

구간 플랜트에 대한 견실한 레귤레이터 설계

김기두, 김석중*
국민대학교 전자공학과

Robust Regulator Design for an Interval Plant

Ki-Doo Kim, Suk-Joong Kim*
Department of Electronic Engineering, Kookmin University

Abstract

In this paper, we present an algorithmic technique for determining a feedback compensator which will stabilize the interval dynamic system, specifically, the robust regulator design for interval plants. The approach taken here is to allow the system parameters to live within prescribed intervals then design a dynamic feedback compensator which guarantees closed-loop system stable. The main contribution of this paper is the idea of introducing a "simplified Kharitonov's result" for low order polynomials to search for suitable compensator parameters in the compensator parameter space to make the uncertain system robust. We also design the robust regulator which will D-stabilize (have the closed-loop poles in the left sector only) the dynamic interval system while having good performance. The numerical examples are given to show the substantially improved robustness which results from our approach.

1. 서론

최근에 시스템 파라미터들의 섭동(perturbation) 범위를 알고 있는 시스템의 해석 및 설계는 제어와 신호처리 분야에서 관심의 연구대상이 되고 있다[1~6]. 제어 시스템 설계시 이상적이고 간단한 시스템 모델을 토대로 안정한 피드백(feedback) 보상을 설계하는 것이 일반적이다. 그러나 모델링 오차와 파라미터 변화에 의한 플랜트 모델(plant model)의 불확실성을 고려하는 것이 보다 실제적이고 바람직하다. 사실상 파라미터 불확실성은 플랜트의 전달함수 표현식이나 상태공간 표현식에서 반영될 것이다. 그러므로 플랜트군(a family of plants)을 안정화시키는 견실한 보상기(robust compensator)를 설계를 하는 것이 요구된다. 설계의 결과가 견실하다는 것은 페루프 시스템이 파라미터 변화와 모델 불확실성에도 불구하고 안정도 뿐만 아니라 성능이 허용한계내에서 만족됨을 의미한다.

2. 기본 배경이론

선형 시스템의 페루프 특성방정식을 다음과 같이 구간 다항식(interval polynomial)으로 나타낸다.

$$P(s) = \sum_{i=0}^n t_i s^i \quad (1a)$$

여기서

$$0 < \mu_i \leq t_i \leq \delta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1b)$$

즉 구간 다항식이란 계수가 상한값과 하한값 사이에서 변하도록 허용되는 다항식을 의미한다.

정리 1(Kharitonov 정리)[7,8]: 식(1)에서 실수 구간 다항식 $P(s)$ 가 Hurwitz(특성 다항식의 모든 근들이 개좌반평면(OLHP)상에 존재)일 필요충분 조건은 다음과 같은 4개의 극단(extreme) 다항식들이 Hurwitz이면 된다.

$$P_1(s) = \mu_0 + \mu_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \mu_4 s^4 + \mu_5 s^5 + \delta_6 s^6 + \dots \quad (2)$$

$$P_2(s) = \delta_0 + \delta_1 s + \mu_2 s^2 + \mu_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \mu_6 s^6 + \dots \quad (3)$$

$$P_3(s) = \delta_0 + \mu_1 s + \mu_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \delta_4 s^4 + \mu_5 s^5 + \mu_6 s^6 + \dots \quad (4)$$

$$P_4(s) = \mu_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \mu_3 s^3 + \mu_4 s^4 + \delta_5 s^5 + \delta_6 s^6 + \dots \quad (5)$$

Kharitonov 정리는 저차(low order) 실수 구간 다항식군에 대해서는 더욱 간단하게 표현될 수 있다. 특히 차수가 3, 4, 5인 경우에 대하여 견실한 안정도를 조사하기 위해 요구되는 극단 다항식들의 갯수는 4개 대신에 각각 1개, 2개, 3개이다[9]. 식(1)에서 견실한 안정도를 갖기 위한 $P(s)$ 에 대한 필요 조건은 모든 k 에 대해 $\mu_k > 0$ 이다[10]. 이러한 경우 안정도 판별을 위해 Liénard-Chipart 정리[11]를 사용하면 Hurwitz 행렬식 총수의 약 절반만 요구되므로 Hurwitz 정리[10,11]를 적용한 경우에 비하여 계산을 간소화시킬 수 있다. 이제 저차 다항식에 참고문헌 [9]의 결과 및 Liénard-Chipart 정리를 사용하여 Kharitonov 정리에서 4개의 극단 다항식이 Hurwitz이기 위한 조건은 다음과 같이 간소화될 수 있다.

$n = 3$ 인 경우:

$$\mu_1 \mu_2 - \delta_0 \delta_3 > 0 \quad (6)$$

$n = 4$ 인 경우:

$$\delta_1 (\mu_2 \mu_3 - \delta_1 \delta_4) - \delta_0 \mu_3^2 > 0 \quad (7)$$

$$\mu_1 (\mu_2 \delta_3 - \mu_1 \delta_4) - \delta_0 \delta_3^2 > 0 \quad (8)$$

n = 5인 경우:

$$\mu_3\mu_4 - \delta_2\delta_5 > 0, (\mu_3\mu_4 - \delta_2\delta_5)(\delta_1\delta_2 - \mu_0\mu_3) - (\delta_1\mu_4 - \mu_0\delta_5)^2 > 0 \quad (9)$$

$$\mu_3\delta_4 - \mu_2\delta_5 > 0, (\mu_3\delta_4 - \mu_2\delta_5)(\delta_1\mu_2 - \delta_0\mu_3) - (\delta_1\delta_4 - \delta_0\delta_5)^2 > 0 \quad (10)$$

$$\delta_3\delta_4 - \mu_2\mu_5 > 0, (\delta_3\delta_4 - \mu_2\mu_5)(\mu_1\mu_2 - \delta_0\delta_3) - (\mu_1\delta_4 - \delta_0\mu_5)^2 > 0 \quad (11)$$

그림 1에서 $\phi = (p/q)\pi$ 는 left sector D_ϕ 를 정의하는 감쇠각(damping angle)을 나타낸다. 여기서 p와 q는 서로소(coprime)인 정수이고 $1/2 \leq p/q < 1$ 이다. 편의상 식(1)과 같은 실수 구간 다항식의 모든 근이 D_ϕ 내에 존재하면 D_ϕ -안정(D_ϕ -stable)이라고 명한다. 다음 정리 2는 정리 1을 다소 일반화시킨 결과로서 $p/q = 1/2$ 일 경우 Kharitonov 정리의 일치한다.

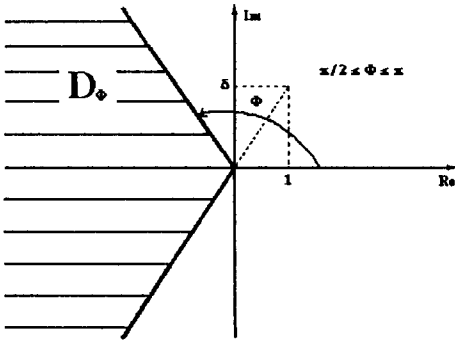


그림 1. Left Sector

정리 2[12]: 실수 구간 다항식이 D_ϕ -안정하기 위한 필요충분 조건은 2q개의 극점(vertex) 다항식이 D_ϕ -안정하면 된다.

정리 2에 의하면 감쇠각이 $\phi = 2\pi/3$ 인 경우, $q = 3$ 이므로 실수 구간 다항식이 D_ϕ -안정하기 위한 필요충분 조건은 다음 6개의 극점 다항식들이 D_ϕ -안정한가를 검사하면 된다.

$$P_1(s) = \delta_0 + \mu_1s + \delta_2s^2 + \delta_3s^3 + \dots \quad (12)$$

$$P_2(s) = \delta_0 + \mu_1s + \mu_2s^2 + \delta_3s^3 + \dots \quad (13)$$

$$P_3(s) = \delta_0 + \delta_1s + \mu_2s^2 + \delta_3s^3 + \dots \quad (14)$$

$$P_4(s) = \mu_0 + \delta_1s + \mu_2s^2 + \mu_3s^3 + \dots \quad (15)$$

$$P_5(s) = \mu_0 + \delta_1s + \delta_2s^2 + \mu_3s^3 + \dots \quad (16)$$

$$P_6(s) = \mu_0 + \mu_1s + \delta_2s^2 + \mu_3s^3 + \dots \quad (17)$$

한편 위 결과는 저차 실수 구간 다항식의 경우 더욱 간결해 지는데, 차수가 $n=3$ 인 경우 $P_i(s)$ ($i=1, 2, 3$)에 대하여, 차수가 $n=4$ 인 경우에는 $P_i(s)$ ($i=1, 2, \dots, 5$)에 대하여 D_ϕ -안정을 조사하면 된다[13].

3. 현실한 레귤레이터 설계

먼저 $n \times n$ 실수 행렬 $P = [p_{ij}]$, $Q = [q_{ij}]$ 가 주어졌을 때 구간 행렬(interval matrix), $A \in [P, Q]$, 을 다음과 같이 정의한다.

$$[P, Q] = \{A = [a_{ij}]; p_{ij} \leq a_{ij} \leq q_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\} \quad (18)$$

지금부터 동적 구간 시스템(dynamic interval system)을 안정하도록 하는 피드백 보상기 계수를 결정하기 위한 간단한 알고리즘 기법을 제시한다. 식(19)와 (20)은 제어하기 위한 동

적 구간 시스템을 나타낸다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (19)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (20)$$

여기서 $A \in [P, Q]$, $B \in [R, V]$, $C \in [W, Z]$ 이며, 이때 P와 Q는 $n \times n$ 실수 행렬, R과 V는 $n \times m$ 실수 행렬, 그리고 W와 Z는 $q \times n$ 실수 행렬이다. 이제 전달함수는 구간 유리함수(interval rational function)로 표현될 수 있다. 구간 유리함수란 전달함수의 분모 및 분자가 모두 구간 다항식임을 의미한다. 모든 상태(state)가 피드백이 가능하지 않은 경우가 종종 있는데, 정확하게 파라미터들을 모를 경우 상태를 재건하기 위한 관측기(observer)를 설계할 수 없으나 일반적인 동적 보상기(dynamic compensator)는 사용될 수 있다. 우선 Evans와 Xianya[5]에 의해 제안된 설계절차를 따르지만 참고 문헌[5]에서의 정리 1 대신에 Kharitonov 정리를 사용하여 본 논문 접근방법의 우수성을 입증한다. 파라미터들이 주어진 구간 내에 있을 때 제어될 플랜트는 제어 가능하고 관측 가능하다고 가정하자. 행렬 A, B, 그리고 C에 대한 공칭치(nominal value) 혹은 가장 가능성 있는 값을 각각 A_0 , B_0 , 그리고 C_0 로 나타낸다. 모든 상태의 피드백이 가능치 않을 경우 설계 절차를 다음과 같이 제안한다.

단계 1: 파라미터들의 공칭치에 의한 플랜트에 대하여 식(21)과 같은 전달함수를 갖는 $n-1$ 차 보상기를 설계한다.

$$-\frac{\mathcal{L}[u(t)]}{\mathcal{L}[y(t)]} = -\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j s^j}{s^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i s^i} \quad (21)$$

여기서 계수 α_{i0} 와 β_{j0} 는 LQ(Linear Quadratic) 기법[14,15]을 적용하여 시스템이 최적화 되도록 결정한다.

단계 2: 식(22)를 최소화 시키는 α_i ($i = 0, 1, \dots, n-2$)와 β_j ($j = 0, 1, \dots, n-1$)를 구한다. 이때 플랜트의 계수 α_i , β_j 를 갖는 보상기로 구성된 폐루프 구간 시스템은 안정해야 한다.

$$\|y - y_0\| \quad (22a)$$

여기서

$$\gamma = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}] \quad (22b)$$

$$\gamma_0 = [\beta_{00}, \beta_{10}, \dots, \beta_{(n-1)0}, \alpha_{00}, \alpha_{10}, \dots, \alpha_{(n-2)0}] \quad (22c)$$

위에서 식(22)를 최소화시키기 위한 노름(norm)의 종류는 자유롭게 선택할 수 있으나, 편의상 표준 Euclidean 노름을 사용한다.

단계 3: 단계 2에서 설계된 폐루프 시스템의 성능을 조사한다. 만일 단계 2에서 해가 존재할지라도, 새로운 보상기를 고려한 폐루프 시스템의 성능이 만족스럽지 못할 경우 만족스런 성능을 얻기 위하여 단계 2를 반복한다.

참고문헌 [5]의 예제에서 사용된 것과 동일한 플랜트를 대상으로 다음 예제를 통해 본 논문 결과의 계산상 우월성을 비교자 한다.

예제 1: 제어하기 위한 플랜트는 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) \quad (23)$$

$$y(t) = C^T x(t) \quad (24)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = [2, c_2] \quad (25)$$

또한 $a \in [0.5, 1.5]$, $c_2 \in [-1.7, 0.5]$ 이며, 공칭치를 각각 $a_0 = 1$, $c_{20} = -1$ 로 설정한다. 이때 목적은 페루프 시스템이 a 와 c_2 의 가능한 모든 값에 대하여 안정하도록 보상기를 설계하는 것이다. $a \neq 0$ 이면 플랜트가 제어 가능하고 관측 가능함을 쉽게 알 수 있다. 플랜트의 전달함수는 식(26)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2 s + 2a}{s^2} \quad (26)$$

단계 1: 먼저 공칭치($a = a_0 = 1$, $c_2 = c_{20} = -1$)에 대한 동적 보상기를 결정한다. 플랜트의 차수는 2차이므로 동적 보상기의 차수는 식(27)과 같이 1차로 한다.

$$-\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{\beta_{10}s + \beta_{00}}{s + \alpha_{00}} \quad (27)$$

Kalman의 최적 제어 설계 기법[5,15]을 적용하여 보상기를 포함한 페루프 시스템의 성능이 우수하도록 다음 값을 구한다.

$$\alpha_{00} = 3.25, \beta_{00} = 0.5, \beta_{10} = 1.25 \quad (28)$$

그러나 $c_2 = -1.7$ 이고 $a = 0.5$ 일때 식(28)과 같은 보상기 계수를 갖는 페루프 시스템이 불안정함을 쉽게 알 수 있다. 그림 2는 a 와 c_2 의 변화에 따른 안정도 영역을 보여준다. 따라서 a 와 c_2 가 각각 구간영역 $a \in [0.5, 1.5]$, $c_2 \in [-1.7, 0.5]$ 에서 변화할 때 식(27)과 (28)의 보상기를 포함한 제어시스템은 올바르게 동작하지 않을 것이다. 그러므로 $a = a_0$ 와 $c_2 = c_{20}$ 일 경우의 좋은 성능을 유지하면서 가능한 모든 a 와 c_2 에 대해 시스템이 안정하도록 보상기의 파라미터를 수정하고자 한다.

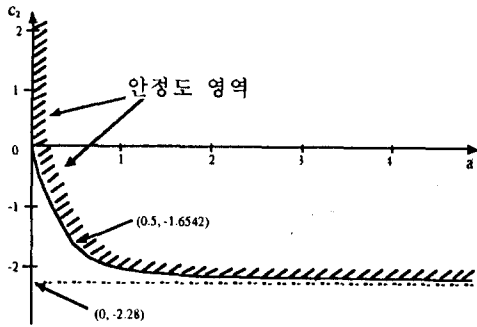


그림 2. 보상기 $(1.25s+0.5)/(s+3.25)$ 를 포함한 플랜트 $(c_2+2a)/s^2$ 의 안정도 영역

단계 2: 구간 페루프 시스템은 안정하면서 $(\beta_1 - \beta_{10})^2 + (\beta_0 - \beta_{00})^2 + (\alpha_0 - \alpha_{00})^2$ 을 최소화시키는 식(29)와 같은 동적 보상기의 파라미터를 구한다.

$$-\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s + \alpha_0} \quad (29)$$

그림 3의 페루프 시스템에 대하여, 특성 다항식은 다음과 같이 쉽게 얻을 수 있다.

$$s^3 + ds^2 + es + f \quad (30a)$$

여기서

$$d = c_2\beta_1 + \alpha_0, e = c_2\beta_0 + 2a\beta_1, f = 2a\beta_0. \quad (30b)$$

$a \in [0.5, 1.5]$, $c_2 \in [-1.7, 0.5]$ 이기 때문에, 식(30)은 다음과 같은 계수를 갖는 구간 다항식이다.

$$d \in [d_a, d_b], e \in [e_a, e_b], f \in [f_a, f_b] \quad (31)$$

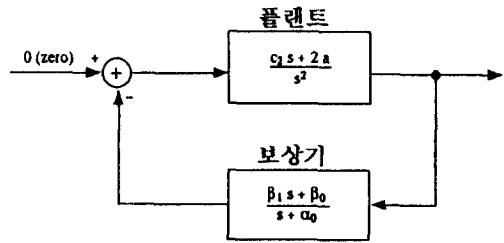


그림 3. 예제 1에 대한 건설한 제어 시스템

여기서

$$d_a = \min(-1.7\beta_1, 0.5\beta_1) + \alpha_0 \quad (32)$$

$$d_b = \max(-1.7\beta_1, 0.5\beta_1) + \alpha_0 \quad (33)$$

$$e_a = \min(-1.7\beta_0, 0.5\beta_0) + 2\min(0.5\beta_1, 1.5\beta_1) \quad (34)$$

$$e_b = \max(-1.7\beta_0, 0.5\beta_0) + 2\max(0.5\beta_1, 1.5\beta_1) \quad (35)$$

$$f_a = 2\min(0.5\beta_0, 1.5\beta_0) \quad (36)$$

$$f_b = 2\max(0.5\beta_0, 1.5\beta_0) \quad (37)$$

식(30)에서 구간 다항식의 모든 근들이 오직 음의 실수부를 갖기 위한 필요 조건은 다음과 같다.

$$d_a > 0, e_a > 0, f_a > 0 \quad (38)$$

이때 주어진 구간 다항식의 차수는 3차이므로 저차 다항식에 대하여 "간소화된 Kharitonov 정리"[9]를 적용하면 식(30)의 구간 다항식이 안정하기 위한 충분 조건은 식(39)와 같다.

$$e_a d_b - f_a > 0 \quad (39)$$

식(30)에서 모든 계수들은 시스템이 안정하기 위하여 양의 실수이어야 하므로 다음과 같은 제한 조건식을 쉽게 얻을 수 있다.

$$\alpha_0 \geq 0, \beta_0 > 0, \beta_1 \geq 0 \quad (40)$$

따라서 식(38)과 식(39)는 각각 식(41)과 식(42)와 동등하다.

$$-1.7\beta_1 + \alpha_0 > 0, -1.7\beta_0 + \beta_1 > 0, \beta_0 > 0 \quad (41)$$

$$(-1.7\beta_0 + \beta_1)(-1.7\beta_1 + \alpha_0) - 3\beta_0 > 0 \quad (42)$$

본 논문의 접근방법은 Evans와 Xianya[5]의 방법에 비해 위에서 보인 바와 같이 계산량이 훨씬 적게 요구되는 장점을 가진다.

지금부터 식(40)~(42)에서의 부등식을 만족하면서 식(43)을 최소화시키는 $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ 을 구한다.

$$E_1 = (\alpha_0 - \alpha_{00})^2 + (\beta_0 - \beta_{00})^2 + (\beta_1 - \beta_{10})^2 \quad (43)$$

이것은 비선형 부등식 제약 최적화 문제[16]이므로 아래 해를 얻기 위하여 미분 최적화 절차 방법[14]을 사용하였다.

$$\alpha_0 = 3.28134, \beta_0 = 0.29118, \beta_1 = 1.24460 \quad (44)$$

이 경우 $E_1 = 0.04461$ 이고, Evans와 Xianya[5]가 구한 해에 상응하는 E_1 값($= 0.15473$)보다 작으므로 E_1 를 최소화시키고자 하는 목적에 더욱 부합함을 알 수 있다.

단계 3: 제안된 새로운 보상기가 a 와 c_2 의 구간 영역 내에서 페루프 시스템을 안정화시키면서 만족하는 성능을 가지는지 조사한다. 만일 단계 2에서 해가 존재할지라도 성능이 만족스럽지 못할 경우 만족스런 성능을 얻기 위하여 앞 과정을 되풀이 한다. 그림 4는 새로운 보상기를 갖는 페루프 시스템에 대하여 파라미터 a 와 c_2 의 안정도 영역을 나타내며, 그림 2와는 달리 $a = 0.5$, $c_2 = -1.7$ 인 점이 안정도 영역내에 존재함을 알 수 있다.

예제 1에 대하여 그림 A.1은 $a = 1.5$, $c_2 = -1.7$ 일 경우 단계 1에서 설계된 페루프 시스템의 단위 계단 응답을 나타내

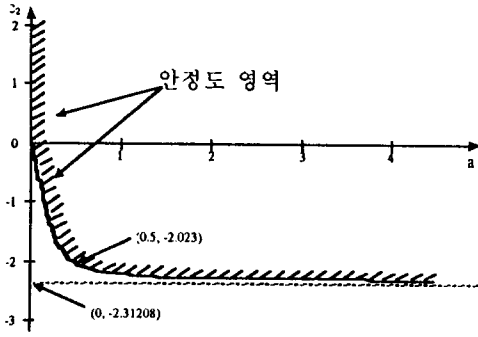


그림 4. 보상기 $(1.24560s+0.29118)/(s+3.28134)$ 를 포함한 플랜트 $(c_2+2a)/s^2$ 의 안정도 영역

며, 그림 A.2는 같은 경우 건설하게 설계된 페루프 시스템의 단위 계단 응답을 보여준다.

4. 감쇠(Damping)를 고려한 건설한 레귤레이터 설계

관측 제어 시스템의 천이 응답(transient response)이 감쇠가 저조하여 많은 오실레이션을 초래하는 경우가 있으므로 이를 방지하기 위해 Hurwitz 안정도 대신 D_0 -안정도를 고려함이 바람직하다[11]. 따라서 불확실한 동적 구간 시스템을 그림 1에 정의된 left sector 내에 모든 근을 갖도록 피드백 보상기의 파라미터를 설정하고자 한다. 즉 동적 구간 플랜트에 감쇠를 고려한 건설한 레귤레이터를 설계하고자 저차 구간 다항식에 대하여 정리 2의 결과[13]를 도입한다. 파라미터들이 주어진 구간내에서 변화할 때 플랜트는 제어 가능하고 또한 관측 가능하다고 가정한다. 설계절차는 3절의 단계1~단계3의 과정을 따르되 감쇠를 고려한 실수 구간 다항식의 안정도 조사를 위해 정리 1 대신 정리 2를 사용한다. 한편 다음 정리 3을 도입하여 편의상 left sector를 좌반평면으로 사상(mapping)을 한후, 감쇠를 고려한 구간 시스템의 성능을 점검하기 위하여 단위 계단 응답을 알아본다. 정리 3은 실수 다항식의 D_0 -안정도 점검시 다양한 Hurwitz 안정도 점검 방법들[10,11]을 이용할 수 있는 장점이 있다.

정리 3 [17]: 실수 행렬 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이 열린 left sector내에 모든 고유치(eigenvalues)를 가질 필요충분 조건은 행렬식 $\det[\lambda^2 I - 2\delta A \lambda + (\delta^2 + 1)A^2]$ 가 Hurwitz이다. 여기서 λ 와 δ 는 각각 고유치와 left sector 경계의 양의 기울기를 나타낸다.

상세한 설계절차 및 내용은 다음 예제를 통하여 기술한다. 예제 2는 감쇠각이 $\phi = 2\pi/3$ 인 경우에 대하여 동적 구간 플랜트를 D_0 -안정화시키고 만족스런 성능을 갖는 레귤레이터 설계에 대하여 논한다.

예제 2: 제어하기 위한 플랜트는 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t) \quad (45)$$

$$y(t) = C^T x(t) \quad (46)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C^T = [2, c_2] \quad (47)$$

한편 $a \in [0.5, 1.5]$, $c_2 \in [-0.8, 0.2]$ 이며, 공칭치는 각각 $a_0 = 1$, $c_{20} = -0.3$ 로 설정한다. 이때 목적은 페루프 시스템이 a 와 c_2 의 가능한 모든 값에 대하여 D_0 -안정하도록 보상기를 설계하는 것이다. $a \neq 0$ 이면 플랜트가 제어 가능하고 관측 가능함을 쉽게 알 수 있다. 플랜트의 전달함수는 식(48)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2 s + 2a}{s^2} \quad (48)$$

단계 1: 먼저 공칭치($a = a_0 = 1$, $c_2 = c_{20} = -0.3$)에 대한 동적 보상기를 결정한다. 플랜트의 차수는 2차이므로 동적 보상기의 차수는 식(49)와 같이 1차로 한다.

$$\frac{-U(s)}{Y(s)} = \frac{\beta_{10}s + \beta_{00}}{s + \alpha_{00}} \quad (49)$$

입력 $u(t)$ 의 도함수를 u_2 로 하면 공칭치에 대한 플랜트의 상태 방정식을 식(50)과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} + \bar{b} u_2 \quad (50a)$$

여기서

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (50b)$$

식(51)과 같은 성능 지수(performance index)에 대하여

$$J = \int_0^{\infty} (4x_1^2 + u_2^2) dt \quad (51)$$

Kalman의 최적 제어 설계 기법[15]을 적용하면 식(52)의 최적 상태 피드백을 얻을 수 있다.

$$u_2 = -K^T (x_1, x_2, u)^T \quad (52a)$$

여기서

$$K^T = (2, 5.03968, 3.1748). \quad (52b)$$

식(49)와 식(52)의 관계로부터 다음과 같은 공칭치에 대한 피드백 보상기의 파라미터 값들을 얻는다.

$$\alpha_{00} = 3.975752, \quad \beta_{00} = 1, \quad \beta_{10} = 2.66984 \quad (53)$$

이때 보상기를 포함한 페루프 시스템은 $a = a_0$, $c_2 = c_{20}$ 일때 좋은 성능을 가지며 D_0 -안정하지만, $a = 1.5$ 이고 $c_2 = -0.8$ (혹은 $a = 0.5$, $c_2 = -0.8$)일때 식(53)의 보상기 계수를 갖는 페루프 시스템이 D_0 -불안정함을 쉽게 알 수 있다. 그림 5는 a 와 c_2 에 대한 D_0 -안정도 영역을 보여준다. 따라서 a 와 c_2 가 각

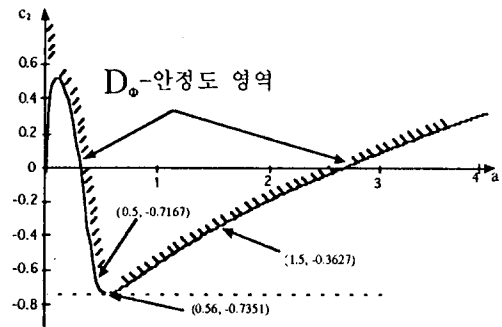


그림 5. 보상기 $(2.66984s+1)/(s+3.975752)$ 를 포함한 플랜트 $(c_2+2a)/s^2$ 의 D_0 -안정도 영역

각 구간영역 $a \in [0.5, 1.5]$, $c_2 \in [-0.8, 0.2]$ 에서 변화할 때 식(49)와 (53)의 보상기를 포함한 제어 시스템은 올바르게 동작하지 않을 것이다. 그래서 $a = a_0$ 와 $c_2 = c_{20}$ 일 경우의 좋은 성능을 최대한 유지하면서 가능한 모든 a 와 c_2 에 대해 시스템이 D_0 -안정하도록 보상기 파라미터를 수정하고자 한다.

단계 2: 구간 페루프 시스템이 D_0 -안정하면서 $(\beta_1 - \beta_{10})^2 + (\beta_0 - \beta_{00})^2 + (\alpha_0 - \alpha_{00})^2$ 을 최소화시키는 식(54)와 같은 동적 보상기의 파라미터를 구한다. 이때 구간 시스템의 D_0 -안정도를 조사하기 위하여 정리 2를 사용한다.

$$\frac{-U(s)}{Y(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s + \alpha_0} \quad (54)$$

예제 1의 경우와 마찬가지로 특성 다항식은 식(55)와 같이 나타낼 수 있다.

$$s^3 + ds^2 + es + f \quad (55a)$$

여기서

$$d = c_2\beta_1 + \alpha_0, \quad e = c_2\beta_0 + 2a\beta_1, \quad f = 2a\beta_0. \quad (55b)$$

본 예제에서 $a \in [0.5, 1.5]$, $c_2 \in [-0.8, 0.2]$ 이므로 식(55)는 다음과 같은 계수를 갖는 구간 다항식이다.

$$d \in [d_a, d_w], \quad e \in [e_a, e_w], \quad f \in [f_a, f_w] \quad (56)$$

여기서

$$d_a = \min(-0.8\beta_1, 0.2\beta_1) + \alpha_0 \quad (57)$$

$$d_w = \max(-0.8\beta_1, 0.2\beta_1) + \alpha_0 \quad (58)$$

$$e_a = \min(-0.8\beta_0, 0.2\beta_0) + 2\min(0.5\beta_1, 1.5\beta_1) \quad (59)$$

$$e_w = \max(-0.8\beta_0, 0.2\beta_0) + 2\max(0.5\beta_1, 1.5\beta_1) \quad (60)$$

$$f_a = 2\min(0.5\beta_0, 1.5\beta_0) \quad (61)$$

$$f_w = 2\max(0.5\beta_0, 1.5\beta_0) \quad (62)$$

위와 같은 계수를 갖는 구간 다항식이 오직 D_0 내에 모든 근들을 갖기 위한 필요 조건은 다음과 같다.

$$d_a > 0, \quad e_a > 0, \quad f_a > 0 \quad (63)$$

이때 주어진 구간 다항식의 차수는 3차이므로 저차 다항식에 대하여 정리 2를 간소화시킨 결과[13]를 고려하면 식(55)의 구간다항식이 D_0 -안정하기 위한 충분 조건은 식(64)~(66)의 다항식이 D_0 -안정하면 된다.

$$P_1(s) = f_w + e_w s + d_w s^2 + s^3 \quad (64)$$

$$P_2(s) = f_a + e_a s + d_a s^2 + s^3 \quad (65)$$

$$P_3(s) = f_w + e_w s + d_w s^2 + s^3 \quad (66)$$

이제 식(64)~(66)에 의한 세 다항식이 D_0 -안정 하면서 식(67)을 최소화시키는 $\alpha_0, \beta_0, \beta_1$ 를 구한다.

$$E_2 = (\alpha_0 - \alpha_{00})^2 + (\beta_0 - \beta_{00})^2 + (\beta_1 - \beta_{10})^2 \quad (67)$$

단순한 iteration 방식을 사용하여 얻은 보상기 계수는 식(68)과 같으며, 이때 $E_2 = 5.9248$ 이다.

$$\alpha_0 = 6.226, \quad \beta_0 = 0.236, \quad \beta_1 = 2.648 \quad (68)$$

단계 3: 제한된 새로운 보상기가 a 와 c_2 의 구간 영역 내에서 페루프 시스템을 D_0 -안정하게 하면서 만족하는 성능을 가지는지 조사한다. 만일 단계 2에서 해가 존재할지라도 성능이 만족스럽지 못할 경우 만족스런 성능을 얻기 위하여 앞 과정을 반복한다. 그림 6은 새로운 보상기를 갖는 페루프 시스템에 대하여 파라미터 a 와 c_2 의 D_0 -안정도 영역을 보여주며, 그림 5와는 달리 $a = 0.5, c_2 = -0.8$ (혹은 $a = 1.5, c_2 = -0.8$)에서 D_0 -안정함을 알 수 있다.

본 예제에서 감쇠를 고려한 동적 구간 시스템의 성능을 조사하기 위해 정리 3을 사용하여 left sector를 개좌반평면상

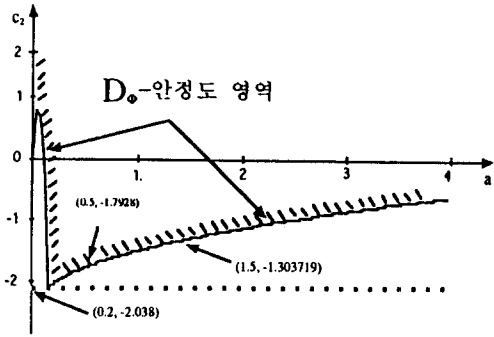


그림 6. 보상기 $(2.648a+0.236)/(s+6.226)$ 를 포함한 플랜트 $(c_2+2a)/s^2$ 의 D_0 -안정도 영역

으로 사상을 시킨 후 단위 계단 응답을 알아본다.

예제 2에서 $a = 0.5, c_2 = -0.8$ 와 $a = 1.5, c_2 = -0.8$ 일 경우에 대하여 그림 A.3과 A.4는 단계 1에서 설계된 페루프 시스템의 단위 계단 응답을 나타내며, 그림 A.5와 A.6는 건설하게 설계된 페루프 시스템의 단위 계단 응답을 보여준다.

5. 결론

본 논문에서는 플랜트의 파라미터가 한정된 구간 내에서 변화한다는 가정하에 페루프 구간 시스템의 안정도를 보장하는 동적 피드백 보상기를 설계하였다. 본 논문의 주된 공헌은 저차 다항식에 대한 "간소화된 Kharitonov의 결과"[9]를 도입하여 불확실한 시스템을 건설하도록 하는 보상기의 파라미터를 손쉽게 결정하는 점이다. Evans와 Xianya[5]에 의해 제안된 설계절차를 따르지만 참고문헌[5]에서의 정리 1 대신 Kharitonov 정리를 사용하여 본 논문 접근방법의 우수성을 입증한다. 또한 저차 다항식에 대한 정리 2의 결과[13]를 도입하여 감쇠를 고려한 동적 구간 플랜트의 건설한 레귤레이터 설계에 대하여 논하였다. 수치적 예제로부터 제안한 기법의 타당성을 보이기 위해 설계절차와 더불어 단위 계단 응답에 관한 시뮬레이션 결과를 제시했다.

Kharitonov 정리는 구간 다항식의 계수가 선형 종속일 경우 단지 충분 조건만을 만족한다. 앞으로 Kharitonov 정리를 확장시킨 Box Theorem[18]을 이용하여, 구간 유리함수로 표현된 플랜트를 안정시키기 위한 필요충분 조건을 만족하는 건설한 보상기를 설계하고자 한다.

참고문헌

- [1] K.D. Kim and N.K. Bose, "Invariance of the strict Hurwitz property for bivariate polynomials under coefficient perturbations," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-33, no.12, pp.1172-1174, Dec. 1988.
- [2] N.K. Bose and K.D. Kim, "Stability of a complex polynomial set with coefficient in a diamond and generalizations," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-36, no.9, pp.1168-1174, Sep. 1989.
- [3] K.D. Kim and N.K. Bose, "Vertex implications of stability for a class of delay-differential interval systems," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.CAS-37, no.7, pp.969-972, July 1990.

[4] N.K. Bose and K.D. Kim, "Boundary implications for frequency response of interval FIR and IIR filters," IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing, vol.39, no.10, pp.2167-2173, Oct. 1991.
 [5] R.J. Evans and X. Xianya, "Robust regulator design," Int. J. of Control, vol.41, no.2, pp.461-476, 1985.
 [6] P. Misra, "On stabilization of systems with uncertain parameters: An interval arithmetic approach," Proc. American Control Conference, pp.657-658, 1989.
 [7] V.L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equation," English translation in Differential Equations, vol.14, pp.1483-1485, 1979.
 [8] N.K. Bose and Y.Q. Shi, "A simple general proof of Kharitonov's generalized stability criterion," IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol.34, Oct. pp.1233-1237, 1987.
 [9] B.D.O. Anderson, E.I. Jury, and M. Mansour, "On robust Hurwitz polynomials," IEEE Trans. Automat. Contr., June 1987.
 [10] B.C. Kuo, Automatic Control Systems, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1987.

[11] B. Porter, Stability Criteria for Linear Dynamical Systems, Oliver & Boyd, London, 1967.
 [12] Y.C. Soh and Y.K. Foo, "Generalization of strong Kharitonov theorems to the left sector," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.35, pp.1378-1382, no.12, Dec. 1990.
 [13] Y.K. Foo and Y. C. Soh, "Strong Kharitonov theorems for low-order polynomials," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.37, pp.1816-1820, no.11, Nov. 1992.
 [14] C.S. Beightler, D.T. Phillips, and D.J. Wilde, Foundations of Optimization, 2nd Ed., Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1981.
 [15] R.E. Kalman, 1964, Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. J. Basic Engineering., Ser. D, 86, 51.
 [16] D.G. Luenberger, Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley, Massachusetts.
 [17] S. Gutam and F. Vaisberf, "Root clustering of a real matrix in a sector," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-29, pp.251-253, no.3, March 1984.
 [18] H. Chaplat and S. P. Bhattacharyya, "A generalization of Kharitonov's theorem: Robust stability of interval plants," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.34, pp.306-311, no.3, March 1989.

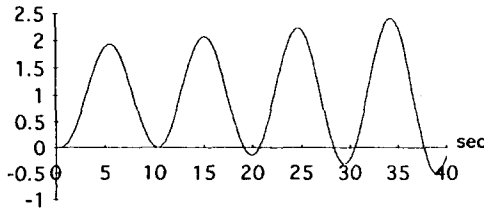


그림 A.1 $a=0.5, c_2=-1.7$ 일 경우 $(1.25s+0.5)/(s+3.25)$ 인 보상기를 포함한 페루프 시스템의 단위 계단 응답

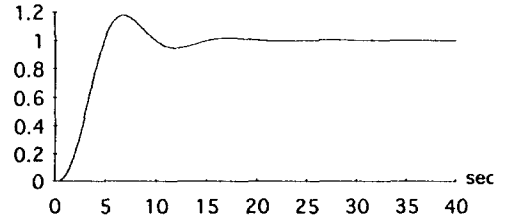


그림 A.2 $a=0.5, c_2=-1.7$ 일 경우 $(1.2456s+0.29118)/(s+3.28134)$ 인 보상기를 포함한 페루프 시스템의 단위 계단 응답

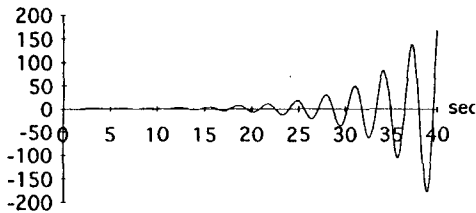


그림 A.3 $a=0.5, c_2=-0.8$ 일 경우 $(2.66984s+1)/(s+3.975752)$ 인 보상기를 포함한 페루프 시스템의 단위 계단 응답

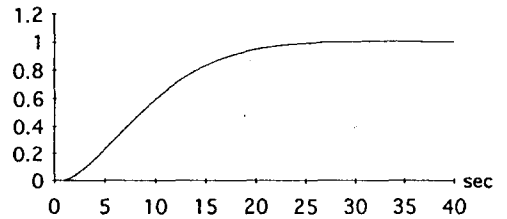


그림 A.4 $a=0.5, c_2=-0.8$ 일 경우 $(2.648s+0.236)/(s+6.226)$ 인 보상기를 포함한 페루프 시스템의 단위 계단 응답

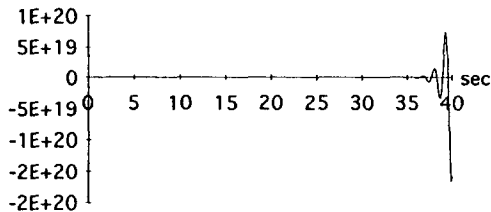


그림 A.5 $a=1.5, c_2=-0.8$ 일 경우 $(2.66984s+1)/(s+3.975752)$ 인 보상기를 포함한 페루프 시스템의 단위 계단 응답

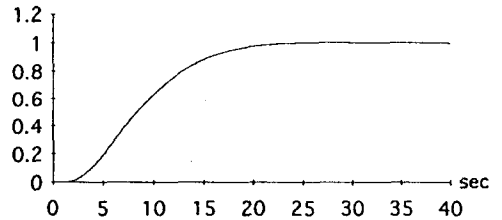


그림 A.6 $a=1.5, c_2=-0.8$ 일 경우 $(2.648s+0.236)/(s+6.226)$ 인 보상기를 포함한 페루프 시스템의 단위 계단 응답