

Interval Plants의 최대평가함수 해석: 가설

김영철*, 허명준**

*충남대학교 전자공학과, **순천향대학교 전기공학과

The Worst Performance Analysis of Interval Plants: A Conjecture

Young Chol Kim*, Myung Joon Hur**

*Dept. of Electronics, Chungbuk National Univ.

**Dept. of Elec. Eng., Sooncheonhyang Univ.

ABSTRACT

As the worst-case analysis for interval plants, a conjecture whether the supremum of the integral of square error (ISE) is attained at the extreme point such as vertices, Kharitonov vertices, CB segment, and edges is suggested. We present a sufficient condition for which the worst performance index occurs at one of vertices of uncertain parameter space. Numerical examples are also given.

1. 서론

uncertain parameter를 갖는 선형 시불변 피드백 제어계에 대해 동작상태나 특성에 대한 한계조건을 구하는 것은 robust control분야에서 매우 관심있는 문제중 하나이다.

특히, Kharitonov 정리[1]로부터 촉발된 interval plant (전달함수의 각 계수가 유한 범위의 불확실성을 갖는 시스템으로 정의됨: 2.1절 참조)의 robust stability에 대한 최근 연구결과들은 매우 주목할 만하다[2,3,4]. 예로서, interval plant의 robust stability는 16개의 Kharitonov systems(분모, 분자 다항식이 각각의 Kharitonov vertices로 대체된 모델)에 의해 조사될 수 있으며, 일반적인 종속 보상기의 interval plant에 대한 강인성 결정은 단지 32개의 CB segment에 의해 해석된다. 또한 이들의 주파수영역 특성도 CB시스템과 Kharitonov 시스템의 주파수 응답특성에 의해 한정된다. 다시말해 interval plant를 포함하는 피드백 시스템의 Nyquist / Bode Plots의 응답곡선이 CB systems이나 Kharitonov systems으로 구성된 피드백 시스템의 그것들내에 놓이게 된다. 이러한 extremal properties는 시간영역응답에 적용되어, interval plant의 정상상태 응답한계는 8개의 Kharitonov vertices 만을 이용하여 구할 수 있으나 [5], 스텝입력에 대한 과도응답에는 적용될 수 없음이 밝혀졌다 [6]. 본 논문의 목적은 interval plant를 포함하는 피드백 시스템에서 평가함수들, integral square error (ISE)로 정의하였을 때, 최대 ISE가 vertices, Kharitonov vertices, CB segments중 특정 extremal systems에서 발생하는지를 밝히는 데 있다(이것을 이하 "가설"이라 칭함). 시간영역응답에 대한 또 하나의 extremal property를 구명하려는 것으로, (현재까지의 연구결과가 전체 안정도의 강인성 만족에만 부분적인 해를 갖고 있으므로) 이 문제의 해결은 robust parametric stability에서 H_∞ optimal control에 대응되는 효과를 줄 수 있다. 다시말해, 1단계에서 robust stability이론을 적용하여 안정도가 보장되는 제어기의 계수영역을 구하고, 다음 단계에서는 허용영역 안에서 최대평가함

수를 최소화 하는 제어기 설계가 가능해진다. 현 단계에서는 위의 가설은 아직 open question으로 있으며, 본 논문에서는 최대 ISE(the worst performance)가 vertices중에 발생하기 위한 충분조건이 제시된다. 이 결과만으로도 일반적인 저차제어기의 주어진 계수섭동에 대해 최대평가함수를 쉽게 구할 수 있음을 몇가지 예로서 보인다.

2. 정의 및 예비결과

2.1 정의

다음의 실계수를 갖는 m차 다항식을 고려한다.

$$f(s) = f_0 + f_1s + \dots + f_ms^m \quad (1)$$

여기서, $f_i \in [f_i^-, f_i^+]$ $i = 0, 1, \dots, m$

식(1)의 다항식을 interval polynomial이라 하며, 그 다항식군(a family of polynomial)을 다음식으로 표기하기로 한다.

$$\mathcal{F} := \{f(s) \mid f \in F\}$$

여기서, $f = [f_0 \ f_1 \ \dots \ f_m]$

$$F := \{f \mid f_i^- \leq f_i \leq f_i^+, i = 0, 1, \dots, m\}$$

정의 2.1(vertex polynomial): 식(1)에 대해 \mathcal{F} 는 많아야 2^{m+1} 개의 극점(vertex point)을 가지며 k번째의 극점 다항식은 다음식으로 표현한다.

$$f_k^V(s) = f_0^k + f_1^k s + \dots + f_m^k s^m, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{m+1} \quad (2)$$

여기서, $f_i^k = f_i^-$ 또는 f_i^+ , $i = 0, 1, \dots, m$

그리고, vertex 다항식군을 \mathcal{V} 라 놓는다.

정의 2.2(Kharitonov polynomials): 식(1)의 interval polynomial의 vertices \mathcal{V} 중 다음 4개 다항식 set을 Kharitonov polynomials 이라하고, \mathcal{K} 로 표기한다.

$$\begin{aligned} K_1(s) &= f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + f_4 s^4 \dots \\ K_2(s) &= f_0 + f_1^+ s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + f_4 s^4 \dots \\ K_3(s) &= f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3^+ s^3 + f_4 s^4 \dots \\ K_4(s) &= f_0 + f_1 s + f_2 s^2 + f_3 s^3 + f_4^+ s^4 \dots \end{aligned} \quad (3)$$

<그림1> 과 같은 단 입력력(SISO) 피드백 시스템에서 전달함수가 $g(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ 일 때, 다음을 정의한다.

$$N := \{ n(s) \mid n(s) = n_0 + n_1 s + \dots + n_p s^p, n_i \in [n_i^-, n_i^+], i=0,1,\dots,p \} \quad (4)$$

$$D := \{ d(s) \mid d(s) = d_0 + d_1 s + \dots + d_q s^q, d_j \in [d_j^-, d_j^+], j=0,1,\dots,q \}$$

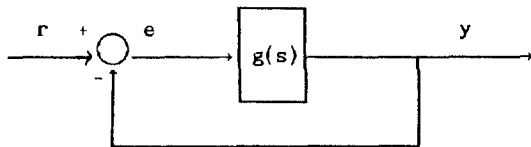


그림1. 피드백 시스템

정의 2.3 (Interval plants/Kharitonov systems) :

$$G := \{ g(s) \mid (n(s), d(s)) \in N \times D \} \quad (5)$$

$$G^k := \{ g(s) = \frac{K_j^N(s)}{K_j^D(s)}, i, j = \{ 1, 2, 3, 4 \} \} \quad (6)$$

여기서 $K_j^N(s)$ 와 $K_j^D(s)$ 는 각각 $n(s)$ 와 $d(s)$ 의 Kharitonov polynomials이다.

G^k 를 interval plant라 정의하며, 16개의 플랜트 set인 G^k 를 G 의 Kharitonov plant라 부르기로 한다.

정의 2.4 (CB subset)

4개의 Kharitonov 다항식으로 부터 조합되는 다음 4개의 선분을 segment 라 한다.

$$S := \{ \lambda K_1(S) + (1-\lambda)K_j(S) \mid \lambda \in [0,1], (i,j) \in \{ (1,2), (1,3), (2,4), (3,4) \} \} \quad (7)$$

Interval plants의 분모, 분자다항식 $d(s)$ 와 $n(s)$ 에 대응하는 Kharitonov segments를 S_D 와 S_N 라하면 CB subset은 다음식으로 정의된다.

$$(N \times D)_{CB} := \{ (n(s), d(s)) \mid n(s) \in K^N, d(s) \in S^D \text{ or } n(s) \in S^N, d(s) \in K^D \} \quad (8)$$

정의 2.5 (Exposed edges) :

m dimension box F 에 대해 다음의 vertices간 line segments의 set을 $f(s)$ 의 exposed edges라 한다.

$$E^F := \{ f^a(s) \mid f^a(s) = f_0^a + f_1^a s + \dots + (\lambda f_m^a + (1-\lambda) f_m^b) s^m + f_{m+1}^a s^{m+1} + \dots + f_{m+k}^a s^{m+k}, k = + \text{ or } -, * = - (k \text{ 가 + 인 때}), i = 0, 1, \dots, q \}$$

여기서, exposed edges의 수 $q = (m+1)2^m$

정의 2.6(The worst Performance Index(WPI)):

다음의 제곱오차적분(integral of the square of the error: ISE)을 interval plants군에 대한 최대성능지수(WPI)로 정의한다.

$$I_{w.p.i} = \max_{g \in G} \int_0^{\infty} e^2(t) dt \quad (10)$$

2.2 계수 행렬식을 이용한 ISE의 계산

그림1의 피드백 시스템에서, $E(s)$ 를 $e(t)$ 의 라플라스 변환함수라 하면 Parseval정리에 의해 다음관계가 있다.

$$I = \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{V(s)}{A(s)A(-s)} ds \quad (11)$$

여기서, 기준 입력으로 단위 스텝 함수를 고려하면 (즉, $R(s) = 1/s$),

$$E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{d(s)}{s(d(s)+n(s))} \quad (12)$$

$$V(s) = B(s)B(-s) = v_{m-1}S^{2(m-1)} + v_{m-2}S^{2(m-2)} + \dots + v_0 \quad (13)$$

$$A(s) = d(s)+n(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0 \quad (14)$$

$$B(s) = d(s)/s$$

식(14)는 다음 가정(A2)에 의해 자명하다.

가정 (A1) 폐루프 시스템은 모든 $g(s) \in G$ 에 대해 점근안정이다. 즉, $1 + g(s) = 0, g(s) \in G$ 의 모든 특성근은 음(-)의 실수부를 갖는다.

(A2) 유한 크기의 ISE가 보장되기 위해서, $g(s)$ 는 최소한 type1(원점에 1개의 극을 가짐)시스템이다.

가정(A1)이 $g(s) \in G$ 에 대해 만족하는지를 검증하는데는 Kharitonov like stability가 매우효과적이다. 다항식 $A(s)$ 는 interval polynomial family이거나 polytopic polynomial family로 나타나며, 각각 Kharitonov 정리와 Edges정리 [1-3]에 의해 용이하게 조사될 수 있다.

이제 (11)과 같은 시간영역에서의 mean square signal 또는 복소함수 적분을 단지 두개의 행렬식비로 동치시키는 매우 유용한 관계식을 인용코자 한다.

보조정리 2.5 [7, 8]: 식(11)에서, I 는 다음공식으로 계산된다.

$$I = \frac{(-1)^{m+1}}{2 a_m} \cdot \frac{|H_v|}{|H|} \quad (15)$$

여기서, $|H|$ 는 다항식 $A(s)$ 의 Hurwitz 행렬식이며, $|H_v|$ 는 $|H|$ 의 첫행을 식(13)의 계수 벡터 v 로 대체시킨 행렬식이다.

즉, m =기수차수일때,

$$|H| = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ & & & & & & \vdots \end{vmatrix} \quad (16)$$

$$|H_v| = \begin{vmatrix} v_{m-1} & v_{m-2} & \dots & v_1 & v_0 \\ a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ 0 & a_m & a_{m-2} & \dots & a_1 & \dots & 0 \\ & & & & & & \vdots \end{vmatrix} \quad (17)$$

식 (15)는 단지 interval plants의 계수만으로 closed form으로 표현된 식이기 때문에 계수섭동에 따른 ISE의 값 변화를 고려하기가 용이한 형태임을 알 수 있다.

$$d = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_p] , \quad n = [n_0 \ n_1 \ \dots \ n_q]$$

라 놓으면, interval systems의 최대성능지수 I_w 를 구하는 문제는 (12)~(15)로부터 다음식으로 정리된다.

$$I_w = \max_{g \in G} \int_0^{\infty} e^2(t) dt = \max_{g \in G} \frac{(-1)^{m+1}}{2 a_m} \frac{|H_V|}{|H|}$$

$$= \max_{\substack{d \in D \\ n \in N}} \frac{(-1)^{m+1} |H_V|}{2 a_m |H|} = \max_{\substack{d \in D \\ n \in N}} I(d, n) \quad (18)$$

여기서, $D := \{d \mid d_i \in [d_i^-, d_i^+], i = 0, 1, \dots, p\}$

$$N := \{n \mid n_j \in [n_j^-, n_j^+], j = 0, 1, \dots, q\}$$

이제 서론에서 언급하였듯이 interval systems의 여러가지 extremal properties가 WPI에도 적용된다는 가설하에, 다음과 같은 매우 흥미있는 문제가 제기된다.

문제1 : <그림1>의 interval systems의 G에 대한 WPI값을 계산하라.

문제2 : <그림1>의 G에 대한 WPI값이 다음 중 하나를 만족하기 위한 조건은 무엇인가?

$$(i) \quad I_w < \max_{g \in G} I(g) = \max_{\substack{d \in D \\ n \in N}} I(d, n) \quad (19)$$

$$(ii) \quad I_w < \max_{g \in G} I(g) = \max_{\substack{d \in D \\ n \in K}} I(d, n) \quad (20)$$

$$(iii) \quad I_w < \max_{g \in G^{cb}} I(g) = \max_{(n, d) \in (N \times D)^{cu}} I(d, n) \quad (21)$$

$$(iv) \quad I_w < \max_{g \in G^*} I(g) \quad (22)$$

문제3 : <그림1>의 피드백시스템에서 $g(s) = c(s)p(s)$ 일때 (여기서, $c(s)$ 는 선형보상기 이고 $p(s)$ 는 interval plants임) <문제2>의 식(19)~(22)를 만족하기 위한 조건은 무엇인가?

<문제1>을 풀기위해 식(10)의 정의대로 계산한다는 것은 간단한 시스템이 아닌한 거의 불가능하다. 그러나 식(18)은 변수 벡터 d 와 n 에 대해 최적화 기법을 적용하면 $I(d, n)$ 의 최소, 최대값을 계산할 수 있다. 그러나 일반적으로 이러한 방법은 conservative하다. 다음절에서는 <문제2>와 <문제3>에 대한 한 해를 제시한다.

3. 주요결과

<문제2>의 (i)은 interval systems의 WPI가 $g(s)$ 의 각 parameters의 vertices에 발생하기 위한 조건은 무엇인가이다. 먼저 convex함수에 대한 다음정리를 인용한다.

정리 3.1 [9] : J 를 open convex set $C \subset R^2$ 에 대해 두변연속 미분가능인 실변수의 함수라할때, $f(x)$ 가 $x \in C$ 에 대해 convex이기 위한 필요충분조건은 J 의 Hessian matrix가 모든 $x \in C$ 에

대해 positive semi-definite(p. s. d)이어야한다. ***

정리 3.2[9] : J 는 convex함수이고, C 는 non-empty polyhedral convex set이며 또한 $C \subseteq \text{dom}f$ (J 의 effective domain)이다. 그리고 J 는 이러한 C 에 대해 유한크기를 갖는다고 가정한다. 그러면 C 에 대한 J 의 Supremum은 C 의 extremum points중의 하나에서 존재한다. ***

여기서, interval point의 uncertain parameter vector를 정의하면,

$$x^T = [d_0 \ d_1 \ \dots \ d_p \ n_0 \ n_1 \ \dots \ n_q]$$

$$Q := \{x \mid x_i \in D, i = 0, 1, \dots, p+1\}$$

$$x_i \in N, i = p+2, p+3, \dots, p+q+2 \}$$

Q 는 $p+q+2$ dimension hyperrectangular box이다.

그리고 M 를 성능지수함수 $I(x) = I(d, n)$ 의 Hessian matrix라 놓는다. 즉,

$$M = [m_{ij}(x)], \quad m_{ij}(x) = \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (23)$$

정리 3.3 : <그림1>의 interval systems에서, 만약 M 의 모든 principal minors가 box Q 에 대해 nonnegative이면 I_w 는 Q 의 vertices중에서 발생한다. 즉,

$$\max_{g \in G} I(g) < \max_{g \in G^*} I(g) \quad (24)$$

또는,

$$\max_{\substack{d \in D \\ n \in N}} I(d, n) < \max_{\substack{d \in V \\ n \in V}} I(d, n)$$

증명 : $I(d, n)$ 은 가정 (A1)과 (A2)에 의해 유한크기의 실수로나 타난다. 따라서 I 의 Hessian matrix M 은 또한 Hermitian matrix이다. Hermitian M 의 모든 principal minors가 $x \in Q$ 에 대해 nonnegative이기만 하면 M 은 positive semi-definite(p. s. d)이다. 따라서 위 정리의 p. s. d조건을 만족하는 평가지수 I 는 <정리 3.1>에 의해 convex function이다. 그리고 $p+q+2$ dimension hyperrectangle Q 는 $p+q+2$ dim. polyhedron C 의 subset이므로 <정리 3.2>에 의해 I 의 최대치인 I_w 는 Q 의 vertices중에서 일어난다. ***

부언 : <정리 3.3>은 문제 2-(i)의 한 해를 위한 충분조건이다. 따라서 이 조건을 만족치 않더라도 Q 의 extreme points에 I_w 가 일어날수도 있다. 또한 <정리 3.3>은 문제 3-(i)에도 마찬가지로 적용된다.

4. 수치 예

<정리 3.3>을 적용한 수치예로서 다음<예제 3.1>은 문제 2-(i)의 경우이다.

예제 4.1 : <그림 1>에서

$$g(s) = \frac{k}{s(s+b)}$$

여기서 $b \in [0.8, 15]$, $k \in [1.0, 20]$ 이다.

단위시스템응답에 대한 최대평가지수 I_w 를 구하라.

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+g(s)} = \frac{s+b}{s^2+bs+k} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$V(s) = B(s)B(-s) = -s^2+b^2$$

$$A(s) = a_2s^2+a_1s+a_0 = s^2+bs+k$$

$A(s)$ 는 Hurwitz다항식이므로 가정 (A1)을 만족한다.

식 (16), (17)로부터

$$|H| = \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & k \end{vmatrix} = bk$$

$$|H_v| = \begin{vmatrix} -1 & b^2 \\ 1 & k \end{vmatrix} = -k-b^2$$

$$I(b,k) = \frac{(-1)^{2+1}}{2a_2} \cdot \frac{|H_v|}{|H|} = \frac{k+b^2}{2bk}, (b,k) \in Q$$

식 (23)에 대응하는 Hessian행렬 M 은

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial b^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial b \partial k} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial k \partial b} & \frac{\partial^2 I}{\partial k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{2k^2} \\ -\frac{1}{2k^2} & \frac{b}{k^3} \end{bmatrix}$$

행렬 M 의 principal minor는 m_{11} , m_{22} , $|M|$ 이고, 가정 (A1)에 의해 $b > 0$, $k > 0$ 이므로 이들이 nonnegative이기 위한 조건은 다음과 같이 얻어진다.

$$4k^- \geq b^{+2}$$

위 문제의 수치가 이 조건을 만족하므로 $I(b,k)$ 는 convex function이다. 그러므로 WPI I_w 는 Q 의 vertices중에 나타난다. 즉,

$$I_w = \max \{ I(b^-,k^-), I(b^+,k^+), I(b^+,k^-), I(b^-,k^+) \}$$

$$\Rightarrow \therefore I_w = I(b^+, k^-) = 1.08$$

이 예제는 간단한 경우로 $I(b,k)$ 에 대해 컴퓨터 최적화 기법을 이용해서도 간단히 검증된다.

예제 4.2 : <그림 1>에서 다음의 2차 interval system을 고려한다.

$$g(s) = \frac{k}{s(s^2+a_1s+a_0)}$$

여기서 $k \in [20, 22]$, $a_0 \in [11, 13]$, $a_1 \in [4.5, 5.5]$

단위시스템입력에 대한 최대평가지수 I_w 를 구하라.

$$E(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{s^2+a_1s+a_0}{s^3+a_1s^2+a_0s+k}$$

$$V(s) = B(s)B(-s) = s^4 + (2a_0 - a_1^2)s^2 + a_0^2$$

$A(s)$ 에 대한 Hurwitz determinant는

$$|H| = \begin{vmatrix} a_1 & k & 0 \\ 1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & k \end{vmatrix} = a_0 a_1 k - k^2$$

$$|H_v| = \begin{vmatrix} 1 & (2a_0 - a_1^2) & a_0^2 \\ 1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_1 & k \end{vmatrix} = -a_0 k + a_0^2 a_1 + a_1^2 k$$

$$I(a_0, a_1, k) = \frac{-a_0 k + a_0^2 a_1 + a_1^2 k}{2(a_0 a_1 k - k^2)}$$

$$x^T = [x_1, x_2, x_3] = [a_0, a_1, k]$$

$I(x)$ 의 Hessian 행렬 M 은

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$m_{ij}(x)$ 의 함수표기는 생략하고, $x \in Q$ 에 대해 M 의 각 principal minors의 최소값을 계산하면 다음과같이 모두 nonnegative이므로 $I(s)$ 는 convex function이다.

$$m_{11} = 0.0067, m_{22} = 0.0027, m_{33} = 0.0015$$

$$m_1 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = 1.8 \times 10^{-5}$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} = 5.28 \times 10^{-9}$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} = 4.76 \times 10^{-9}$$

$$|M| = 5.99 \times 10^{-9}$$

$$\text{따라서 } I(w) = \max_{g \in G} I(g)$$

$$= I(k^-, a_0^-, a_1^+) = 0.6485$$

예제 4.3 : 문제 3-(i)의 경우로, 2차 interval plant $p(s)$ 와

PI제어기도 구성된 피드백 시스템을 고려한다.

$$p(s) = \frac{k}{s^2+a_1s+a_0}, a_1 \in [4.5, 5.5]$$

$$a_0 \in [9, 11]$$

$$k \in [20, 22]$$

$$c(s) = \frac{k_0s+k_1}{s}$$

단위시스템입력에 대한 최대평가함수 I_w 를 구하라.

$$g(s) = c(s)p(s) = \frac{k(k_0s+k_1)}{s(s^2+a_1s+a_0)} = \frac{b_1s+b_0}{s(s^2+a_1s+a_0)}$$

여기서 $b_1 = k k_0$, $b_0 = k k_1$

$$E(s) = \frac{R(s)}{s(1+g(s))} = \frac{s^2+a_1s+a_0}{s^3+a_1s^2+(a_0+b_1)s+k_0}$$

$$V(s) = B(s)B(-s) = s^4 + (2a_0 - a_1^2)s^2 + a_0^2$$

앞에와 같은 과정을 봉하면, 16개의 vertices points로부터

$$I(w) = | [a_0^+ \ a_1^- \ b^- \ b_1^-] | = 0.39248 \text{을 얻는다.}$$

5. 결론

Uncertain parameters를 갖는 선형시불변계(interval plants)의 여러가지 worst case analyses에서 많은 경우 Kharitonov vertices, CB segments 그리고 edge등으로 대체되어 해석될 수 있다.

특히 robust stability와 주파수응답특성의 boundary결정에는 interval plants의 extremal properties가 매우 효과적으로 활용될 수 있다.

Kharitonov like theory에 의한 parameter space에서의 robust control design 문제에서는, 강인성(robustness)보장에 대한 부분해는 발표되었으나 아직 H_∞ optimal theory에서와 같은 최적해는 구하지 못한 상태이다. 이를 위해서는 interval systems의 worst performance가 계산될 수 있어야하며, 나아가 worst performance index를 주는 특정 플랜트 model을 구할 수 있다면 이를 근거로 한 robust optimal design이 가능하게 된다. 본 논문에서는 worst performance가 vertices에 나타나는 충분조건을 제시하였다.

ISE를 performance index로 놓고, mean square error식을 복소적분식으로, 복소적분을 parameter space에서의 2개의 행렬식 비로 변환시킨 Mersman의 결과로부터 convex function의 성질을 이용하였다.

Interval system이 고차이고 uncertain parameters의 수가 많아지면, Hessian matrix의 principal minors를 조사하는 일이 conservative하지만, 실제 플랜트가 2차계정도이면 무리한 계산부담은 요구되지 않는다. 몇가지 수치예를 통해 이 결과의 유용성을 보였다.

참고 문헌

1. V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium of a family of systems of linear differential equations," *Differentsial'nye Uravneniya*, vol. 14, pp. 2086 - 2088, 1978.
2. B. R. Barmish, "New tools for robustness analysis," *Proc. 27th IEEE Conf. Decision & Contr.*, Austin, 1988.
3. S. P. Bhattachayya and L. H. Keel, "Robust stability and control of linear and multilinear interval systems," in C. T. Leondes, Ed, *Control and Dynamic Systems*, (Academic Press) vol. 51, pp. 31 - 77, 1992.
4. B. R. Barmish, et al. 3, "Extreme point results for robust stabilization of interval plants with first order compensators," *IEEE Trans. Auto. Contr.* vol. AC-37, No. 6, pp. 797 - 714, 1992.
5. A. C. Bartlett, "Vertex results for the steady-state analysis of uncertain systems," *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Honolulu, 1990.
6. A. C. Bartlett et al. 2, "vertices and segments of interval plants are not sufficient for step reponse analysis," *Systems and Control Letters*, preprints.
7. W. A. Mersman, "Evaluation of an integral occurring in servomechanism theory," *Pacific J. Math.* vol. 3, pp. 627 - 632, 1953.
8. E. I. Jury, *Inners and Stability of Dynamic Systems*, Jhon Wiley & Sons, 1974.
9. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.