'93 한국자동제어학술회의논문집 (1993.10.20~22)

가변 스텝 크기를 갖는 LMS 알고리즘

°김관준*, 이철희*, 남현도**
*강원대학교 전기공학과, **단국대학교 전기공학과

A LMS Algorithm with Variable Step Size

°Goun-Jun Kim*, Chul-Heui Lee*, Hyun-Do Nam**
*Dept. of Elec. Eng., Kangwon National University
**Dept. of Elec. Eng., Dankook University

ABSTRACT

In this paper, a new LMS algorithm with a variable step size (VVS LMS) is presented. The change of step size μ at each iteration, which increases or decreases according to the misadaptation degree, is computed by a propotional fuzzy logic controller. As a result the algorithm has very good convergence speed and low steady-state misadjustment. The norm of the cross correlation between the estimation error and input signal is used. As a measure of the misadaptation degree

Simulation results are presented to compare the performance of the VSS LMS algorithm with the normalized LMS algorithm.

1. 서 론

LMS(Least Mean Squares) 알고리즘은 그 구조가 간단하고 구현이 용이하며 강인한 동작 특성을 지니므로 적응 신호처리 등에서 가장 널리 사용되고 있으나, 수렴 특성이 느릴 뿐만 아니라 데이타에 종속적인 경향을 보이는 단점이 있다.[1] LMS의 수렴특성은 스텝크기와 밀접하게 관련되어 있으므로 이의 적절한 선정을 통하여 수렴 속도를 개선할 수 있으나, 스텝크기는 동시에 알고리즘의 misadjustment에 영향을 미치기 때문에 스텝 크기의 선정은 LMS 알고리즘에서 매우 중요하고 민감한 문제이다.[2-4]

알고리즘의 수렴 속도는 스텝크기에 대체로 반비례의 관계를 지니나, 이와 달리 misadjustment는 스텝 크기가 작을수록 감소하는 상반된 양상을 나타내므로 스텝 크기를 크게 할 경우 수렴 속도는 빨라지지만 misadjustment는 커지며, 스텝 크기를 작게할 경우 misadjustment는 줄어들지만 수렴 속도가 느려진다. 그러므로 LMS의 성능 개선을 위한 효과적인 스텝크기의 선정에 관하여 많은 연구들이 수행되었다.[5-9] 그런데 최적 스텝 크기는 필터 계수의 수, 필터 계수, 계수의 초기화, 데이타의 수 등의 복잡한 비선형 함수가 되므로, 충분한 사전 정보가 주어지지 않을 경우 스텝크기의 최적 선정이 쉽지 않다.

따라서 고정 스텝크기를 사용하는 대신에 스텝크기를 가변시켜서 알고리즘의 초기 동작 시점에서는 스텝크기를 크게하여 빠른 수렴속도를 달성하고 정상상태시에는 작은 스텝크기를 사용하여 misadjuistment를 줄이는 방법을 생각할 수 있다. 가변 스텝크기의 경우는 고정 스텝 크기의 경우와는 달리 비정태(nonststionary) 신호의 추정에도 잘 동작하게 된다. 이러한 가변 스텝크기의 선정에는 추정오차의 크기, 추정오차의 부호 변화, 입력 데이타와 추정 오차간의 상호상관(cross-correlation)등이 척도로 사용되고 있다.

본 논문에서는 LMS 알고리즘의 성능 개선을 위하여 퍼지 논리를 이용하여 스텝크기를 가변시키는 방법을 제시하였다. 퍼지 논리는 애매모호한 인간의 주관적 판단이나 정성적 개념을 표현하고 처리할 수 있으므로[10], 스텝크기의 가변에 적용되는 개념적 원리를 적절히 구현할 수 있어서 스텝 크기를 가변시키는 데 유용하게 사용할 수 있다. 본 논문에서 제안한 가변 스텝크기(Variable Step Size : VSS) LMS 알고리즘에서는 간단한 비례 퍼지 논리 제어기(Fuzzy Logic Controller : FLC)를 사용하여 LMS 알고리즘의 오적응도(misadaptation)의 정도에 따라 적절히 스텝크기를 가변시키게 된다.

2. 가변 스텝크기(VSS) LMS 알고리즘

적응 필터링이나 시스템 식별에서 발생하는 문제로서, 원하는 신호 d(n)을 선형 transversal필터를 이용하여 데이타 신호 {x(n)}의 선형결합으로 추정하는 문제를 생각해 보자. 이러한 문제는 다음과 같은 형태로 수식화할 수 있다.

$$d(n) = X^T(n)W^*(n) + \varepsilon(n) \tag{1}$$

여기서 X(n)과 $W^*(n)$은 각각 데이터 벡터와 최적 필터계수 벡터로서

$$X(n) = [\ x(n)\ \ x(n-1)\ \cdots\cdots\ x(n-P)]^T \tag{2}$$

$$W^*(n) = [\ W_0^*(n)\ \ W_1^*(n)\ \cdots\cdots\ W_p^*(n)]^T \tag{3}$$

그리고 ε(n)은 x(n)에 대해 독립인 영평균 Gauss분포 독립 시퀀스(Gaussian independent sequence)이다.

식(1)에서 $W^*(n)$은 d(n)이 정태(stationary)신호이면 상수이고 비정태 신호이면 시변으로서, 이의 추정에는 다음과 같은 형태의 LMS 알고리즘이 널리 사용되고 있다.[1]

$$e(n) = d(n) - X^T(n)W(n) \tag{4}$$

$$W(n+1) = W(n) + \mu e(n)X(n) \tag{5}$$

식(5)의 μ는 스텝크기로서 알고리즘의 수렴 속도와 misadjustment를 제어하는 요소이다. 알고리즘의 자승 평균적 수렴, 즉 유한한 평균 자승 오차 (MSE:Mean Square Error)을 보장하기 위한 μ에 대한 충분 조건은 다음과 같이 주어진다.[3]

$$0 < \mu < \frac{2}{3tr(R)} \tag{6}$$

여기서 R은 데이타 벡터 X(n)의 상관 함수 행렬로서

$$R = E\ \{\ X(n)\ X^T(n)\ \} \tag{7}$$

LMS 알고리즘에서 양호한 수렴 특성 및 misadjustment를 위하여 μ를 가변시킬 경우, 논리적인 관점에서 생각해 볼 때 식(6)이 만족되는 범위 내에서 다음의 규칙을 따르도록 해야 한다.

· IF adaptation degree is LOW, THEN μ must be HIGH

· IF adaptation degree is HIGH, THEN μ must be LOW

위의 규칙을 구현하는 매력적인 방법으로 퍼지 논리를 선택할 수 있다. 퍼지 논리는 애매모호한 주관적 판단이나 정성적 개념을 표현하고 처리하는 데 적합하므로, 위의 규칙에 의거한 스텝 크기의 가변에도 유용하게 이용될 수 있다.

따라서 본 논문에서는 다음과 같이 퍼지 논리를 이용한 새로운 VSS LMS 알고리즘을 제안하였다.

$$e(n) = d(n) - X^T(n)W(n) \tag{8}$$

$$\mu'(n) = \mu(n-1) + \rho\, sgn[\nabla\mu e^2(n)]\Delta\mu(n) \tag{9}$$

$$\nabla\mu e^2(n) = \frac{\partial e^2(n)}{\partial\mu} = \frac{\partial e^2(n)}{\partial W(n)} \cdot \frac{\partial e^2(n)}{\partial\mu}$$

$$= e(n-1)X^T(n-1)\cdot e(n)X(n) \tag{10}$$

$$\mu(n) = \begin{cases} \mu_{max} & \text{if } \mu'(n) > \mu_{max} \\ \mu_{min} & \text{if } \mu'(n) > \mu_{min} \\ \mu'(n) & \text{otherwise} \end{cases} \tag{11}$$

$$W(n+1) = W(n) + \mu(n)e(n)X(n) \tag{12}$$

식(9)에서 Δμ(n)은, 다음절에서 상세히 설명하겠지만, 비례 FLC를 이용해 계산된 스텝크기의 변화량이고, ρ는 μ(n)의 적응 동작을 제어하는 작은 양의 상수이며, sgn[·]은 다음과 같은 부호 함수로서 스텝크기의 증가 또는 감소를 결정하게 된다.

$$sgn\ (X) = \begin{cases} +1 & \text{if } X > 0 \\ -1 & \text{if } X < 0 \end{cases} \tag{13}$$

식(10)의 μ_{max}는 식(6)의 조건이 충분히 만족되도록 선정하며, μ_{min}은 최소한의 추종성능을 갖도록 선정한다. VSS LMS 알고리즘의 초기 스텝크기 μ(0)는 보통 μ_{max}로 선정한다.

3. 퍼지 논리 제어기(FLC)에 의한 Δμ(n)의 계산

앞절의 VSS LMS 알고리즘에서 식(9)의 스텝크기 변화량 Δμ(n)은 퍼지 논리를 이용한 퍼지 논리 제어기(FLC)에 의하여 계산된다.

FLC의 입력과 출력은 Crisp한 값을 갖는 오적응도의 정량적 척도 u(n)과 스텝크기 변화량 Δμ(n)이며, FLC 내부에서는 이들 값이 퍼지 변수화되어 취급된다. Δμ(n)의 결정은 앞절의 스텝 크기 가변 규칙을 고려하면 다음의 간단한 규칙들에 의한 비례 FLC를 사용하면 된다.

R_1: IF u is ZEro(ZE) THEN Δμ is ZEro(ZE)

R_2: IF u is Small(S) THEN Δμ is Small(S)

R_3: IF u is Medium(M) THEN Δμ is Medium(M)

R_4: IF u is Large(L) THEN Δμ is Large(L)

R_5: IF u is eXtra Large(XL)
THEN Δμ is eXtra Large(XL)

이러한 제어 규칙은 OR 로 결합되어 있으므로 전체 제어 규칙은 다음과 같이 표현된다.

$$R = R_1 \cup R_2\ \cdots\cdots \cup R_5 = \bigcup_{i=1}^{5} R_i \tag{14}$$

FLC의 언어 변수에 대한 퍼지변수 u, Δμ의 소속 함수는 각각 그림1에 나타나 있다.

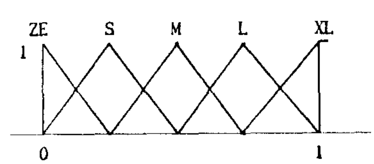

그림2 퍼지변수u, Δμ의 소속함수m_u, $m_{\Delta\mu}(\Delta\mu)$

이러한 언어적인 규칙과 소속함수로부터 출력값을 얻으려면 추론 과정을 거쳐야 한다. FLC의 퍼지 입력이 u°면 퍼지출력 Δμ°는 다음과 같은 max-min 합성 연산자에 의해 구해진다.

$$\Delta\mu^o = R \circ u^o \tag{15}$$

$$m_{\Delta\mu^o}(\Delta\mu) = \max_{\Delta\mu}\{\ \min[\ m_u(u), m_R(u,\Delta\mu)\ ]\ \} \tag{16}$$

$$m_R(u,\Delta\mu) = \max\ \{\ \min[\ m_u(u), m_{\Delta\mu}(\Delta\mu)\ ]\ \} \tag{17}$$

퍼지 추론과정을 거쳐 얻어진 출력은 퍼지 변수이고 FLC의 실제 출력은 crisp한 값을 갖는 $\Delta\mu(n)$이 되어야 하므로 비퍼지화 과정이 필요한데 다음과 같은 무게 중심법(Center Of Gravity : COG)을 사용한다.

$$\Delta\mu(n) = \frac{\int \Delta\mu\ m_{\Delta\mu^o}(\Delta\mu)\ d(\Delta\mu)}{\int m_{\Delta\mu^o}(\Delta\mu)\ d(\Delta\mu)} \tag{18}$$

오적응도의 척도로는 다음과 같이 주어지는 입력 데이타와 추정 오차간의 상호상관의 norm을 사용한다.

$$u(n) = \|\ e(n)X(n)\ \| \tag{19}$$

식(18)에서 보면 $e(n)X(n) = -\nabla_W e^2(n)(=\partial e^2(n)/\partial W(n))$이므로 $\|e(n)X(n)\|$은 $e^2(n)$의 gradient 벡터의 크기가 되므로 gradient search형 알고리즘의 적응도를 판단하는 적절한 기준이라 할 수 있다.

4. 컴퓨터 시뮬레이션 및 검토

제안된 VSS LMS 알고리즘의 유효성을 검증하기 위하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다. Mikhael et al.[5]이 고정 스텝크기 μ = 0.5인 정규화 LMS(Normalized LMS : NLMS)가 고정 스텝크기를 갖는 모든 Gradient Search형 알고리즘 중에서 가장 빠른 수렴 속도를 나타냄을 보였으므로 같은 예제에 대해 VSS LMS와 NLMS를 사용하여 얻은 결과를 비교하였다.

<예제> d(n)과 X(n)이 다음과 같이 주어지는 경우를 생각하자.

$$d(n) = \sum_{i=0}^{4} w_i X(n-i) + v(n) \tag{20}$$

$$x(n) = \sum_{i=1}^{3} a_i X(n-i) + \zeta(n) \tag{21}$$

여기서 $\{\ w_0\ w_1\ w_2\ w_3\ w_4\ \} = \{\ 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 0.3,\ 0.1\ \}$

$\{\ a_1\ a_2\ a_3\ \} = \{\ 1.5,\ -1,\ 0.25\ \}$

이고 $v(n)$과 $\zeta(n)$은 각각 ~N(0,1), ~N(0,0.01)의 분포를 갖는 백색잡음 신호이다. 식(20)의 입력 데이타 x(n)은 상관함수 행렬의 eigenvalue spread가 140이 넘는 ill-conditioned 경우이다.

성능 비교를 위한 지표로서 다음과 같이 정의되는 계수벡터 추정 오차의 파워를 사용할 수 있다.

$$P(n) = [\ W(n) - W_{opt}\ ]^T\ [\ W(n) - W_{opt}\ ] \tag{22}$$

그림2에 각각 데이타 갯수가 4000개일 경우의 VSS LMS와 NLMS에 의한 계수 추정시의 P(n)값이 나타나 있다. 그리고 그림3에는 VSS LMS의 스텝크기를 나타내었다. VSS LMS에서는 $\mu(0)$ = 0.06, ρ= 0.0008의 값을 사용하였다. 그림2에서 볼 수 있듯이 VSS LMS가 NLMS의 경우보다 좋은 성능을 보임을 알 수 있다.

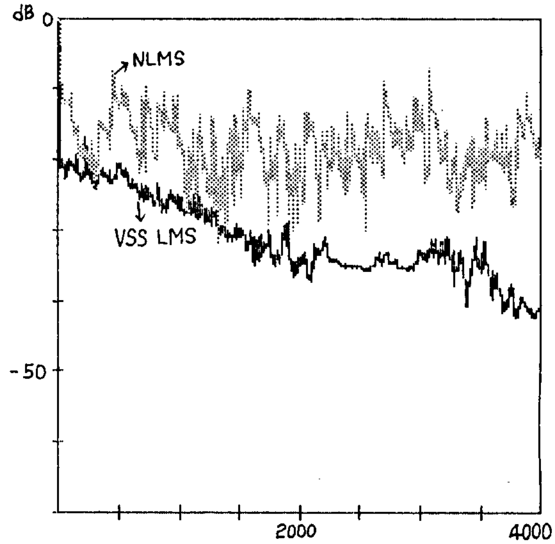

그림2. VSS LMS와 NLMS에 의한 계수벡터 추정오차의 파워

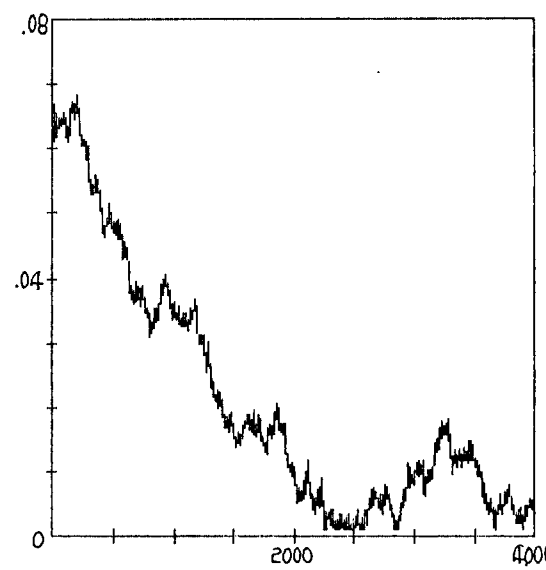

그림3. VSS LMS의 스텝크기 변화

5. 결론

LMS 알고리즘의 수렴특성은 알고리즘의 스텝크기와 연관되어 있으나, 스텝크기는 또한 misadjustment에도 영향을 미치므로 고정 스텝크기로는 만족스러운 결과를 얻기가 힘든 경우가 많다. 따라서 본 논문에서는 LMS 알고리즘의 성능 개선을 위하여 퍼지논리를 이용하여 스텝크기를 가변시키는 VSS LMS 알고리즘을 제안하였다. VSS LMS에서는 간단한 비례 FLC를 사용하여 LMS의 오적응도의 정도에 따라 적절히 스텝크기를 가변시키도록 하였으며, 오적응도의 척도로는 입력 데이타와 추정오차간의 상호 상관의 norm을 사용하였다.

컴퓨터 시뮬레이션에서 볼 수 있듯이 VSS LMS는 고정 스텝크기 LMS에 비해 좋은 성능을 나타내고 있다.

참고문헌

[1] B. Widrow and S. D. Stearns, Adaptive Signal Processing, Englewood Cliffs, NJ., Prentice-Hall, 1985.

[2] B. Widrow et al., "Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filters," Proc. IEEE, vol.64, no.8, pp.1151-1162, Aug . 1976.

[3] A. Feuer and E. Weinstein, "Convergence analysis of LMS filters with uncorrelated Gaussian data," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol.ASSP-33, no.1, pp.222-230, Feb. 1985.

[4] N. J. Bershad, "On the optimum gain parameter in LMS adaptation," IEEE Trans.Acoust.,Speech,Signal Processing, vol.Assp-35, pp.1065-1068, July 1987.

[5] W. B. Mikhael et al., "Adaptive filters with individual adaptation of parameters," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-35, no.7, pp.677-685, July 1986.

[6] R. W. Harris, D. M. Chabries, and F. A. Bishop, "A variable step(VS) asaptive filter algorithm," IEEE Trans. Acoust., Speech,Signal Processing, vol.ASSP-34, no.2, pp.309-316, Apr. 1986.

[7] T. J. Shan and T. Kailath, "Adaptive algorithms with an automatic gain control feature," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-35, no.1, pp.122-127 , Jan.1988.

[8] S. Karni and G. Zeng, "A new convergence factor for adaptive filters," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-36, no.7, pp.1011-1012, July 1989.

[9] V. J. Mathews and Z. Xie, "Stochastic gradient adaptive filters with gradient adaptive step sizes," in Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Albuquerque, NM, Apr. 1990, pp. 1385-1388.

[10] W. Pedrics, Fuzzy Control and Fuzzy Systems, Taunton, Somerset, England, Research Studies Press Ltd., 1989.