

# 혼합된 감도함수를 이용한 구조적 특이치의 견실성능문제 분석

° 방경호\*, 엄태호\*\*, 박홍배\*  
 \* 경북대학교 공과대학 전자공학과, \*\* (주) 산업과학기술연구소 제어연구부

## Analysis of Structured Singular Value with Mixed Sensitivity Problem in Robust Performance

° Kyeong Ho Bang\*, Tae Ho Um\*\* and Hong Bae Park\*  
 \* Dept. of Electronics, Kyungpook Nat'l. Univ.  
 \*\* Control Dept., Research Institute of Industrial Science & Technology

**Abstract:** This paper deals with structured singular value and mixed sensitivity problem for robust performance. We derive the sufficient condition that mixed sensitivity problem satisfies structured singular value in robust performance problem. And we show the bound of perturbation between structured singular value and norm of mixed sensitivity functions.

견실성능문제에서 혼합된 감도함수와 구조적 특이치의 관계를 알아본 후 섭동의 한계치의 범위를 구하며 끝으로 5장에서 결론을 내린다.

### 1. 서론

제어이론에서 불확실성을 가지는 폐환시스템의 안정성 보장은 중요한 부분을 차지하고 있다. 고전적 제어기 설계에서는, 위상여유와 이득여유를 견실성의 척도로 두고 불확실성을 가지는 시스템의 안정성문제를 해결하였다. 1981년 Doyle과 Stein[1]은 페루프시스템의 전달함수의 특이치에 의해 불확실성 문제를 다룸으로써 페루프시스템의 안정성을 유지하는 방법을 제시하였다. 또한, 1982년 Doyle 등[2]은 견실한 안정성문제뿐만 아니라 다양한 성능문제를 고려하여 구조적 불확실성 문제를 새로이 제안하였다. 구조적 불확실성은 비구조적 불확실성과는 달리 구조적 특이치 (SSV: structured singular value)를 정의하여  $\mu$ 분석문제로 발전되었으며 1983년 Doyle[4]은 D-K 순환방법을 통한  $\mu$ 분석문제의 해를 구하였으며, 1988년 Milich 등[6]은 D-K 순환방법의 비수렴성을 개선한 CRM(causality recovery methodology)방법을 사용하였다. 그러나  $\mu$ 분석방법은 시스템의 구조적 특이치  $\mu$ 값을 정확하게 구할 수 없고, 수렴성이 보장되지 않으며 많은 양의 계산이 요구되는 단점이 있으므로 견실성능 개선을 위해서 혼합된 감도함수문제가 많이 다루어져 왔다.

본 논문에서는 혼합된 감도함수문제를 풀므로써 구조적 특이치의 견실성능 문제를 동시에 해결할 수 있음을 보이는 충분조건을 제시하였으며 비구조적 섭동의 한계치와 구조적 특이치  $\mu$ 값을 비교하기 위하여 제안된 조건으로부터 섭동의 범위를 구한다.

2장에서는 구조적 특이치의 정의와 일반적인 성질에 대하여 살펴보고 3장에서는 비구조적 불확실성과 구조적 불확실성에 대한 견실안정화 조건 및 견실성능조건을 알아본다. 4장에서는

### 2. 구조적 특이치

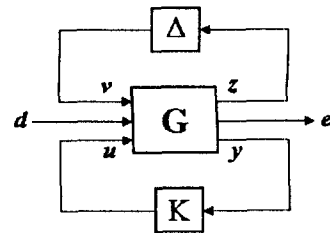


그림 2.1. 일반적인 견실폐환 설계문제에 대한 구조  
 Fig. 2.1. General framework for the robust feedback design problem.

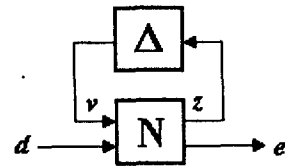


그림 2.2. 분석된 블럭 다이어그램  
 Fig. 2.2. Analyzed block diagram.

그림 2.1은 구조적 특이치를 나타내기 위하여 필요한 기본적인 블럭선도이다. 여기서  $\Delta$ 는 섭동을 나타내며  $v$ 는 명령신호, 교란, 센서 잡음신호등의 외부입력,  $z$ 는 제어될 출력,  $u$ 는 제어 신호,  $y$ 는 관측된 출력을 나타내고  $d$ 와  $e$ 는 각각 성능사양을

나타내는 입력 및 출력신호를 나타내며,  $G$ 는 플랜트,  $K$ 는 제어기이다. 그림 2.1을 다시  $d$ 와  $e$ 사이의 전달함수를 나타내는 선형분수변환(LFT: linear fractional transformation)으로 나타내면 그림 2.2와 같고 그 식은

$$e = F_u(N, \Delta)d = [N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}]d \quad (2.1)$$

이다. 다음은 구조적 특이치를 나타내기 위하여 필요한 몇가지 기호에 대해서 정의한다.

정의 2.1

$\bar{\sigma}$  : 최대 특이치

$\underline{\sigma}$  : 최소 특이치

$\rho$  : 최대 고유치

$\Delta_v$ : 특정한 대각블럭 구조를 갖는 섭동집합

$$\Delta_v = \{\Delta = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m] \mid \bar{\sigma}(\Delta_i) \leq \nu\}$$

$U$ :  $\Delta$ 와 같은 블럭 구조를 가지는 unitary 행렬집합

$D$ :  $D = \text{diag}(d_i I_i)$ 인 양실 행렬집합

정의 2.2

구조적 특이치  $\mu(N)$ 은

$$\mu(N)^{-1} = \min_{\Delta \in \Delta_v} (\bar{\sigma}(\Delta) \mid \det(I + N\Delta) = 0) \quad (2.2)$$

로 나타내고  $\det(I + N\Delta) = 0$  를 만족하는  $\Delta$ 가 없으면  $\mu(N) = 0$ 이다.

정의 2.2의 구조적 특이치  $\mu$ 값은 최적화문제의 해를 구하는 과정에서 정확한 값을 구하기 힘들기 때문에 구조적 특이치  $\mu$ 의 몇가지 성질을 통하여  $\mu$ 의 근사적인 값을 구할 수 있다.

공리 2.1

$$i) \mu(aN) = |a|\mu(N) \quad (2.3)$$

$$ii) \mu(I) = 1 \quad (2.4)$$

$$iii) \mu(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\mu(B) \quad (2.5)$$

$$iv) \Delta \in \Delta_v, U \in U \text{ 이면 } D\Delta D^{-1} = \Delta \quad (2.6)$$

$$v) U \in U \text{ 이면 } \mu(NU) = \mu(UN) = \mu(N) \quad (2.7)$$

$$vi) D \in D \text{ 이면 } \mu(DND^{-1}) = \mu(N) \quad (2.8)$$

$$vii) \max_{U \in U} \rho(UN) \leq \mu(N) \leq \inf_{D \in D} \bar{\sigma}(DND^{-1}) \quad (2.9)$$

### 3. 견실안정화 및 견실성능문제

섭동은 공칭플랜트와 제어기로 구성된 안정한 폐루프시스템을 불안정하게 만들 수 있으므로 견실안정화에서 섭동의 크기와 모델링은 중요한 문제이다. 플랜트의 섭동에는 크게 구조적 섭동과 비구조적 섭동으로 나누며 그림 2.2를 기준으로 각각의 경우에 대한 견실안정화 조건을 구하면 다음과 같다.

정리 3.1 견실안정화 (비구조적 불확실성)

$\bar{\sigma}(\Delta) < 1$ 인 모든 섭동  $\Delta$ 에 대하여 견실안정화될 필요충분조건은

$$\|N_{11}\|_\infty \leq 1 \quad (3.1)$$

이다.

정리 3.2 견실안정화 (구조적 불확실성)

$\Delta \in B\Delta$ 인 모든  $\Delta$ 에 대해서 견실안정화될 필요충분조건은

$$\mu(N_{11}) < 1 \quad (3.2)$$

이고, 여기서  $B\Delta = \{\Delta \in \Delta_v \mid \bar{\sigma}(\Delta) < 1\}$ 이다.

견실안정화뿐만 아니라 주어진 설계사양까지 만족하는 성능문제를 고려한 견실성능문제의 구조적 특이치 조건은 정리 3.3과 같다.

정리 3.3 견실성능

$\Delta \in B\Delta$ 이고  $F_u(N, \Delta)$ 가 안정하고  $\|F_u(N, \Delta)\|_\infty < 1$ 일 필요충분조건은

$$\mu(N) < 1 \quad (3.3)$$

이다.

### 4. 견실성능에서의 혼합된 감도함수와 구조적 특이치

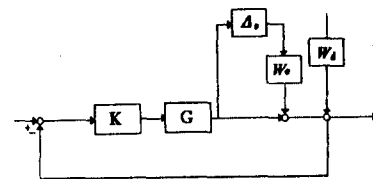


그림 4.1. 출력승산섭동과 성능하중치  $W_d$ 를 가진 시스템  
Fig. 4.1. System with multiplicative output uncertainty and performance weight  $W_d$ .

그림 4.1과 같은 공칭궤환시스템이 내부안정하다고 가정할때 공칭성능조건은  $\|W_d S\|_\infty < 1$ 이고 견실안정화조건은  $\|W_o T\|_\infty < 1$ 이다. 여기서  $S = (I + GK)^{-1}$ ,  $T = GK(I + GK)^{-1}$ 이고  $W_d$ 와  $W_o$ 는 각각 공칭성능과 견실안정문제의 하중함수이다. 이때 공칭성능문제와 견실안정화문제를 동시에 만족시킬 조건은

$$\|\max(|W_d S|, |W_o T|)\|_\infty < 1 \quad (4.1)$$

이고 이를 해결하는 문제가 혼합된 감도함수문제이다. 그러면, 앞에서 언급한 구조적 특이치를 통한 견실성능문제를 알아보자. 성능사양을 나타내는 입력과 섭동의 입력에 대한 각각의 출력을 나타내는 전달함수  $N$ 은

$$N = \begin{bmatrix} GK(I + GK)^{-1}W_o & GK(I + GK)^{-1}W_d \\ (I + GK)^{-1}W_o & (I + GK)^{-1}W_d \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

이고  $\mu(N)$ 값을 구하기 위하여 식(2.2)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} & I + \begin{bmatrix} GK(I + GK)^{-1}W_o & GK(I + GK)^{-1}W_d \\ (I + GK)^{-1}W_o & (I + GK)^{-1}W_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_o & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \\ & I + \begin{bmatrix} GK(I + GK)^{-1}W_o & GK(I + GK)^{-1}W_d \\ (I + GK)^{-1}W_o & (I + GK)^{-1}W_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_o & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} \\ & \rightarrow I + \begin{bmatrix} GK(I + GK)^{-1} \\ (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} [W_{d\Delta_o} \quad W_{d\Delta_p}] \\ & \rightarrow I + [W_{d\Delta_o} \quad W_{d\Delta_p}] \begin{bmatrix} GK(I + GK)^{-1} \\ (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \\ & \rightarrow I + W_{d\Delta_o} GK(I + GK)^{-1} + W_{d\Delta_p} (I + GK)^{-1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

이다.  $\det(I + N\Delta) = 0$  이 되는  $\bar{\sigma}(\Delta)$ 는

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \frac{1}{\bar{\sigma}(W_o GK(I + GK)^{-1}) + \bar{\sigma}(W_d (I + GK)^{-1})} \quad (4.4)$$

이고 구하는 구조적 특이치는

$$\mu(N) \leq \bar{\sigma}(W_o GK(I + GK)^{-1}) + \bar{\sigma}(W_d (I + GK)^{-1}) \quad (4.5)$$

이다.

#### 정리 4.1

견실성능문제의 해결을 위한 혼합된 감도함수문제가 구조적 특이치의 견실성능문제를 만족할 충분조건은

$$\|W_o T\|_\infty \leq 1, \quad \|W_d S(I + \Delta_o W_o T)^{-1}\|_\infty < 1 \quad (4.6)$$

이다.

(증명)

$$\begin{aligned} & \|W_d(I + GK)^{-1}(I + \Delta_o W_o GK(I + GK)^{-1})^{-1}\|_\infty < 1 \\ & \leftarrow \|W_d(I + GK)^{-1}\|_\infty \|(I + \Delta_o W_o GK(I + GK)^{-1})^{-1}\|_\infty < 1 \\ & \leftrightarrow \bar{\sigma}(W_d(I + GK)^{-1}) \bar{\sigma}(I + \Delta_o W_o GK(I + GK)^{-1})^{-1} < 1 \\ & \leftrightarrow \bar{\sigma}(W_d(I + GK)^{-1}) < \underline{\sigma}(I + \Delta_o W_o GK(I + GK)^{-1}) \\ & \leftrightarrow \bar{\sigma}(W_d(I + GK)^{-1}) < 1 - \bar{\sigma}(\Delta_o W_o GK(I + GK)^{-1}) \\ & \leftrightarrow \bar{\sigma}(W_d(I + GK)^{-1}) + \bar{\sigma}(W_o GK(I + GK)^{-1}) < 1 \end{aligned} \quad (4.7)$$

식(4.5)와 식(4.7)로부터

$$\mu(N) \leq \bar{\sigma}(W_o GK(I + GK)^{-1}) + \bar{\sigma}(W_d (I + GK)^{-1}) < 1 \quad (4.8)$$

을 얻을 수 있고 구조적 특이치의 견실성능조건은

$$\mu(N) < 1$$

이므로 혼합된 감도함수문제가 구조적 특이치의 견실성능문제를 만족함을 알 수 있다.

입력측산섭동의 경우에도 정리 4.1이 만족하는 가를 알아보자.

$$N = \begin{bmatrix} K(I + GK)^{-1}GW_I & K(I + GK)^{-1}W_d \\ (I + GK)^{-1}GW_I & (I + GK)^{-1}W_d \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$I + \begin{bmatrix} K(I + GK)^{-1}GW_I & K(I + GK)^{-1}W_d \\ (I + GK)^{-1}GW_I & (I + GK)^{-1}W_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_I & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow I + \begin{bmatrix} K(I + GK)^{-1} \\ (I + GK)^{-1} \end{bmatrix} [GW_I \Delta_I \quad W_{d\Delta_p}]$$

$$\rightarrow I + [GW_I \Delta_I \quad W_{d\Delta_p}] \begin{bmatrix} K(I + GK)^{-1} \\ (I + GK)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow I + GW_I \Delta_I K(I + GK)^{-1} + W_{d\Delta_p} (I + GK)^{-1}$$

$$\rightarrow I + GW_I \Delta_I K(I + GK)^{-1} GG^{-1} + W_{d\Delta_p} (I + GK)^{-1} \quad (4.10)$$

$\det(I + N\Delta) = 0$  이 되는  $\bar{\sigma}(\Delta)$ 는

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \frac{1}{\text{cond}(G) \bar{\sigma}(W_I K(I + GK)^{-1} G) + \bar{\sigma}(W_d (I + GK)^{-1})} \quad (4.11)$$

이고 구하는 특이치  $\mu(N)$ 은

$$\mu(N) \leq \text{cond}(G) \bar{\sigma}(W_I K(I+GK)^{-1}G) + \bar{\sigma}(W_d(I+GK)^{-1}) \quad (4.12)$$

이며 여기서  $\text{cond}(G)$ 는

$$\text{cond}(G) = \frac{\bar{\sigma}(G)}{\underline{\sigma}(G)}$$

이다. 식(4.6)에서

$$\begin{aligned} & \|W_d(I+GK)^{-1}(I+\Delta_o W_o G K(I+GK)^{-1})^{-1}\|_{\infty} < 1 \\ \leftarrow & \|W_d(I+GK)^{-1}\|_{\infty} \|(I+\Delta_o W_o G K(I+GK)^{-1})^{-1}\|_{\infty} < 1 \\ \leftrightarrow & \|W_d(I+GK)^{-1}\|_{\infty} \|(I+W_I G \Delta_I G^{-1} G K(I+GK)^{-1})^{-1}\|_{\infty} < 1 \\ \leftrightarrow & \bar{\sigma}(W_d(I+GK)^{-1}) < \underline{\sigma}(I+W_I G \Delta_I K(I+GK)^{-1} G G^{-1}) \\ \leftrightarrow & \bar{\sigma}(W_d(I+GK)^{-1}) + \bar{\sigma}(G) \bar{\sigma}(G^{-1}) \bar{\sigma}(W_I K(I+GK)^{-1} G) < 1 \\ \leftrightarrow & \bar{\sigma}(W_d(I+GK)^{-1}) + \text{cond}(G) \bar{\sigma}(W_I K(I+GK)^{-1} G) < 1 \end{aligned} \quad (4.13)$$

이고 식(4.12)와 식(4.13)으로부터

$$\mu(N) \leq \text{cond}(G) \bar{\sigma}(W_I K(I+GK)^{-1}G) + \bar{\sigma}(W_d(I+GK)^{-1}) < 1 \quad (4.14)$$

을 얻을 수 있으므로 정리 4.1이 만족함을 알 수 있다. 다음은 비구조적 섭동의 한계치와 구조적 특이치  $\mu$ 값을 비교하기 위하여 정리 4.1로부터 섭동의 한계치의 범위를 알아보자.

식(4.7)에서  $\bar{\sigma}(W_o G K(I+GK)^{-1})$ 는 출력승산섭동에 대한 견실성을 나타내는 지수  $\gamma$ 로 나타낼 수 있고 섭동의 한계치  $\varepsilon$ 은  $\gamma^{-1}$ 와 같다. 감도함수  $W_o S$ 의 크기를

$$\bar{\sigma}(W_o(I+GK)^{-1}) = \alpha \quad (\alpha < \mu(N) < 1) \quad (4.15)$$

라고 정의하면 구조적 특이치에 대한 섭동의 한계치의 범위는 식(4.8)로부터

$$\frac{1}{1-\alpha} < \varepsilon \leq \frac{1}{\mu(N)-\alpha} \quad (4.16)$$

를 얻을 수 있다.

## 5. 결론

본 논문에서는 견실성문제에 있어서 혼합된 감도함수와 구조적 특이치와의 관련성에 대하여 알아보았다. 승산섭동을 가지는 시스템에 대하여 혼합된 감도함수문제를 풀므로써 구조적 특이치에 대한 견실성문제도 만족할 수 있음을 보이기 위하여 구조적 특이치의 성질과 공칭성능 및 견실안정조건을 이용하여 충분조건을 유도하였고 이로 부터 견실안정도의 여유를 나타낼 수 있는 섭동의 한계치의 범위를 구하였다. 앞으로 연구되어야 할 과제는 성능문제에서 혼합된 감도함수문제와 구조적 특이치의 필요충분조건을 유도하는 것이다.

## 참고문헌

- [1] J. C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. AC-26, pp. 4-16, Feb. 1981.
- [2] J. C. Doyle, J. E. Wall, and G. Stein, "Performance and robustness analysis for structured uncertainty," *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Orlando, FL, pp. 629-636, 1982.
- [3] J. C. Doyle, "Analysis of feedback systems with structured uncertainties," *IEE Proceedings*, vol. 129, part D, no. 6, pp. 242-250, Nov. 1982.
- [4] J. C. Doyle, "Synthesis of robust controllers and filters," *IEEE Conf. on Decision and Control*, San Antonio, TX, pp. 109-114, 1983.
- [5] J. C. Doyle, "Structured uncertainty in control system design," *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Fort Lauderdale, FL, pp. 260-265, 1985.
- [6] D. A. Milich, M. Athans, L. Valavani, and G. Stein, "A method for designing robust multivariable feedback systems," *IEEE Conf. on Decision and Control*, vol. 3, pp. 2150-2156, Dec. 1988.
- [7] E. J. M. Geddes and I. Postlethwaite, "An  $H^{\infty}$  based loop shaping method and  $\mu$ -synthesis," *IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 533-538, Dec. 1991.
- [8] A. Packard and P. Pandey, "Continuity properties of the real/complex structured singular value," *IEEE Trans. Auto. Control*, vol. AC-38, pp. 415-428, March 1993.