

# 비최소 위상 확률 시스템을 대상으로 한 견실한 적응 IMC 제어기

최종호, 김호찬\*

서울대학교 제어계측공학과, 제어계측신기술연구소, 자동화시스템공동연구소

## Robust Adaptive IMC Controller for a Class of Nonminimum Phase Stochastic Systems

Chong-Ho Choi and Ho-Chan Kim\*

Dept. of Control & Instrumentation Eng., Seoul National University  
Automation and Systems Research Institute, ERC-ACI by KOSEF

### Abstract

In this paper, a robust reduced order adaptive controller is proposed based on Internal Model Control (IMC) structure for stochastic linear stable systems. The concept of gain margin is utilized to make the adaptive IMC controller robust. We prove the stability of the proposed adaptive IMC system for stable plants under the assumption that upper bounds for system orders are known. Simulation results show that the proposed method has good performance and stability robustness.

### 1. 서론

모델화되지 않은 운동 (unmodelled dynamics) 이란 플랜트를 실제 차수 보다 낮게 모델링하는 경우 모델에 표현되지 않은 운동을 말한다. 모델화되지 않은 운동은 적응제어 시스템을 불안정하게 할 수 있으므로 [1], 외란 및 모델화되지 않은 운동에 견실한 적응 알고리즘을 개발하는 것은 실제 응용에 매우 중요한 문제가 된다 [2].

IMC 구조 [3]는 페루프내에 모델 (internal model) 을 포함하고 있으므로 플랜트와 모델간의 모델링 오차를 보상할 수 있고 시스템의 성능을 향상시킬 수 있는 유용한 구조이다. 이 때 사용되는 모델은 일반적으로 플랜트보다 저차이며 플랜트의 불안정한 성분을 모두 포함해야 한다는 제한조건이 있으나, 안정한 미지의 플랜트는 이 구조에 쉽게 적용할 수 있다. IMC 구조를 사용한 on-off 형식의 적응제어의 개념은 Guan [4] 등이 사용하였지만, 완벽한 적응제어 시스템을 구성하지는 못하였다. 플랜트 차수가 알려졌을 때, 이 보다 낮은 차수의 견실한 적응 IMC 제어기를 구하는 방법이 최[5]에 의해 제안되었다. 최는 IMC 제어기를 구성할 때 축소차수 모델 (reduced-order model) 을 이용하는데, 이 때 사용되는

축소차수 모델은 BTA (balanced truncation approximation) 방법 [6]을 사용하여 구하고 제어기의 구성은 기존의 방법을 사용하였다.

본 논문에서는 이를 확장하여 플랜트 차수의 상한이 알려진 경우에 이 보다 낮은 차수의 견실한 축소차수 적응 IMC 제어기를 설계하고 적응 시스템의 안정성을 살펴본다. 이 때 이득 여유 개념을 사용하여 시스템의 안정도 견실성을 증진시킨다. BTA 방법은 안정한 고차 모델로부터 안정한 축소차수 모델을 얻을 수 있고 고차와 축소차수 모델간의 모델링 오차의 크기를 계산할 수 있는 장점이 있으나 많은 계산량을 필요로 한다. 본 논문에서는 BTA 방법과 같은 결과를 얻지만 계산량을 상당히 줄일 수 있는 새로운 방법을 제안한다. 마지막으로 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 기존의 방법과 성능을 비교분석한다.

### 2. 매개변수 추정 및 축소차수 모델

단일 입·출력을 갖는 고차의 안정한 플랜트  $G(q^{-1})$  가 있을 때, 플랜트의 입·출력은 다음과 같이 나타낼 수 있다고 가정한다.

$$\begin{aligned} A_n(q^{-1})y_k &= B_n(q^{-1})u_k + C_n(q^{-1})w_k \\ G(q^{-1}) &:= \frac{B_n(q^{-1})}{A_n(q^{-1})} = \frac{b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}}{1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}} \\ C_n(q^{-1}) &:= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_lq^{-l} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $u_k$ 와  $y_k$ 는 각각 차수가  $n$ 인 플랜트의 입·출력이고  $w_k$ 는 평균이 0인 백색잡음 (white noise)이며,  $q^{-1}$ 는 지연 연산자 (delay operator)를 나타낸다. (1)을 회귀식 (regression form)으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y_k &= \theta^T \phi_k + w_k \\ \theta^T &:= [a_1 \dots a_n \ b_1 \dots b_n \ c_1 \dots c_l] \\ \phi_k^T &:= [-y_{k-1} \dots -y_{k-n} \ u_{k-1} \dots u_{k-n} \ w_{k-1} \dots w_{k-l}] \end{aligned} \quad (2)$$

## 2.1. 고차 모델의 매개변수 추정

안정한 적응제어 시스템을 구성하기 위하여 다음과 같은 가정을 하자.

가정 1: 플랜트의 분모, 분자 다항식  $A_n(q^{-1})$ 과  $B_n(q^{-1})$ 은 서로 소 (coprime)이고 플랜트 차수의 상한  $n$ 을 안다. 그리고 다항식  $C_n(q^{-1})$ 의 차수의 상한  $l$  역시 안다고 가정한다.

가정 2:  $C_n^{-1}(q^{-1}) - 1/2$ 은 SPR (strictly positive real) 조건을 만족한다.

가정 3: 플랜트 입력은 다음 조건을 만족한다.

$$0 < \beta I \leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{u}_i \bar{u}_i^T \leq \alpha I, \quad \bar{u}_i^T = [u_i \ u_{i-1} \ \cdots \ u_{i-2n}] \quad (3)$$

가정 4:  $\mathcal{F}_k$ 를 비감소  $\sigma$ -대수 족 (a family of nondecreasing  $\sigma$ -algebra)이라 하면,  $\mathcal{F}_k$ -측정가능한 (measurable) 외부잡음  $w_k$ 는 확률 1로서 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned} E[w_k | \mathcal{F}_{k-1}] &= 0 \\ E[w_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] &= \sigma^2 \\ \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_k^2 &< \infty \end{aligned} \quad (4)$$

이 때 플랜트의 계수  $\theta$ 는 다음과 같은 RELS (recursive extended least squares) 알고리즘 [7]을 사용하여 추정한다.

$$\begin{aligned} \theta_k &= P_k (B_{k-1} \theta_{k-1} + \psi_k y_k) \\ B_k &:= B_{k-1} + \psi_k \psi_k^T, \quad P_k = B_k^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_k^T &:= [-y_{k-1} \ \cdots \ -y_{k-n} \ u_{k-1} \ \cdots \ u_{k-n} \ \bar{w}_{k-1} \ \cdots \ \bar{w}_{k-l}] \\ \bar{w}_k &= y_k - \theta_k^T \psi_k, \quad \psi_k = \hat{\phi}_k + \bar{v}_{k-1}, \quad \hat{w}_k = y_k - \theta_k^T \hat{\phi}_k \\ \hat{\phi}_k^T &:= [-y_{k-1} \ \cdots \ -y_{k-n} \ u_{k-1} \ \cdots \ u_{k-n} \ \hat{w}_{k-1} \ \cdots \ \hat{w}_{k-l}] \end{aligned} \quad (6)$$

이다. 매개변수를 추정할 때 overparametrization 문제를 해결하기 위해 다음과 같이 유한한 외부잡음  $\bar{v}_k$ 를 도입한다 [7].

$$\bar{v}_{k-1} = D_k \bar{v}_k, \quad E[\bar{v}_k | \mathcal{F}_{k-1}] = 0,$$

$$E[\bar{v}_k \bar{v}_k^T | \mathcal{F}_{k-1}] = \sigma_v^2, \quad \sup_k [\bar{v}_k^T \bar{v}_k] \leq \bar{V} < \infty,$$

$$D_k^2 = \text{diag}[\sigma_k^2(n) \ \cdots \ \sigma_k^2(1) \ \sigma_k^2(n) \ \cdots \ \sigma_k^2(1) \ \sigma_k^2(l) \ \cdots \ \sigma_k^2(1)]$$

$$\sigma_k(1) = \text{tr}[\hat{B}_k^{-1}], \quad \hat{B}_k = \hat{B}_{k-1} + \hat{\phi}_k \hat{\phi}_k^T$$

$$\sigma_k(j) = \begin{cases} \text{tr}[\hat{B}_k^{-1}(j)] & \text{for } 1 \leq j \leq L \\ 0 & \text{for } j > L \end{cases}$$

여기서  $\hat{B}_k(j)$ 는  $\hat{B}_k$ 의  $(n+1-j)$ ,  $(n+m+1-j)$ , 그리고  $(n+m+l+1-j)$  행과 열에서  $j$ 개의 열과 행을 소거한 행렬

을 나타내며  $L < \min(n, l)$ 를 만족해야 한다. 매개변수 추정 알고리즘의 수렴성의 증명은 Martingale 접근방법을 사용하여 행해지는데, 가정 1-4를 만족하는 경우에 RELS 알고리즘은 확률 1로서 참 값에 수렴한다 [7]. 페루프 시스템에서 직접 매개변수를 추정하는 경우에는 플랜트의 입력은 주어진 제어 법칙에 따라 결정되므로, 우리는 외부에서 주어지는 입력을 통해서만 충분한 주파수 성분을 제공할 수 있다. 가정 3을 만족시키기 위해 우리는 외부 잡음을 제어 입력에 추가한다. 고차 모델의 초기치는 안정한 모델로 잡고, 스텝  $k$ 에서 얻은 매개변수를 통해 구한 고차 모델을  $G(k, q^{-1}) := B(k, q^{-1})/A(k, q^{-1})$ 로 놓는다.

## 2.2. 축소차수 모델의 추정

고차의 ARMA 모델을 근사화시키는 축소차수 모델을 BTA 방법을 통해 얻으려면 다음 두 개의 Lyapunov 방정식을 풀어야 한다.

$$\begin{aligned} AW_c A^T - W_c + bb^T &= 0 \\ A^T W_o A - W_o + c^T c &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $A := [-a_n e_n \ (e_1 - a_{n-1} e_n) \ \cdots \ (e_{n-1} - a_1 e_n)]$ ,  $b := e_n$ , 그리고  $c^T := \sum_{i=1}^n b_i e_{n+1-i}$ 인데,  $e_i$ 는 단위행렬  $I_n \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 의  $i$ 번째의 컬럼(columb) 벡터를 나타낸다. 본 논문에서는 플랜트의 계수들로부터 직접 Lyapunov 방정식의 해를 유도한다. 우선 시스템  $G(q^{-1})$ 에 대하여 Jury array를 통하여 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned} a_{k-1,i} &= a_{k,i} - \alpha_k a_{k,k-i}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1 \\ \alpha_k &:= a_{k,k}/a_{k,0}, \quad k = n, n-1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (8)$$

이 때 초기치는  $a_{n,i} = a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) 이고  $a_0 = 1$ 이다. 위에서 주어진 방정식이 어떤 의미를 가지려면 모든 계수  $a_{k,0}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ )가 0이 아닌 값을 가져야 하는데, 다항식  $A_n(q^{-1})$ 이 안정하면 모든 계수가  $a_{k,0} > 0$ 를 만족해야 한다 [8]. 불안정한 시스템에 대하여  $a_{k,0} = 0$ 이 되는 계수가 존재하면 위의 과정을 중지한다. 다음의 결과는 플랜트의 분모 다항식  $A_n(q^{-1})$ 과 분자 다항식  $B_n(q^{-1})$ 의 관계를 나타낸다.

다음의 관계를 만족하는 행렬  $M$ 은

$$MA = A^T M, \quad Mb = c^T \quad (9)$$

유일하고 다항식  $A_n(q^{-1})$ 과  $B_n(q^{-1})$ 로 이루어진 Bezoutian 행렬이 된다 [9]. 이 때 행렬  $M$ 의  $(i, j)$ 번째 항  $M_{i,j}$ 은 다항식  $(A_n(x)B_n(y) - B_n(x)A_n(y))/(x-y)$ 에서  $x^{i-1}y^{j-1}$  항의 계수로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M_{i,j} = \sum_{k \geq 1} (a_{n-i+1-k} b_{n-j+k} - b_{n-i+1-k} a_{n-j+k}). \quad (10)$$

이 때 플랜트의 계수들로부터 얻을 수 있는 Lyapunov 행렬 방정식의 해는 다음과 같다.

정리 1 [10]:  $a_{k,0} \neq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ 인 조건하에서, 상부 삼각 (upper triangular) 행렬  $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 와 대각 (diagonal) 행렬  $D \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 를 다음과 같이 정의할 때

$$\begin{aligned} P_{i,j} &= a_{n-j,j-i}, \quad j = i, i+1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ D_{i,i} &= (1 - \alpha_i^2)^{-1} \cdots (1 - \alpha_n^2)^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

Lyapunov 행렬 방정식 (7)의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} (i) \quad W_c &= (P^T D P)^{-1}, \\ (ii) \quad W_o &= M (P^T D P)^{-1} M. \end{aligned} \quad (12)$$

■

BTA 방법은 시스템을 평형되게 나타낼 수 있으므로 상태 방정식 (state-space equation)을 이용하여 시스템을 설계할 때는 상당히 유용한 방법이지만 많은 계산량을 요구한다. 본 논문에서와 같이 축소차수 모델을 구하기 위한 목적일 때는 cross Gramian을 사용하여 쉽게 축소차수 모델을 구할 수 있다. 다음의 Lyapunov 방정식의

$$A W_{co} A - W_{co} + bc = 0 \quad (13)$$

해인 cross Gramian 행렬  $W_{co}$ 는 다음과 같다

$$W_{co} = (P^T D P)^{-1} M. \quad (14)$$

행렬  $W_{co}$ 의 고유치는 유사 변환 (similarity transformation)과 관계없이 일정하며, Hankel 특이치는

$$\sigma_i = |\lambda_i(W_{co})|, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

이다. 이 때 다음과 같이  $W_{co}$ 를 블록 대각행렬화 (block diagonalization)시킬 수 있는 변환  $T$ 를 구한다.

$$T^{-1} W_{co} T = \begin{pmatrix} W_{co}^b & 0 \\ 0 & W_{co}^s \end{pmatrix}$$

여기서  $W_{co}^b \in \mathcal{R}^{r \times r}$ ,  $W_{co}^s \in \mathcal{R}^{(n-r) \times (n-r)}$  이고  $\lambda(W_{co}^b) = \{\lambda_j(W_{co}), j = 1, \dots, r\}$ ,  $\lambda(W_{co}^s) = \{\lambda_j(W_{co}), j = r+1, \dots, n\}$ 이다. 행렬  $T$ 와  $T^{-1}$ 를 다음과 같이 분리하면

$$T = \begin{pmatrix} T_b & T_s \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = V = \begin{pmatrix} V_b \\ V_s \end{pmatrix} \quad (15)$$

로 나타낼 수 있는데, 여기서

$$\begin{pmatrix} V_b \\ V_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_b & T_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

이다.  $T$ 를 사용하여 시스템을 변환하면 다음과 같은 상태공간의 축소차수 모델을 얻을 수 있다

$$(A_b, b_b, c_b) = (V_b A T_b, V_b b, c T_b). \quad (16)$$

이 과정을 몇 개의 스텝으로 나누어 살펴보자.

스텝 1: 행렬  $P$ ,  $D$  그리고  $M$ 을 (10)과 (11)에서 구하고, (14)에서  $W_{co}$ 를 계산한다.  $P$ 를 통하여 시스템의 안정성을 판별할 수 있고  $P$ 가 상부 삼각 행렬이므로  $P^T K = M$ 에서  $K$ 를 구하고  $D P W_{co} = K$ 에서  $W_{co}$ 를 계산하면  $P$ 의 역행렬을 구하는 과정이 필요치 않는다.

스텝 2: 행렬  $W_{co}$ 의 ORSF (ordered real Schur form)를 계산한다.

$$Q^T W_{co} Q = W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ 0 & W_{22} \end{pmatrix} \quad (17)$$

여기서  $W_{co}$ 의 고유값은 행렬  $W$ 의 대각선에 나타나는데, 고유값이 크기가 큰 순서로 배열된다.  $W_{11}$ 과  $W_{22}$ 는 모두 상부 삼각 행렬이고 각각  $(r \times r)$ 과  $((n-r) \times (n-r))$ 인 행렬이다.

스텝 3: 다음의 Sylvester 방정식을 풀어  $X$ 를 구한다.

$$W_{11} X - X W_{22} + W_{12} = 0$$

스텝 4: (17)의 양변에 다음과 같은 nonsingular 행렬  $E$ 를 곱하면

$$E^{-1} Q^T W_{co} Q E = \begin{bmatrix} W_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} I_r & X \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (18)$$

이 성립한다.  $Q = [Q_1 \quad Q_2]$ ,  $Q_1 \in \mathcal{R}^{n \times r}$ 라 두면, (15)에서  $T_b = Q_1$ 과  $V_b = Q_1^T - X Q_2^T$ 를 얻을 수 있다. 따라서 (16)를 전달함수 형태로 나타내면

$$G_r(q^{-1}) = \frac{B_r(q^{-1})}{A_r(q^{-1})} = c_b (qI - A_b)^{-1} b_b \quad (19)$$

이 되는데, BTA 방법으로 구할 때와 같은 결과를 얻는다 [11].

이 때  $\sigma_1 \geq \cdots \sigma_r > \sigma_{r+1} \geq \cdots \sigma_n > 0$ 이면, 안정한 축소차수 모델  $G_r(q^{-1})$ 은 유일하게 결정되고  $\|G(q^{-1}) - G_r(q^{-1})\| \leq 2(\sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n)$ 의 관계가 성립한다.

가정 5: 축소차수 모델의 차수  $r$ 은 플랜트의 Hankel 특이치  $\sigma_i$  ( $\sigma_i \leq \sigma_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ )중에서  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ 이 되도록 선택한다.

### 3. IMC 구조의 견실한 제어 시스템

플랜트가 알려지지 않은 경우, IMC 구조를 사용한 견실한 제어 시스템은 그림 1과 같이 나타난다. 이 때 입력  $u_k$ 는 다음과 같은 관계식을 만족시킨다.

$$u_k = H_r(q^{-1}) (y_k^* - y_k + G_r(q^{-1}) u_k) \quad (20)$$

여기서  $y_k^*$ 는 외부에서 주어지는 기준입력이다. 플랜트를 모델링한  $r$ 차의 안정한 축소차수 모델 (19)를 다음과 같은 형태로 나타내자.

$$G_r(q^{-1}) := \frac{b_1 q^{-1} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - z_i q^{-1})}{A_r(q^{-1})} \quad (21)$$

여기서  $b_1 \neq 0$  이라고 가정하는데,  $b_1 = 0$ 인 경우에는  $b_1$  대신 0이 아닌 최초 분자 항의 계수를 사용한다. 고차의 다항 방정식의 근을 구하는 것은 어렵지만, 3차 이하인 다항식의 근은 근의 공식을 통해 쉽게 얻을 수 있다. 안정한 IMC 제어기  $H_r(q^{-1})$ 은 Guan [4]이 제안한 방법으로 다음과 같이 택한다.

$$H_r(q^{-1}) := \prod_{i=1}^{r-1} \frac{1 - \hat{z}_i}{1 - z_i} \frac{A_r(q^{-1})}{b_1 \prod_{i=1}^{r-1} (1 - \hat{z}_i q^{-1})} \quad (22)$$

여기서

$$\hat{z}_i = \begin{cases} z_i, & |z_i| \leq 1 \\ 1/z_i, & |z_i| > 1. \end{cases} \quad (23)$$

이다. 플랜트와 축소차수 모델이 일치하는 경우에 제어기  $H_r(q^{-1})$ 는  $H_2$  최적 제어기로 밝혀져 있다. 플랜트와 모델간의 모델링 오차가 존재하는 경우 전체 폐루프 시스템은 다음과 같다.

$$y_k = \frac{H_r(q^{-1})G(q^{-1})}{1 + H_r(q^{-1})(G(q^{-1}) - G_r(q^{-1}))} y_k^* + \frac{1 - H_r(q^{-1})G_r(q^{-1})}{1 + H_r(q^{-1})(G(q^{-1}) - G_r(q^{-1}))} w_k.$$

이 때  $H_r(1) = 1/G_r(1)$ 이므로 d.c. 이득은 1로써 스텝 입력에 대한 안정상태에서의 출력오차는 0이 되지만 폐루프 시스템의 안정도는 보장되지 않는다. 다만 플랜트와 축소차수 모델 및 제어기가 모두 안정한 경우, 다음 조건을 만족하면 전체 시스템의 안정도는 보장된다.

$$\|H_r(q^{-1})(G(q^{-1}) - G_r(q^{-1}))\| < 1 \quad (24)$$

여기서  $\|\cdot\|$ 는  $L_\infty$  노름 (norm)을 나타낸다. 제어기  $H_r(q^{-1})$ 만 사용하는 경우 플랜트와 모델간의 모델링 오차로 인하여 (24)의 관계가 만족되지 않을 수 있으므로, 제어기에 다음과 같은 1차의 필터  $F_f(q^{-1})$ 를 추가한다.

$$F_f(q^{-1}) := (1 - \alpha) \frac{\beta + (1 - \beta)q^{-1}}{1 - \alpha q^{-1}}, \quad (25)$$

$$0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta \leq 1. \quad (26)$$

필터  $F_f(q^{-1})$ 는  $|q| = 1$ 에서 크기가  $|F_f(q^{-1})| \leq 1$ 이고,  $F_f(1) = 1$ 이므로 d.c. 이득은 1을 만족하는 저주파 통과 필터 (low-pass filter)가 된다. 필터가 추가되면 제어기는 최적 제어기가 되지 않지만,  $q \neq 1$ 일 때  $\alpha \rightarrow 1$ 이면  $F_f(q^{-1}) \rightarrow 0$ 이 되므로  $\alpha$ 와  $\beta$  값을 조정하면 필터의 대역폭을 조절할 수 있고 시스템의 성능저하를 방지할 수 있다. 따라서 폐루프 시스템의 안정도를 보장하기

위한 IMC 제어기  $H_c(q^{-1})$ 는

$$H_c(q^{-1}) := H_r(q^{-1})F_f(q^{-1}) \quad (27)$$

이고  $\alpha$ 의 값에 관계없이  $F_f(1) = 1$ 이므로 (24)을 만족시키지 않은 주파수 영역에서 작은  $\alpha$  값을 취하면, 필터 응답의 크기가 작아지므로 다음 관계가 성립된다.

$$\|H_c(q^{-1})(G(q^{-1}) - G_r(q^{-1}))\| < 1 \quad (28)$$

본 논문에서는  $\alpha$  값을 다음과 같이 구한다.  $H_r(q^{-1})(G(q^{-1}) - G_r(q^{-1}))$ 의 Nyquist 선도에서 음의 실수축의 가장 왼쪽을 지날 때의 크기( $K_{max}$ )와 주파수( $\omega_0$ )를 구하고, 해당 주파수  $\omega_0$ 에서 Nyquist 선도가  $(-1, 0)$ 을 포함하지 않도록  $\alpha$ 를 선택한다. 즉  $K_{max} > \gamma$  ( $\gamma$ 는 시스템의 이득 여유( $20 \log(1/\gamma)$ db)를 고려하여 미리 정한 0과 1사이의 값)인 경우에  $|F_f(e^{-j\omega_0})K_{max}| = \gamma$ 가 되도록  $\alpha$ 를 구한다. 즉 다음 식에서  $\alpha$ 를 계산하는데

$$\left| (1 - \alpha) \frac{\beta + (1 - \beta)e^{-j\omega_0}}{1 - \alpha e^{-j\omega_0}} \right| K_{max} = \gamma \quad (29)$$

$\beta$ 가 미리 주어진 경우 (29)를 전개하면

$$\frac{(1 - \alpha)^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega_0} = \gamma_1^2 \quad (30)$$

$$\gamma_1^2 = \frac{\gamma^2}{K_{max}^2(1 + 2\beta(1 - \beta)(\cos \omega_0 - 1))}$$

이 되고, 이를 다시 정리하면 다음과 같은 2차 방정식이 된다.

$$\alpha^2 - 2K\alpha + 1 = 0 \quad (31)$$

$$K := (1 - \gamma_1^2 \cos \omega_0) / (1 - \gamma_1^2)$$

필터 (26)가 안정하려면  $\alpha$ 의 크기가 1보다 작은 값을 가져야하므로

$$\alpha = K - \sqrt{K^2 - 1} \quad (32)$$

을 택하면 전체 시스템의 안정도는 보장된다. 그런데 Nyquist 선도에서  $K_{max} \geq \gamma$ 로써 (24)의 안정화 조건을 만족시킬 때는 필터를 사용하지 않아도 되므로  $\alpha = 0, \beta = 1$ 을 취한다.

#### 4. 적응제어 시스템의 구성

이 장에서는 IMC 구조를 사용한 적응제어 시스템의 안정성을 증명한다. 플랜트의 매개변수를 모르므로 제어기는 플랜트 대신에 추정된 고차 모델로부터 얻는다. 따라서 IMC 구조를 사용한 간접 적응제어 시스템은 매 스텝  $k$ 에서 certainty equivalence principle에 따라 구성된다. 고차 모델의 매개변수는 매개변수 추정 알고리즘을 사용하여 매 스텝마다 추정하고 이에 해당하는 축소차수 모델은 2장에서 제시한 방법을 사용하여 구한다. 따라서 안정한 플랜트에 대해 안정한 고차 모델을 추정할 수 있으며 이 때의 제어 법칙은 다음과 같다.

$$u_k = H_c(k, q^{-1}) (y_k^* + \nu_k - y_k + G_r(k, q^{-1})u_k) \quad (33)$$

여기서  $\nu_k$ 는 제어 입력의 주파수 성분을 충분히 하려고 외부에서 주어지는 값으로 성능에 영향을 크게 미치지 않도록 그 크기를 충분히 작게 잡아도 되며, 기준입력의 주파수 성분이 충분하면 외부 입력  $\nu_k$ 를 포함시키지 않아도 된다.

이를 토대로 한 적응제어 알고리즘은 다음과 같다.

스텝 1: RELS 알고리즘을 사용하여 고차 모델  $G(k, q^{-1})$ 를 추정한다. 추정된 고차 모델이 불안정한 경우에는 바로 전 스텝의 안정한 고차 및 축소차수 모델을 사용하고, 고차 모델이 안정한 경우에는 2장의 알고리즘을 사용하여 축소차수 모델  $G_r(k, q^{-1})$ 를 구한다.

$$G_r(k, q^{-1}) := \frac{b_{1,k}q^{-1}\prod_{i=1}^{n-1}(1 - z_{i,k}q^{-1})}{A(k, q^{-1})} \quad (34)$$

스텝 2: 모델  $G_r(k, q^{-1})$ 을 대상으로 (22)와 (23)의 방법을 사용하여 적응 IMC 제어를 구한다.

$$H_r(k, q^{-1}) := \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1 - \hat{z}_{i,k}}{1 - z_{i,k}} \frac{A(k, q^{-1})}{b_{1,k}\prod_{i=1}^{n-1}(1 - \hat{z}_{i,k}q^{-1})} \quad (35)$$

여기서

$$\hat{z}_{i,k} = \begin{cases} z_{i,k}, & |z_{i,k}| \leq 1 \\ 1/z_{i,k}, & |z_{i,k}| > 1. \end{cases} \quad (36)$$

스텝 3:  $H_c(k, q^{-1}) = H_r(k, q^{-1})F_f(k - 1, q^{-1})$ 로서 (37)의 안정도 조건을 만족하면  $F_f(k, q^{-1}) = F_f(k - 1, q^{-1})$ 를 사용하고, 안정도 조건을 만족하지 않으면 필터  $F_f(k, q^{-1})$ 를 (29)-(32)의 과정을 통해 구한다. 이 때 새롭게 얻어진 저차의 제어기는  $H_c(k, q^{-1}) = H_r(k, q^{-1})F_f(k, q^{-1})$ 이 된다.

$$\|H_c(k, q^{-1})(G(k, q^{-1}) - G_r(k, q^{-1}))\| < 1 \quad (37)$$

전체 적응제어 시스템의 안정성에 대하여 다음 결과를 얻는다.

정리 2: 제어 시스템이 가정 1-5의 조건을 만족하고, 위에서 제시한 축소차수 모델 추정방법과 제어법칙을 사용하면, 제어 시스템의 초기 상태가 유한하고, 기준입력이 유한한 경우 적응제어 시스템의 입·출력은 확률 1로서 다음을 만족한다.

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 < \infty$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k^2 < \infty$$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k^2 = 0.$$

증명 : 증명 과정이 [10]과 비슷하고 공간이 모자라서 생략함. ■

## 5. 시뮬레이션

본 논문에서 제시한 제어기 설계 방법을 다음의 예에 대하여 적용하여 비교 검토 하자.

$$G(q^{-1}) = \frac{0.00161q^{-1}(1 + 16.56q^{-1} + 27.26q^{-2} - 7.11q^{-3} + 0.184q^{-4})}{1 - 2.56q^{-1} + 2.95q^{-2} - 1.81q^{-3} + 0.59q^{-4} - 0.079q^{-5}}$$

$$C(q^{-1}) = (1 - 0.3q^{-1})(1 - 0.4q^{-1})(1 - 0.5q^{-1})$$

이 때  $G(q^{-1})$ 는 비최소 위상 시스템이다. 따라서 기존의 MRAC 방법이나 minimum variance 제어 방법을 적용할 수 없다. 출력 잡음  $w_k$ 는 평균과 분산이 0과 0.1인 백색잡음이고 외부에서 집어 넣어 주는 입력  $\nu_k$ 는 0이다. 기준입력  $y_k^*$ 는 주기가 250 스텝이고 크기가 각각 5와 0인 구형파이고  $\beta = 1$ 로 놓고 시뮬레이션하였다. 그림 2는 5차의 플랜트를 7차의 고차 모델로 추정하고 축소차수의 적응 IMC 제어기를 구성하였을 때 기준입력에 대한 출력 응답들을 나타낸다. 제안된 알고리즘이 여러 축소차수에 대하여 잘 동작함을 볼 수 있으며 출력이 제어기의 차수에 따라 크게 영향받지 않음을 알 수 있다. 출력은 안정하게 나타났으며 초기상태를 지나면 기준 입력을 잘 따라가는 것을 볼 수 있다. 초기상태에서의 진동 현상은 고차 모델이 overparametrization이 되므로 불안정한 모델이 추정되었기 때문이다.

## 6. 결론

본 논문에서는 플랜트 차수의 상한이 알려졌을 때, 이 보다 낮은 저차의 건설한 적응 IMC 제어기를 설계하는 방법을 제시하였다. 먼저 안정한 플랜트에 대하여 모델화되지 않은 운동을 줄이도록 고차의 모델을 구하고 Schur 형태를 사용하여 축소차수 모델을 구하였다. 제시한 방법을 사용하면 축소차수 모델을 구할 때 고차 모델의 안정성을 쉽게 확인할 수 있고 BTA 방법에 비해 상당한 계산량을 줄일 수 있었다. 얻어진 축소차수 모델을 사용하여 저차의 안정한 제어기를 얻으며 동시에 제어 시스템이 미리 주어진 이득 여유를 만족시키도록 하였다. IMC 구조는 모델화되지 않은 운동이 존재하는 시스템을 제어하기에 적합함을 알 수 있었으며, 저차의 IMC 제어기를 사용한 적응제어 시스템의 안정성을 보일 수 있었다.

## 참고 문헌

- [1] C. E. Rohrs, "Adaptive control in the presence of unmodeled dynamics," Ph.D. Thesis, MIT, August 1982.
- [2] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness*, Prentice Hall, 1989.
- [3] M. Morari and E. Zafriou, *Robust Process Control*, Prentice Hall, 1989.

- [4] J. Guan, L. Wang and D. H. Owens, "Internal model adaptive control systems," *IFAC Adaptive Systems in Control and Signal Processing*, pp. 135-139, 1989.
- [5] 최중호, 김호찬 "Internal Model Control 구조를 가진 건설한 적응제어기," *전기학회 논문지*, 42권 2호, pp. 32-41, 1992. 2.
- [6] K. Glover, "All optimal Hankel norm approximations of linear multivariable systems and their  $L_\infty$ -error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.
- [7] L. Xia and J. B. Moore, "Recursive identification of overparameterized systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-34, no. 3, pp. 327-331, 1989.
- [8] K. J. Åström, *Introduction to Stochastic Control Theory*, New York: Academic Press, 1970.
- [9] S. Barnett, *Polynomials and Linear Control Systems*, Marcel Dekker Inc., 1983.
- [10] H.-C. Kim and C.-H. Choi, "Closed-form Gramians and minimal balanced realization of discrete-time SISO systems," *CTAT*, submitted for publication.
- [11] R. W. Aldhaheri, "Model order reduction via real Schur-form decomposition their  $L_\infty$ -error bounds," *Int. J. Contr.*, vol. 53, no. 3, pp. 709-716, 1991.

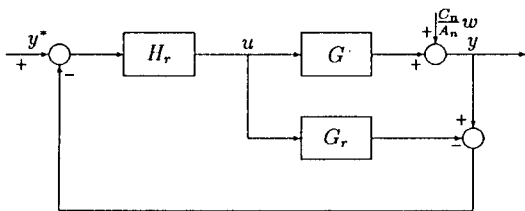
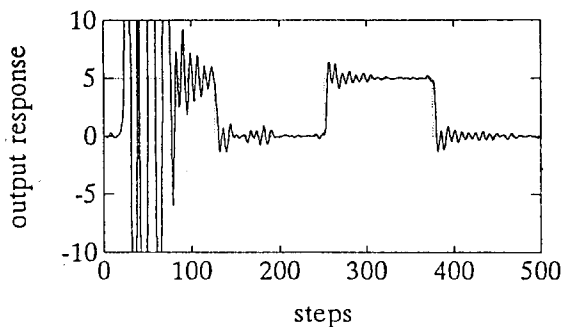
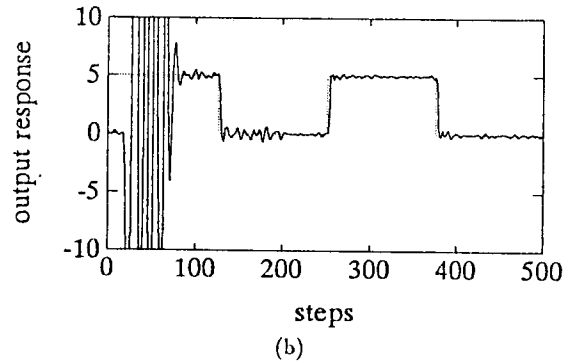


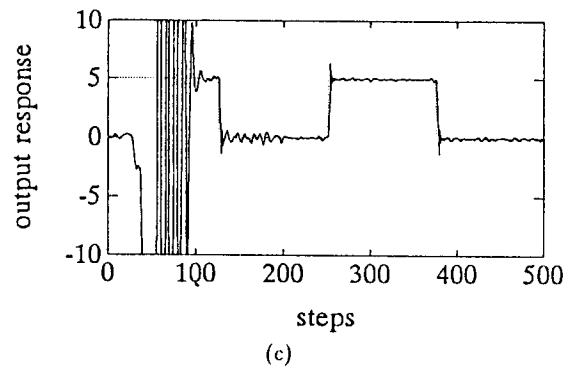
그림 1. Internal Model Control (IMC) 제어구조.



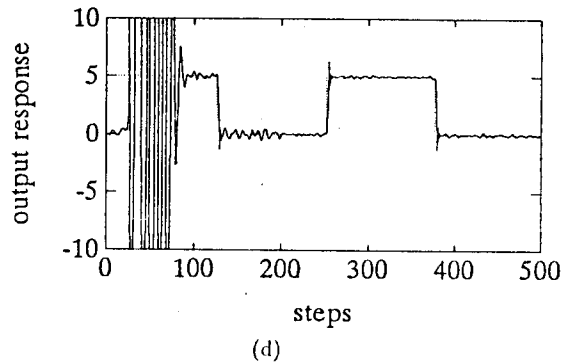
(a)



(b)



(c)



(d)

그림 2. 플랜트 출력 및 기준입력 ( $\gamma = 0.5$ ).

- (a) 3차 적용 IMC 제어기 (2차 제어기  $H_r$  + 1차 필터  $F_f$ ); (b) 4차 적용 IMC 제어기; (c) 5차 적용 IMC 제어기; (d) 6차 적용 IMC 제어기.