으면 위 과정들을 통해 우리가 원하는 시스템안정화 제어기를 구할 수 없다. 본 논문에서는 이러한 문제를 해결할 수 있는 방법을 제시한다.

시스템이 출력 승산섭동을 가지는 H^∞ 제어문제에서 표준플랜트의 요소중 P_{12} 또는 P_{21} 이 허수축상에 transmission zero를 가지거나, 공칭플랜트 G 가 진유리함수인 경우에는 Glover-Doyle 알고리즘을 적용하여 우리가 원하는 제어기를 구할 수 없다. 이러한 문제를 해결하기 위해 외부인력인 관측잡음 n_s 를 추가로 고려하여 표준플랜트를 새로이 구성하면 위 가정들을 모두 만족하게 된다.

이러한 방법으로 구성된 새 표준플랜트 \bar{P} 에 의해 구하여진 전실안정화 제어기는 출력 승산섭동의 효과에 대해 $(\gamma > \gamma_{min})$ 의 범위 내에서 전실안정화를 보장할 뿐만 아니라, 출력의외란의 영향을 줄여주는 효과를 가져온다.

그러나, 차수가 증가된 표준플랜트의 영향으로 norm의 경계치는 $\frac{1}{\sqrt{2}} \|M\|_\infty$ 만큼 증가한다.



$$z = [F_I(P, K)] w$$

$$\text{여기서 } P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{z} = [F_I(\bar{P}, K)] \bar{w}$$

$$\text{여기서 } \bar{z} = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}, \bar{w} = \begin{bmatrix} w \\ n_s \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & I \\ P_{21} & I & P_{22} \end{bmatrix}$$

4.2 원래의 문제와 변형된 문제 사이의 norm관계

i) 원래의 문제

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G \\ I & G \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

$$F_L(P, K) = GK(I - GK)^{-1}$$

ii) 변형된 문제

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_{12} \\ 0 & 0 & I \\ P_{21} & I & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & I \\ I & I & G \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$F_L(\bar{P}, K) = \begin{bmatrix} GK(I - GK)^{-1} & GK(I - GK)^{-1} \\ K(I - GK)^{-1} & K(I - GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \|F_L(\bar{P}, K)\|_{\infty} \\ &= \|\bar{P}_{11} + \bar{P}_{12}K(I - \bar{P}_{22}K)^{-1}\bar{P}_{21}\|_{\infty} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} GK(I - GK)^{-1} & GK(I - GK)^{-1} \\ K(I - GK)^{-1} & K(I - GK)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \sqrt{2}I \right\|_{\infty} \\ &= \sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} G \\ I \end{bmatrix} K(I - GK)^{-1} \right\|_{\infty} \\ &= \sqrt{2} \left\| \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} M^{-1}K(I - GK)^{-1} \right\|_{\infty} \\ & \quad (G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}, \text{ : 정규화된 소인수분해}) \\ &= \sqrt{2} \|M^{-1}K(I - GK)^{-1}\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\|GK(I - GK)^{-1}\|_{\infty} = \|NM^{-1}K(I - GK)^{-1}\|_{\infty} \leq \|N\|_{\infty} \|M^{-1}K(I - GK)^{-1}\|_{\infty}$$

$$\therefore \|F_L(P, K)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|N\|_{\infty} \|F_M(\bar{P}, K)\|_{\infty} \quad (4.20)$$

V. 결론

출력 승산섭동을 가지는 시스템에서 공칭플랜트가 진유리할 수이거나, 표준플랜트의 요소들이 허수축상에 transmission zero를 가지는 경우에 표준플랜트를 재구성하여 제어기를 설계하는 알고리즘을 제시하였다. 원래의 문제와 변형된 문제사이의 norm관계를 유도하여 알고리즘의 타당성을 보였다.

계속 연구할 과제는 증가된 플랜트로 인해 발생한 제어기의 차수문제를 해결하기 위한 제어기 차수줄임과 최적화 문제이다.

참고문헌

- [1] B. A. Francis, *A Course in H^{∞} Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [2] D. C. McFarlane and K. Glover, *Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [3] J. C. Doyle, "Synthesis of robust controllers and filters," *Proc. CDC*, San Antonio, TX, pp. 109-114, 1983.
- [4] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis, "State-space solutions to standard H^2 and H^{∞} control problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 8, pp. 831-847, 1989.
- [5] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^{∞} error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, no. 6, pp. 1115-1193, 1984.
- [6] K. Glover and J. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H^{∞} norm bound and relations to risk sensitivity," *Syst. & Contr. Lett.*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [7] M. G. Safonov, E. A. Jonckheere, M. Verma, and D. J. N. Limebeer, "Synthesis of positive real multivariable feedback systems," *Int. J. Contr.*, vol. 45, no. 3, pp. 817-842, 1987.
- [8] J. M. Maciejowski, *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, 1989.
- [9] S. D. O'Young, I. Postlethwaite, and D. W. Gu, "A treatment of $j\omega$ -axis model-matching transformation zeros in the optimal H^2 and H^{∞} control design," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 34, no. 5, pp. 551-553, 1989.
- [10] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, pp. 585-601, 1981.