

# H<sup>∞</sup> 최적제어기의 이산화 구현

\* 김광우, 오도창, 박홍배  
 경북대학교 공과대학 전자공학과

## Deigital Implementation of H<sup>∞</sup> Optimal Controller

\* Kwang Woo Kim, Do Chang Oh, and Hong Bae Park  
 Department of Electronics, Kyungpook National University

Abstract: In this paper we proposed the digital implementation of an H<sup>∞</sup>-optimal controller using lifting technique and H<sup>∞</sup>-control theory. The discrete controller is obtained through iterative adjustment of sampling time and weighting function, which can be performed by computing the L<sub>2</sub>-induced input to output norm of the sampled-data system with bandlimited exogenous input. The resulting sampled-data system is stable and the performance including inter-sampling behaviour of the hybrid system can be also optimized.

### I. 서론

일반적으로 연속제어기 대신 이산제어기를 설계하는 이유는, 이산제어기의 차수가 높다고 할지라도 어느 정도의 하드웨어만으로 구현이 가능하며, 집적화가 가능하므로 연속제어기보다 신뢰성이 크며, 적응제어기와 같은 비선형제어기의 구현이 가능하고, 시변시스템이 되므로 우수한 성능효과를 기대할 수 있는 등 여러가지 장점이 있다.

주어진 플랜트에 대해 설계사양을 만족하는 이산제어기를 설계하는 방법은 크게 세가지로 나눌 수 있다. 첫째, 먼저 연속제어기를 설계한 후 이산제어기를 구하는 방법이다. 이는 가장 널리 이용되는 방법이나 연속제어기의 성능을 유지하기 위해서는 샘플링주파수가 상당히 높아야만 하는 단점이 있다. 둘째, 플랜트를 이산화한 후 이산제어기를 설계하는 방법이다. 이는 이산시간에서 시불변시스템이 되므로 해석이 용이하나 샘플링주기 사이의 동작이 무시되고, 연속시간에서의 성능규격이 이산시간에서의 성능규격으로 쉽게 옮겨지지 않으므로 이산화하는데 문제점이 있다. 셋째, 연속시간에서 직접 이산제어기를 설계하는 방법이다. 이는 가장 실체적인 접근방법이나 이산제어기가 시변시스템이 되어 해석이 용이하지 않는 단점이 있다.

Tabak[14]은 Tustin/bilinear 변환을 이용하여 연속제어기를 이산제어기로 변환시켰다. 이 방법은 상대적으로 쉬우나 좋은 근사화를 얻기 위해서는 샘플링주파수가 연속시스템의 가장 높은

주파수보다 매우 높아야 한다. Rattan 등[12]은 연속시스템의 주파수응답과 이산시스템의 주파수응답 일치시킴으로서 이산제어기를 구하는 방법을 제시하였고, Keller 등[9]은 H<sup>∞</sup> 이론과 small gain 정리를 사용하여 연속제어기의 이산화에 대한 새로운 방법을 제시하였다.

본 논문에서는 H<sup>∞</sup> 최적제어기의 이산화 구현에 목적이 있다. 표본화된 데이터시스템(sampled-data system)에서 감도함수의 H<sup>∞</sup>-norm과, 연속시간시스템에서 감도함수의 H<sup>∞</sup>-norm을 비교한 후 샘플링주기와 하중함수의 재조정을 통하여 연속제어기의 특성에 보다 가까운 이산제어기를 설계한다. 즉 원래의 연속시간시스템에 나타난 외란제거(disturbance rejection)효과를 표본화된 데이터시스템에서도 같은 외란제거효과 및 성능을 나타내는 이산제어기를 구한다.

### II. 수학적 배경 및 예비지식

#### Lebesgue space(L<sub>p</sub>-space)

L<sub>p</sub>-space는 다음 식을 만족하는 함수 f: [0, ∞) → R<sup>n</sup> 들로 구성된 공간이다.

$$\|f\|_p = \left( \int_0^\infty \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \quad (2.1)$$

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_t \|f(t)\| < \infty, \quad p = \infty$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는

$$\|f(t)\| = \begin{cases} \left( \sum_{i=0}^n |f_i(t)|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i \in \{0, \dots, n\}} |f_i(t)|, & p = \infty \end{cases} \quad (2.2)$$

와 같이 정의된 R<sup>n</sup> 상에서의 벡터 norm 이다.

#### 선형분수변환(LFT: linear fractional transformation)

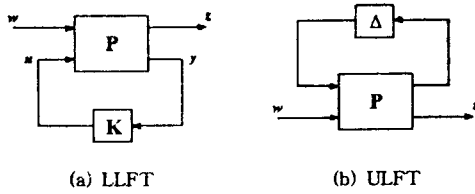
선형분수변환은 H<sup>∞</sup> 최적화 문제에 자주 등장한다. 이는 폐환 시스템의 다양한 구조를 표준화하는 도구로서 LLFT(lower LFT)와 ULFT(upper LFT)가 있다.

i) LLFT(그림 2.1(a))

$$F_l \left( \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, K \right) \equiv P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} \quad (2.3)$$

ii) ULFT(그림 2.1(b))

$$F_l \left( \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \Delta \right) \equiv P_{22} + P_{21} \Delta (I - P_{11} \Delta)^{-1} P_{21} \quad (2.4)$$



(a) LLFT (b) ULFT  
그림 2.1 Lower and upper 선형분수변환

Fig. 2.1 Lower and upper linear fractional transformation.

LLFT가  $H^\infty$  최적화 문제에 사용되며 ULFT는 불확실성을 가진 시스템을 묘사하는데 주로 사용된다.

### Hold-input 이산화

그림 2.2와 같은 시스템을 고려해 보자.

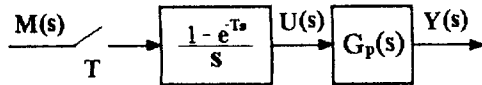


그림 2.2 표본화된 데이터시스템  
Fig. 2.2 Sample-data system.

표본화된 데이터시스템의 연속시간부분이

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

와 같은 상태공간표현을 가진다고 가정하면 이 방정식

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

가 되며, 여기서  $t_0$ 는 초기시간이다.

이산시간 모델을 구하기 위해 식(2.6)에  $t = kT + T$ 와  $t_0 = kT$ 를 대입하고,  $u(t)$ 가 zero-order hold의 출력이 되므로

$$\begin{aligned} x(kT+T) &= e^{AT} x(kT) + m(kT) \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} B d\tau \\ &= e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\tau} d\tau B m(kT) \end{aligned} \quad (2.7)$$

가 되며, 여기서  $T$ 는 샘플링 주기이다.

식(2.5)의 출력방정식에  $t = kT$ 를 대입해 풀면

$$y(kT) = Cx(kT) + Dm(kT) \quad (2.8)$$

가 된다. 따라서, 그림 2.2의 시스템의 이산 상태공간표현은

$$\begin{aligned} x(kT+T) &= e^{AT} x(kT) + \int_0^T e^{A\tau} d\tau B m(kT) \\ y(kT) &= Cx(kT) + Dm(kT) \end{aligned} \quad (2.9)$$

가 된다.

식(2.9)는 어떤 근사화도 포함되어 있지 않으며, 샘플링 순간 사이에서 제어신호가 일정한 상수가 되므로 샘플링 순간에 시스템의 상태변수와 출력이 정확한 값을 제공한다.

### Lifting technique

Lifting은 주기적인 연속시간시스템을 시불변 이산시간시스템으로 또는 주기적인 이산시간시스템을 시불변 이산시간시스템으로 바꾸어 주는 연산자이다. 자세한 내용은 참고문헌 [1, 2, 7, 11]에 있으며, 여기서는 lifting연산자의 특성과 본 논문에서 필요한 lifting된 시스템의 상태공간표현에 대해 간략히 설명하기로 한다.

Lifting연산자는 선형이고, 전단사함수이며, isometry의 성질을 가진다. 따라서 lifting연산을 행한 시스템의 norm은 변하지 않으며, 원래 시스템의 대수연산들도 그대로 유지되므로 시스템의 안정성도 변하지 않는다. 그리고 지연 연산자(delay operator)와 이동 연산자(shift operator)사이에 intertwine성질[2]을 가지므로 주기적인 시스템이 시불변시스템으로 바뀌어진다.

다음과 같은 전달함수를 고려해보자.

$$G(z_s) = D + C(z_s I - A)^{-1} B \quad (2.10)$$

$N\tau_s = \tau_i$ 인  $\tau_i$ 의 함수로 바꾸기 위해서 lifting연산자를 취하게 되면, 입력블럭 속으로  $N$ 개의 연속적인 입력이 들어가고 출력에서도  $N$ 개의 연속적인 출력이 나오는 것으로 생각할 수 있다. 따라서, 이들 입력과 출력블럭은 길이  $N$ 의 벡터가 되고, 상태공간표현은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x[(k+1)N\tau_s] &= A^N x(kN\tau_s) \\ &+ [A^{N-1}B \quad A^{N-2}B \quad \dots \quad B] \begin{bmatrix} u(kN\tau_s) \\ u[(kN+1)\tau_s] \\ \vdots \\ u[(kN+N-1)\tau_s] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y(kN\tau_s) \\ y[(kN+1)\tau_s] \\ y[(kN+2)\tau_s] \\ \vdots \\ y[(kN+N-1)\tau_s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} x(kN\tau_s) \quad (2.11)$$

$$+ \begin{bmatrix} D & 0 & \dots \\ CB & D & \dots \\ CAB & CB & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N-2}B & CA^{N-3}B & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(kN\tau_s) \\ u[(kN+1)\tau_s] \\ u[(kN+2)\tau_s] \\ \vdots \\ u[(kN+N-1)\tau_s] \end{bmatrix}$$

따라서,  $C(z_s)$ 는 변수  $z_s$ 를 가지는 전달함수

$$G(z_s) = D + \tilde{C}(z_s I - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \quad (2.12)$$

로 변경된다. 여기서,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}$  및  $D$ 는 식(2.11)에 나타나는 행렬들이다.

### III. 연속제어기의 이산화

이 장에서는 Keller 등[8]이 제시한 연속제어기의 이산화 방법을 소개한다.

$P(s)$ 는 플랜트 전달함수,  $C(s)$ 는 이미 알고있는 연속제어기,  $C_i(z_i)$ 는 샘플링 주기가  $\tau_i$ 인 구해야될 이산제어기이고,  $H(s)$ 는 zero-order hold라고 두면 그림 3.1과 같은 블록선도를 구성할 수 있고,

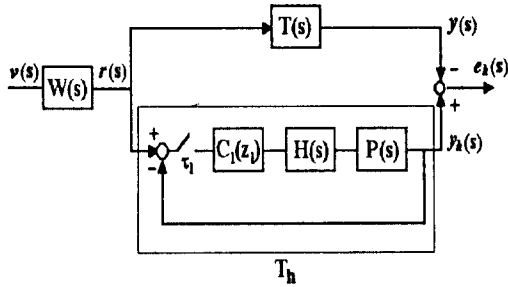


그림 3.1  $J_h$ 의 표현

Fig. 3.1 Representation of  $J_h$ .

여기서,  $T(s) = PC(I + PC)^{-1}$ ,  $T_h$ 는  $T(s)$ 에 대응되는 표본화된 데이터시스템의 연산자,  $W(s)$ 는 기준신호  $r(s)$ 를 형성하는 안정 진유리함수이다.

성능기준을

$$J_h \equiv (T_h - T)W \quad (3.1)$$

와 같이 두면 이산제어기  $C_i$ 은 식(3.2)에 의해 구할 수 있다.

$$C_i = \min_{C_i \in \Gamma_h} \|J_h\| \quad (3.2)$$

여기서,  $\|\cdot\|$ :  $L_2$ -induced norm

$\Gamma_h$ :  $T_h$ 를 안정화하는 제어기의 집합이다.

식(3.1)의  $\|J_h\|$ 을 유한하게 하기 위해서  $W(s)$ 는 안정 진유리함수이어야 하며, 입력  $v(s)$ 에 대한 anti-aliasing filter, 또는  $T_h - T$ 의 근사화에 대한 하중함수로 선택되어진다.

식(3.2)는 전달함수로 표현되지 않는 연산자  $T_h$ 를 포함하고 있으므로 해를 구하기가 용이하지 않다. 따라서  $J_h$ 를 다루기 쉬운 문제로 바꾸기 위해 먼저  $T(s)$ ,  $T_h$  및  $W(s)$ 를 임의의 작은 샘플링주기  $\tau_s$ 로 hold-input 이산화를 행한다. 여기서,  $\tau_i$ 은  $\tau_s$ 의 정수배가 된다. 즉,

$$N\tau_s = \tau_i \text{ 또는 } \tau_s = \tau_i/N \quad (3.3)$$

Hold-input 이산화를 행한 시스템은 두개의 다른 시간변수 ( $\tau_s, \tau_i$ )를 가지기 때문에 표기법을 명확히 해야할 필요가 있다. 첨자 's', 'i' 및 'h'를 시간변수  $k\tau_s, k\tau_i$  및 표본화된 데이터시스템을 표현하는 것으로 각각 사용하면 변경된 성능 기준  $J_{hs}$ , 즉 식(3.1)의 hold-input 이산화는

$$J_{hs} \equiv (T_{hs} - T_s(z_s))W_s(z_s), \quad z_s = e^{s\tau_s} \quad (3.4)$$

가 된다. Keller 등[9]에 의하면 만약  $\|J_h\|$ 이 유한하면  $\tau_s$ 가 0

으로 감에 따라  $\|J_{hs}\|$ 은  $\|J_h\|$ 으로 수렴한다.  $T_s(z_s)$ 와  $W_s(z_s)$ 는 계산이 용이하나 반면에  $T_{hs}$ 는 그렇지 않다. 연산자  $T_h : y_h = T_h r$ 는

$$y_h(s) = PH(s)C_i(z_i)(I + P_i(z_i)C_i(z_i))^{-1}r_1^*(s) \quad (3.5)$$

가 되며, 여기서  $r_1^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r(s - jk\omega_i)$ ,  $\omega_i = 2\pi/\tau_i$

$$P_i(z_i) : P(s) \text{의 hold-input 이산화} \quad (3.6)$$

이다. 그리고

$$u_i(z_i) \equiv C_i(I + P_i C_i)^{-1}r_1^*(s) \quad (3.7)$$

로 둔다면  $u_i(z_i)$ 은  $\omega_s$ 주기(또는  $\omega_i$ 주기)를 가지므로

$$y_{hs}(z_s) = (PH)_s^*(s)u_s^*(z_i) = (PH)_s^*(s)u_i(z_i) \\ = (PH)_s(k, z_s)u_i(z_i), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

가 된다. 결국  $T_h$ 의 hold-input 이산화는  $N$ 주기를 가지는 시스템이 되고,  $N$ 주기적인 시스템은 lifting에 의해서 변수  $z_i$ 로 표현되는 시불변전달함수로 변경된다. lifting 연산자는 isometry 이기 때문에  $\|J_{hs}\|$ 은 변하지 않는다. lifting된 샘플러의 행렬  $\tilde{S}$ 와 zero-order-hold  $\tilde{H}$ 는 각각 길이  $N$ 을 가지는 행벡터, 열벡터가 된다. 즉

$$\tilde{S} = [1 \ 0 \ \dots \ 0], \quad \tilde{H} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (3.9)$$

(다변수인 경우에 1은 단위행렬로 0는 영행렬로 바꾸면 된다.)

변경된 성능기준  $J_{hs}$ , 즉 식(3.4)를 lifting하면

$$J = (PHC_i(I + SPHC_i)^{-1}\tilde{S} - T)W \quad (3.10)$$

가 되고, 식(3.10)은 변수  $z_i$ 로 표현되는 전달함수이다. 따라서

$J$ 는 선형분수변환으로 표현가능하다.

$$J = F_l(G, C_i) \quad (3.11) \\ G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -TW & PH \\ \tilde{S}W & -SPH \end{bmatrix}$$

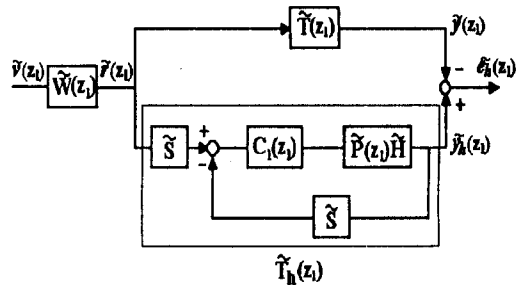


그림 3.2 Lifting된 전달함수로 표현된 시스템

Fig. 3.2 System with lifted transfer functions.

만약 식(3.11)에 있는  $G$ 가  $G_{22}$ 의 입력과 출력으로 안정화 가능하면, 그림 3.2에 있는 시스템은 안정화가능(stabilizable)이다(Francis[4]).  $\tilde{T}$ 와  $W$ 가 안정하다고 가정했으므로  $\tilde{S}PH$ 가

안정화가능하고 관측가능(detactable)하면, 시스템은 안정화가능이다. 따라서, 그림 3.2에 있는 시스템을 안정화시키는 제어기의 집합은  $SPH$ 를 안정화시키는 집합이다.

$\|J_{\infty}\| = \|f\| = \|f\|_{\infty}$ 이고,  $r_1$ 을 식(3.6)의 이산시간 폴렌트  $P_1(z_1)$ 을 안정화시키는 제어기의 집합이라 두면, 제어기  $C_1$ 은 어떤 적당한 큰  $N$ 에 대해서 다음의 표준  $H^{\infty}$  최소화 문제의 해를 찾음으로써 구할 수 있다.

$$C_1 = \min_{C_1 \in r_1} \|f\| \quad (3.12)$$

만약 그림 3.1에 있는 시스템이 점근적으로 안정하고  $W(s)$ 가 안정 진유리함수이면, 이 시스템은  $L_2$ 안정이다(Chen 등[3]). 식(3.10-11)의 해는 항상 점근적으로 안정한 시스템을 이끌어낸다(Francis 등[5]). 식(3.12)의 해는 bilinear변환과 Glover 등[6]이 제시한 알고리즘을 이용하여 구할 수 있다.

#### IV. 최적 제어기의 이산화 구현

이 장에서는 표본화된 데이터시스템의 norm 계산방법 및 샘플링주기  $\tau_1$ 과 하중함수  $W(s)$ 를 조정하여 연속제어기의 복성에 보다 가까운 이산제어기를 설계하는 과정을 제시한다.

##### 4.1 Sampled-data 시스템의 norm 계산법

먼저, 다음과 같이  $\beta > 0$ 에 의해 대역폭이 제한된 신호공간

$$E \equiv \{f: f \in L_2 \cap X, f(s) \in (-\beta, \beta)\} \quad (4.1)$$

를 정의한다. 여기서,  $f(s)$ 는 전달함수이고,  $X$ 는  $R \rightarrow C^n$ 인 연속함수의 공간이다.

그림 4.1의 표준 표본화된 데이터시스템의 블록선도를 고려하자. 여기서,  $G$ 는 일반화된 연속시간 폴렌트,  $C_1$ 는 이산 제어기,  $w$ 는 외부입력,  $u$ 는 제어신호,  $z$ 는 제어될 출력,  $y$ 는 관측된 출력,  $S$ 는 샘플러,  $H$ 는 zero-order hold이다.

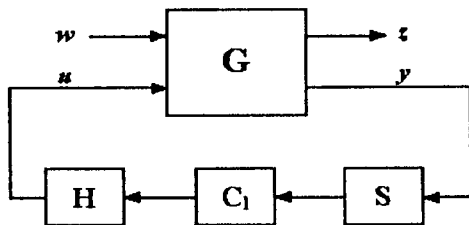


그림 4.1 표준 표본화된 데이터시스템  
Fig. 4.1 Standard sampled-data system.

이 시스템은  $S$ 와  $H$ 가 존재하므로 시변시스템이 되고,  $L_2$ 공간상에서  $HS$ 의 유한성이 보장되지 않기 때문에 입력  $w$ 를 앞에서 정의한 신호공간  $E$ 로 제한시킨다. 또한 외란 대역폭  $\beta$ 는 Nyquist주파수보다 작고, 페루프시스템이 안정하다고 가정하면

페루프연산자  $\psi: w \rightarrow z (E \rightarrow L_2)$ 의 norm은 다음과 같은 전계를 통하여 계산되어진다.

그림 4.1의 시스템을 다음 그림과 같이 재구성하고,

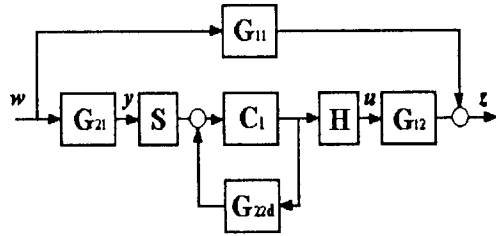


그림 4.2 재구성된 표준 표본화된 데이터시스템  
Fig. 4.2 Reconstructed standard sampled-data system.

$$q \equiv C_1(I - G_{22d}C_1)^{-1}$$

$$G_{22d} \equiv SG_{22}H(\text{hold-input 이산화}) \quad (4.2)$$

로 두면 다음 정리가 성립한다.

##### 정리 4.1 (Norm formula) [10]

Hermitian 행렬  $m$ 을

$$m(j\omega) \equiv G_{11}^*G_{11} + G_{21}^*L(f^*f)G_{21} + G_{11}^*fG_{21} + G_{21}^*f^*G_{11} \quad (4.3)$$

라 두고,  $\beta \leq \omega_n$ (Nyquist주파수),  $\omega_i$ 는 샘플링주파수로 두면 페루프연산자  $\psi$ 의 norm은 다음과 같이 된다.

$$\|\psi\|^2 = \max \{ \sigma_{\max} [m(j\omega)] : \omega \in [-\beta, \beta] \} \quad (4.4)$$

여기서,  $\sigma_{\max}(\cdot)$ : 최대 특이치(largest singular value)

$$f(j\omega) \equiv G_{12}(j\omega)r(j\omega)q(e^{-j\omega\tau_1})$$

$$r(s) \equiv \frac{1 - e^{-s\tau_1}}{s\tau_1} \quad (4.5)$$

$$(Lg)(j\omega) \equiv \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(j\omega + jk\omega_1), & \omega \in [-\omega_n, \omega_n] \\ 0 & \omega \notin [-\omega_n, \omega_n] \end{cases}$$

식(4.3)의  $L(f^*f)$ 의 closed form을 구하기 위해서 다음의 전계 과정이 필요하다.

식(4.2)의 함수  $q$ 가  $\omega$ (또는  $\omega_1$ )의 주기를 가지는 함수이므로

$$L(f^*f) = L(q^*G_{12}^*r^*rG_{12}q) = q^*L(G_{12}^*r^*rG_{12})q \quad (4.6)$$

$$= q^*L(|r|^2G_{12}^*G_{12})q$$

가 된다.

##### 정리 4.2 [10]

전달함수  $g$ 의 최소상태공간표현을  $[A, B, C, D]$ 라 하고, 방정식

$$A^*L_o + L_oA = C^*C \quad (4.7)$$

을 만족하는 해  $L_o$ 가 존재한다고 가정하면

$$L(|r|^2g^*g) = (CA^{-1}B)^*CA^{-1}B + D^*D - (CA^{-1}B)^*D - D^*(CA^{-1}B) + n + n^* \quad (4.8)$$

가 된다. 여기서

$$n(j\omega) \equiv -j \frac{2}{\tau_1} (-B^* L_0 + D^* C) A^{-2} \times \left[ \cot\left(\frac{\omega \tau_1}{2}\right) I + \cot\left(\frac{j\tau_1 A}{2}\right) \right]^{-1} B \quad (4.9)$$

이다.

#### 4.2 설계과정

1. 먼저 샘플링주기  $\tau_1$ 과 하중함수  $W(s)$ 를 적당히 선택한다. 주어진 연속시스템의 페루프 주파수특성을 구한 후 샘플링 정리를 바탕으로  $\tau_1$ 과  $W(s)$ 를 선택할 수 있다.

2. 3장에서 제시한 연속제어기의 이산화 과정을 통하여 이산제어기를 구한다. 이 이산제어기는 성능기준으로 보조감도함수 (complementary sensitivity function)가 바탕이 되어 구한 것이므로 표본화된 데이터시스템의 성능과 연속시스템의 성능은 거의 유사하게 된다.

3. 4.1절에서 제시된 표본화된 데이터시스템의 norm 계산법을 통해 과정 2에서 구한 이산제어기로 페루프연산자  $\psi$ 의 norm을 구한다.

4. 원래 주어진 연속시스템의 norm과 표본화된 데이터시스템의 norm을 비교한 후 샘플링주기  $\tau_1$ 과 하중함수  $W(s)$ 를 재조정하여 과정 2로 되돌아 간다. 외란제거효과의 기준인 감도함수에 있어서 연속시스템의 norm과 표본화된 데이터시스템의 norm은 샘플링주기가 짧을수록 그 값의 차이가 적음을 알 수 있다.

## V. 예 제

그림 5.1과 같이 주어진 연속시간 SISO 플랜트와 제어기를 생각해 보자.

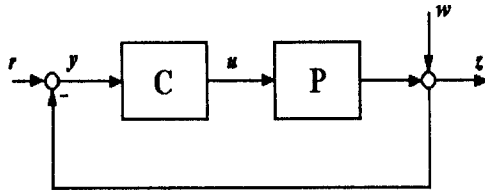


그림 5.1 연속시간 SISO 플랜트와 제어기

Fig. 5.1 Continuous time SISO plant and controller.

여기서, 플랜트와 제어기의 전달함수는 다음과 같이 주어지고

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2+7s+25}, \quad C(s) = 20 \frac{s^2+7s+25}{s(s+1)} \quad (5.1)$$

이 시스템이 동작하는 대역폭  $\beta$ 는 1 rad/sec 로 가정한다.

그러면, 연속시간에서 외란( $w$ )으로부터 출력( $z$ )까지의 전달함수, 즉 감도함수는

$$G(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} = \frac{s}{s+20} \quad (5.2)$$

이 되고, 그림 5.2에 보이는 바와 같이

$$\|G_{\infty}\|_{\infty} = \sup_{\omega \leq \beta} |G_{\infty}(j\omega)| = 0.0499 \quad (5.3)$$

가 된다.

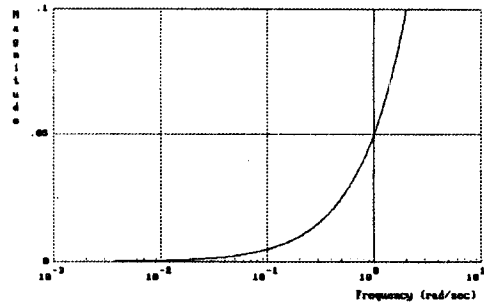


그림 5.2 동작 대역폭상에서의 감도함수

Fig. 5.2 Sensitivity function over operating band.

4.2절의 설계과정을 통하여 구한 이산제어기는

$$C_1(z) = \frac{19.5349z^4 - 25.8579z^3 - 12.3754z^2 + 25.9638z - 7.2082}{z^4 - 1.7307z^3 + 0.3992z^2 + 0.4058z - 0.0743} \quad (5.4)$$

이고, 이때의 샘플링주기  $\tau_1$ 은 0.01sec, 하중함수  $W(s)$ 는

$$\frac{1}{s+1}, \quad \text{페루프연산자 norm } \|\psi_{\infty}\| \text{은 } 0.0514 \text{이다.}$$

그림 5.3은 연속시간시스템과 표본화된 데이터시스템의 시간 응답을 보여준다.

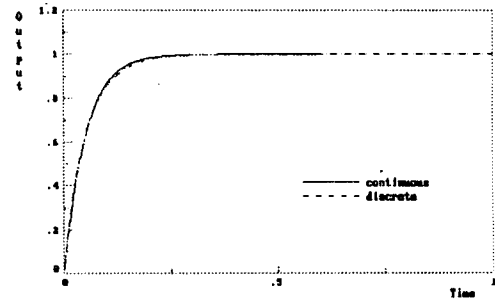


그림 5.3 연속시간시스템과 표본화된 데이터시스템의 시간응답

Fig. 5.3 Time response of continuous-time and sampled-data system.

## VI. 결 론

본 논문에서는 연속제어기를 이산제어기로 바꾸는 문제에 있어서 외란제거효과를 고려한 제어기 이산화 알고리즘을 제시하였다. 즉 감도함수의  $H^{\infty}$ -norm을 최소화하는 문제를 통하여 구현된 연속제어기를 이산화하는데 있어서 샘플링주기  $\tau_1$ 과 하중함수  $W(s)$ 를 반복적으로 조정함으로써 표본화된 데이터시스템의 감도함수  $H^{\infty}$ -norm과 성능이 연속시간시스템의 그것과

거의 유사한 이산제어기를 구하였다. 또한 이 이산제어기는 표본화된 테이타시스템의 폐루프안정성을 보장하며, 샘플링주기사이의 동작도 고려되었다. 앞으로의 연구과제는 시간지연을 가지는 시스템에 대한 제어기 이산화 문제가 있다.

### 참고문헌

- [1] B. A. Bamieh, J. B. Pearson, B. A. Francis, and A. Tannenbaum, "A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control," *Syst. & Contr. Lett.*, vol. 17, pp. 79-88, 1991.
- [2] B. A. Bamieh and J. B. Pearson, "A general framework for linear periodic systems with applications to  $H^\infty$  sampled-data control," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 4, pp. 418-435, 1992.
- [3] T. Chen and B. A. Francis, "Input-output stability of sampled-data systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 1, pp. 50-58, 1991.
- [4] B. A. Francis, *A Course in  $H^\infty$ -Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [5] B. A. Francis and T. T. Georgiou, "Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 33, no. 9, pp. 820-832, 1988.
- [6] K. Glover and J. Doyle, "State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy and  $H^\infty$  norm bound and relations to risk sensitivity," *Syst. & Contr. Lett.*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [7] P. P. Khargonekar, K. Poolla, and A. Tannenbaum, "Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, no. 11, pp. 1088-1096, 1985.
- [8] J. P. Keller and B. D. O. Anderson, " $H^\infty$ -optimal controller discretization," *Int. J. of Robust & Nonlinear Contr.*, vol. 1, pp. 125-137, 1991.
- [9] J. P. Keller and B. D. O. Anderson, "A new approach to the discretization of continuous-time controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 2, pp. 214-223, 1992.
- [10] G. M. H. Leung, T. P. Perry, and B. A. Francis, "Performance analysis of sampled-data control system," *Automatica*, vol. 27, no. 4, pp. 699-704, 1991.
- [11] B. Sz.-Nagy and C. Foias, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, New York: American Elsevier, 1970.
- [12] K. S. Rattan and H. H. Yeh, "Discretizing continuous -data control systems," *Comput.-Aided Des.*, vol. 10, pp. 299-306, 1978.
- [13] K. S. Rattan, "Digitalization of existing continuous control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 29, no. 3, pp. 282-285, 1984.
- [14] D. Tabak, "Digitalization of control systems," *Comput.-Aided Des.*, vol. 3, no. 2, pp. 13-18, 1971.
- [15] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformation, multiplicative seminorms, and approximate inverses," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, 1981.