'93 한국자동제어학술회의논문집 (1993. 10. 20~22)

모델 불확실성에 대한 최적 FIR 필터의 성능한계

°유경상, 권오규
인하대학교 공과대학 전기공학과

Performance Bounds of Optimal FIR Filter under Modeling Uncertainty

°Kyung-Sang Yoo and Oh-Kyu Kwon
Department of Electrical Engineering, Inha University

Abstract

In this paper we present the performance bounds of the optimal FIR filter in continuous time systems with modeling uncertainty. The performance measure bounds are calculated from the estimation error covariance bounds of the optimal FIR filter and the suboptimal FIR filter. Performance error bounds range are expressed by the upper bounds on the estimation error covariance difference between the real and nominal values in case of the systems with noise uncertainty or model uncertainty. The performance bounds of the systems are derived on the assumption that the system uncertainty and the estimation error covariances are imperfectly known *a priori*. The estimation error bounds of the optimal FIR filter is compared with those of the Kalman filter via a numerical example applied to the estimation of the motion of an aircraft carrier at sea, which shows the former has better performances than the latter.

1. 서 론

실제 추정문제에 있어서 시스템 모델이나 잡음에 대한 불확실성에 대한 사전 정보를 정확히 알 수는 없으며, 따라서 대상 시스템에는 항상 불확실성이 존재한다. 그러므로, 불확실한 시스템에서 추정을 할 때에는 수학적 모델에 의한 시스템 상태의 추정과 함께 시스템이 허용할 수 있는 성능에 대한 불확실성의 한계를 구하는 문제도 중요하다. 이러한 불확실성이 존재하는 시스템에서 최적 추정자로서 칼만 필터를 사용한 경우의 성능한계를 구한 결과가 Patel 등[1,2]에 의해 제시되고 있다. 그런데 칼만 필터는 시스템 모델 이나 잡음 정보에 대한 정확한 정보를 모르는 경우 추정 성능이 저하되는 특성을 나타낸다[3,4]. 모델링 오차가 존재하는 시스템에서 칼만 필터는 모델링 오차에 대한 추정오차 한계치가 커지므로 추정성능이 떨어짐을 알 수 있다.

칼만 필터의 이러한 문제점을 개선시키고 불확실성에 대한 허용 성능을 높이기 위하여 많은 방법들이 제시되었는데 Kwon 등[3]에 의해 제시된 최적 FIR 필터도 그 가운데 하나이다. 이 필터는 구조적인 특성에 의해서 계수변화나 수치오차에 대하여 견실한 특성을 갖기 때문에 불확실한 시스템에서의 추정 문제에 적용할 경우 모델 불확실성에 대한 허용 성능이 칼만 필터의 경우보다 향상될 것으로 기대된다.

그러므로 이 논문에서는 모델 불확실성이 존재하는 연속형 시스템에서 불확실성에 대한 최적 FIR 필터의 성능 한계값을 구하는 문제를 다룬다. 여기서 성능의 한계값을 최적 FIR 필터와 준최적 FIR 필터의 추정오차 상호분산에서 설정할 수 있다. 이러한 성능의 한계값은 불확실성이 시스템 잡음에만 존재하는 경우와 시스템 모델에 불확실성이 각각 존재하는 경우에, 추정오차 상호분산의 실제값과 공칭값 사이의 차의 상한값으로 나타낸다. 또한 준최적 FIR 필터와 최적 FIR 필터의 추정오차 상호분산의 정보와 각각의 모델 불확실성에 대한 정보를 어느정도 안다는 가정 하에 성능기준 함수의 상한값과 하한값의 한계를 구하여 최적 FIR 필터의 성능한계를 확인한다. 이 논문에서 제시한 방법을 해상에서 동작하는 항공기 동작추정문제[8]에 적용하여 성능한계값의 영역을 칼만 필터의 경우와 비교하여 FIR 필터성능의 우수성을 보인다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 시스템의 성능 한계치 문제를 제시하고, 3절에서는 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치 영역을 제시하며, 4절에서는 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치 영역을 제시한다. 여기서 제시한 방법을 적용한 예를 5절에 제시하며 6절에서 결론을 맺는다.

● **수학 기호 설명 :** 이 논문에서 사용한 수학기호를 나타내면 다음과 같다. $\|\cdot\|$ 는 임의의 벡터에 대한 유클리디안 노옴(Euclidean norm)을 표시하고, $\Delta(\cdot)$는 임의의 함수의 모델 불확실성을 표시한다. $W > 0$ ($W \geq 0$)은 대칭행렬 W 가 정치(준 정치) 행렬임을 나타내며, $\Phi(\cdot)$는 천이행렬을 나타낸다. 임의의 동일행렬(conformable matrix) W, Y 와 Z 이 있으면, 임의의 n × m 행렬 W의 열(column)의 원소(string)들을 cs(W)로 나타내면 열벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$cs(W) = [w_{11},...,w_{n1},w_{12},...,w_{n2},...,w_{1m}...w_{nm}] \quad (1.1)$$

여기서 w_{jk}는 행렬 W의 i, j 번째 원소이다. 따라서 W의 주대각합(trace)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$tr(W) = [cs(I_n)]^T cs(W) \tag{1.2}$$

여기서 I_n은 n × n 단위행렬 이다. 또한 임의의 행렬 Z에 대해서 다음의 관계가 성립된다.

$$\| cs(Z) \| = \| Z \| \tag{1.3}$$

그래서 임의의 동일행렬(conformable matrix) W, Y 와 Z에 대해서 다음의 관계로 나타낼 수 있다.

$$cs(WYZ) = (Z^T \otimes W) cs(Y) \tag{1.4}$$

여기서 $\otimes$는 크로넥커 곱(Kronecker product)를 나타낸다.

보조정리 1 [1, 보조정리 2.1] : 식(1.3), (1.4)의 관계와 노옴(norm)의 삼각부등식의 관계를 이용하여 임의의 동일행렬(conformal matrix) W, Y 와 Z에 대해서 다음의 관계가 성립된다.

$$| tr[WYZ] | \leq \| ZW \| \ \| Y \| \tag{1.5}$$

□□□

위의 보조정리 1은 3, 4절의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$의 한계를 구하는데 유용하게 이용할 수 있다.

2. 문제 설정

추정대상 시스템으로서 다음과 같이 연속형 시변 상태공간 모델을 다루기로 한다.

$$\dot{x}(t) = A_t x(t) + B_t w(t)$$
$$z(t) = C_t x(t) + v(t) \tag{2.1}$$

식(2.1)에서 상태 $x(\cdot)$는 p차원 벡터, 제어입력 $u(\cdot)$는 q차원 벡터, 관측 $z(\cdot)$는 r차원 벡터이다. 초기상태 $x(0)$는 확률변수로서 $E[x(0)] = m_0$, $Cov[x(0)] = P_0$ 이고, 시스템잡음 $w(\cdot)$와 관측잡음 $v(\cdot)$는 영평균 백색잡음으로서 상호분산이 각각 $E[w(t)w^T(s)] = Q_t \delta(t-s)$, $E[v(t)v^T(s)] = V_t \delta(t-s)$, $Q_t \geq 0$, $V_t > 0$이며, 이들과 초기상태는 상관관계가 없다고 가정한다. 행렬 A_t, B_t, C_t, G_t, Q_t, V_t들은 모두 시변행렬들인데, 수식 표현의 편의를 위해 앞으로는 시간변수를 나타내는 아랫첨자 t를 생략하기로 한다.

최적 추정자 $\hat{x}(t \mid T)$는 다음의 추정오차 상호분산을 최소화한다.

$$J(t) \equiv E[\| x(t) - \hat{x}(t \mid T) \|^2] \tag{2.2}$$

여기서 추정자로 사용하는 최적 FIR 필터는 다음과 같이 주어진다[3].

$$\hat{x}(t \mid T) = \int_{t-T}^{t} H(t, \tau ; T) z(\tau) d\tau \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} H(t,s;\sigma) = [A - R(t,\sigma) C^T V^{-1} C] H(t,s;\sigma), \quad 0 \leq T-t+s < \sigma \leq T \tag{2.4}$$

$$H(t,s;T-t+s) = R(t,T-t+s) C^T V^{-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} R(t,\sigma) = AR(t,\sigma) + R(t,\sigma)A^T + BQB^T - R(t,\sigma) C^T V^{-1} C R(t,\sigma) \tag{2.5}$$

$$R(t,0) = P(t-T,t-T) = Cov[x(t-T)], \quad 0 < \sigma \leq T.$$

또한 준최적 FIR 필터는 Kwon 등[3]에 의해 다음과 같이 주어진다.

$$\hat{x}_M(t \mid T) = \int_{t-T}^{t} H_M(t, \tau ; T) z(\tau) d\tau \tag{2.6}$$

여기서

$$H_M(t, \tau ; T) = H(t, \tau ; T) + \Delta H(t, \tau ; T)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} H_M(t,s;\sigma) = [A_M - R_M(t,\sigma) C_M^T V_M^{-1} C_M] H_M(t,s;\sigma), \quad 0 \leq T-t+s < \sigma \leq T \tag{2.7}$$

$$H_M(t,s;T-t+s) = R_M(t,T-t+s) C_M^T$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} R_M(t,\sigma) = A_M R_M(t,\sigma) + R_M(t,\sigma) A_M^T + B_M Q_M B_M^T - R_M(t,\sigma) C_M^T V_M^{-1} C_M R_M(t,\sigma) \tag{2.8}$$

$$R_M(t,0) = P(t-T,t-T) = Cov[x(t-T)], \quad 0 < \sigma \leq T.$$

$$\frac{d}{dt} P_M(t,t) = A_M P_M(t,t) + P_M(t,t) A_M^T + B_M Q_M B_M^T \tag{2.9}$$

$$P_M(0,0) = P_{M_0}$$

또한

$A_M \equiv A + \Delta A$, $C_M \equiv C + \Delta C$, $Q_M \equiv Q + \Delta Q$ 와 $V_M \equiv V + \Delta V$ 이다.

따라서 최소자승 추정오차는 다음과 같으며

$$E[\| x(t) - \hat{x}_M(t \mid T) \|^2] = tr[R_r(t,T)] \tag{2.10}$$

상호분산 $R_r(t,T)$는 [3, 정리 6]에 주어진다. 그러므로 모델링 오차가 존재하는 시스템에서의 FIR 필터의 추정오차 상호분산을 정의하기 위하여 다음의 정리를 도입한다.

정리 1 [3] : 만약 오차가 존재하는 시스템 모델이 A, B, C, Q 와 R 이라면 실제 시스템의 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_r(t,T) = R(t,T) + U(t,T) \tag{2.11}$$

여기서

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}U(t,\sigma) = [A_M - K_M(t,\sigma)C_M]U(t,\sigma) + U(t,\sigma)[A_M - K_M(t,\sigma)C_M]^T + \Delta K(t,\sigma)\Delta K(t,\sigma)^T + [\Delta A - K_M(t,\sigma)\Delta C]T(t,\sigma)^T + T(t,\sigma)[\Delta A - K_M(t,\sigma)\Delta C]^T, \quad 0 < \sigma \le T \tag{2.12}$$

$$U(t,0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}T(t,\sigma) = [A_M - K_M(t,\sigma)C_M]T(t,\sigma) + T(t,\sigma)A^T + \Delta K(t,\sigma)CR(t,\sigma) + [\Delta A - K_M(t,\sigma)\Delta C] \times [P(t-T+\sigma, t-T+\sigma) - R(t,\sigma)], \quad 0 < \sigma \le T \tag{2.13}$$

$$T(t,0) = 0$$

그리고

$$K(t,\sigma) = R(t,\sigma)C^T$$
$$K_M(t,\sigma) = R_M(t,\sigma)C_M^T$$
$$\Delta K(t,\sigma) = K_M(t,\sigma) - K(t,\sigma)$$

증명 : [3]의 정리 6 증명과 같으므로 생략한다.

□□□

실제 추정오차의 상호분산이 $R_r(t,T)$로 주어지며 식(2.11)-(2.13)의 준최적 FIR 필터에 의해서 구할 수 있으나 일반적으로 정확한 모델링 오차를 모르기 때문에 해결하기가 쉽지 않다. 따라서 모델링 오차의 크기를 추정할 수 있는데 모델링 오차와 초기 잡음의 정보는 정확히 모른다는 전제하에 $R_r(t,T)$의 상한값과 하한값의 한계치를 구할 수 있다. 이러한 한계치는 모델 불확실성에 대한 정확한 정보를 모르는 상태에서 필터의 최악의 성능지표를 나타낸다.

3. 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치

이 절에서는 시스템 모델은 정확히 안다는 가정하에 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우에 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$의 한계치 상한과 하한을 구하는 방법에 대하여 살펴본다.

정리 3.1 : 추정대상 시스템 (2.1)에서 시스템 모델 불확실성을 $\Delta A = 0$, $\Delta C = 0$ 이라 가정하면 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$는 다음과 같은 한계치를 갖는다.

$$|\,tr[R_r(t,T) - R(t,T)]\,| \le \Delta\pi_1(t) \tag{3.1}$$

여기서

$$\Delta\pi_1(t) = \int_0^T \| \Phi_F(t,\tau)^T \Delta K^T(t,\tau) \times K(t,\tau)\Phi_F(t,\tau)] \| \, d\tau \tag{3.2}$$

또한 $\Phi_F(t,\tau)$는 다음을 만족하는 기본행렬(fundamental matrix)이다.

$$\frac{d}{dt}\Phi_F(t,\tau) = [A_M(t) - K_M(t,\sigma)C_M(t)]\Phi_F(t,\tau) \tag{3.3}$$

$$\Phi_F(t,\tau) = I_n \tag{3.4}$$

정리 3.1의 증명 : 모델 불확실성이 $\Delta A = 0$, $\Delta C = 0$의 관계를 가질때 식(2.12), (2.13)에서 다음의 관계를 유도할 수 있다.

$$\dot{R}_r(t,T) = \dot{R}(t,T) + \dot{U}(t,T) = \dot{R}(t,T) + [A_M - K_M(t,T)C_M]U(t,T) + U(t,T)[A_M - K_M(t,T)C_M]^T + K(t,T)\Delta K(t,T)^T + [\Delta A - K_M(t,T)\Delta C]T(t,T)^T + T(t,T)[\Delta A - K_M(t,T)\Delta C]^T \tag{3.5}$$

여기서 $\Delta A = 0$, $\Delta C = 0$ 이므로 식(3.7)은 다음과 같이 된다.

$$\dot{R}_r(t,T) = \dot{R}(t,T) + [A_M - K_M(t,T)C_M]U(t,T) + U(t,T)[A_M - K_M(t,T)C_M]^T + \Delta K(t,T)\Delta K(t,T)^T \tag{3.6}$$

따라서 식(3.6)의 해는 다음과 같이 표현된다.

$$R_r(t,T) = R(t,T) + \int_0^T \Phi_F(t,\tau)[\Delta K(t,\tau)\, K(t,\tau)^T] \times \Phi_F(t,\tau)^T d\tau \tag{3.7}$$

식(3.7)의 양변에 주대각합(trace)을 취하면 다음과 같이 된다.

$$tr[R_r(t,T)] = tr[R(t,T)] + \int_0^T tr[\Phi_F(t,\tau)[\Delta K(t,\tau)\, K(t,\tau)^T] \times \Phi_F(t,\tau)^T] d\tau \tag{3.8}$$

$$\le tr[R(t,T)] + \int_0^T |\, tr[\Phi_F(t,\tau)[\Delta K(t,\tau)\, K(t,\tau)^T] \times \Phi_F(t,\tau)^T]\,| \, d\tau \tag{3.9}$$

보조정리 1에 의해 다음의 관계가 성립된다.

$$\le tr[R(t,T)] + \int_0^T \| \Phi_F(t,\tau)[\Delta K(t,\tau)\, K(t,\tau)^T] \times \Phi_F(t,\tau)^T] \| \, d\tau \tag{3.10}$$

그러므로 한계 허용치는 다음과 같다.

$$tr[R_r(t,T)] - tr[R(t,T)] \le \Delta\pi_1(t) \qquad (3.11)$$

또한 하한 한계치는 마찬가지 방법으로 식(3.10)에서 두번째, 세번째 항의 부호를 음으로 해서 구할 수 있다. 이로써 증명은 완료된다.

□□□

4. 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우의 한계치

이 절에서는 시스템 잡음은 정확히 안다는 가정하에 $\Delta Q = 0$, $\Delta V = 0$라 하고 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우에 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$의 한계치 상한과 하한를 구하는 방법에 대하여 살펴보기로 한다.

정리 4.1 : 추정대상 시스템 (2.1)에서 시스템 잡음 불확실성을 $\Delta Q = 0$, $\Delta V = 0$ 이라 가정하면 최적 FIR 필터의 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$는 다음과 같은 한계치를 갖는다.

$$|\, tr[\, R_r(t,T) - R_u(t,T)]\,| \le \Delta\pi_2(t) \qquad (4.1)$$

여기서

$$\Delta\pi_2(t) = 2\int_0^T [\, \| \Phi_F(t,\tau)^T \Phi_F(t,\tau) \| \; \| \Delta AT(t,\tau) \| + \| \Phi_F(t,\tau)^T \Phi_F(t,\tau) K_M(t,\tau) \| \; \| \Delta CT(t,\tau) \| \,]\, a_1 d\tau \qquad (4.2)$$

$$R_u(t,T) = R(t,T) + \int_0^T \Phi_F(t,\tau)[\, \Delta K(t,\tau)\; K(t,\tau)^T] \times \Phi_F(t,\tau)^T d\tau \qquad (4.3)$$

$$P_M(t,t) = \Phi_M(t,0)P(t,0)\Phi_M(t,0)^T + \int_0^T \Phi_M(t,\tau) B Q_M B^T \Phi_M(t,\tau)^T d\tau \qquad (4.4)$$

$$T_M(t,T) = \int_0^T \Phi_M(t,\tau)\Delta K(t,\tau) C R(t,\tau) \times \Phi_F(t,\tau) d\tau \qquad (4.5)$$

$$a_1 = a_2 + \int_0^T \gamma_1(t,\tau) a_2 \exp[\int_\tau^T \gamma_1(t,\mu) d\mu] d\tau \qquad (4.6)$$

$$a_2 = \| T_M(t,\tau) \| + \int_0^T \gamma_2(t,\tau)\beta\, d\tau \qquad (4.7)$$

$$\beta = \| P_M(t,t) \| + 2\int_0^T \| \Phi_M(t,\tau)^2 \| \; \| \Delta A \| \, \| P_M(t,\tau) \| \times \exp[\int_\tau^T \| \Phi_M(t,\mu)^2 \| \; \| \Delta A \| \, d\mu] d\tau \qquad (4.8)$$

$$\gamma_1(t,\tau) = \| \Phi_M(t,\tau) \| \, \| \Phi_F(t,\tau) \| \; \| \Delta A \| \qquad (4.9)$$

$$\gamma_2(t,\tau) = \| \Phi_M(t,\tau) \| \, \| \Phi_F(t,\tau) \| \times [\, \| \Delta A \| + \| K_M(\tau) \| \, \| \Delta C \| \,] \qquad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_M(t,\tau) = A_M(t)\Phi_M(t,\tau) \qquad (4.11)$$

$$\Phi_M(\tau,\tau) = I_n$$

정리 4.1의 증명 : 모델링 오차의 상한 허용치와 하한 허용치를 구하기 위하여 다음 식의 한계치를 먼저 구한다.

$$\dot{P}(t,t) = AP(t,t) + P(t,t)A^T + BQB^T \qquad (4.12)$$

식(4.12)의 해는 식(2.9)의 P_M과 다음의 관계를 갖는다.

$$P(t,t) = P_M(t,t) + \int_0^T \Phi_M(t,\tau)[\, \Delta AP(t,\tau) + P(t,\tau)\Delta A^T] \Phi_M(t,\tau) d\tau \qquad (4.13)$$

식(4.13) 양변에 노옴(norm)을 취하면 다음의 관계가 성립된다.

$$\| P(t,t) \| \le \| P_M(t,t) \| + 2\int_0^T \| \Phi_M(t,\tau) \|^2 \| \Delta A \| \, \| P(t,\tau) \| d\tau \qquad (4.14)$$

식(4.14)에 Gronwall 부등식 [7]을 적용하면 아래와 같이 된다.

$$\| P(t,t) \| \le \| P_M(t,t) \| + 2\int_0^T \| \Phi_M(t,\tau) \|^2 \| \Delta A \| \, \| P(t,\tau) \| d\tau \times \exp[\int_\tau^T \| \Phi_M(t,\mu) \|^2 \| \Delta A \| d\mu] d\tau \le \beta \qquad (4.15)$$

식(2.13)의 T 와 식(4.5)의 T_M은 다음의 관계식을 만족하는데

$$T(t,T) = T_M(t,T) + \int_0^T \Phi_M(t,\tau)\,\{[\, \Delta A - K_M(t,\tau)\Delta C] \times P(t-T+\tau, t-T+\tau) - R(t,\tau)] - T(t,\tau)\Delta A\}\; \Phi_F(t,\tau)^T d\tau \qquad (4.16)$$

식(4.16) 양변에 노옴(norm)을 취하고 Gronwall 부등식을 적용하면 다음의 관계가 성립된다.

$$\| T(t,T) \|$$

$$\leq \| T_M(t,T) \| + \int_0^T \| \Phi_M(t,\tau) \| \| \Phi_F(t,\tau) \|$$

$$\times [\| \Delta A \| + \| K_M(t,\tau) \| \| \Delta C \|]$$

$$\times \{ \| P_M(t,t) \| + 2\int_0^T \| \Phi_M(t,\tau) \|^2$$

$$\times \| \Delta A \| \| P(t,\tau) \| d\tau$$

$$\times \exp[\int_\tau^T \| \Phi_M(t,\mu) \|^2 \| \Delta A \| d\mu]\} d\tau$$

$$+ \int_0^T \| \Phi_M(t,\tau) \| \| \Phi_F(t,\tau) \| \| \Delta A \|$$

$$\times \{ \| T_M(t,T) \| + \int_0^T \gamma_2(t,T) \beta d\tau$$

$$\times \exp[\int_\tau^T \gamma_1(t,\mu) d\mu] d\tau \}$$

$$= \alpha_1 \quad (4.17)$$

여기에서 $\Delta Q = 0, \Delta V = 0$ 이라 가정하면 실제 추정오차 상호분산 $R_r(t,T)$의 해는 다음과 같이 주어진다.

$$R_r(t,T) = R_u(t,T) + \int_0^T \Phi_M(t,\tau) \{ [\Delta A - K_M(t,\tau)\Delta C] T(t,\tau)^T + T(t,\tau)[\Delta A - K_M(t,\tau)\Delta C] \} \Phi_F(t,\tau)^T d\tau \quad (4.18)$$

식(4.18)의 양변에 주대각합(trace)을 취하면 다음과 같이 된다.

$$tr[R_r(t,T)] = tr[R_u(t,T)] + 2\int_0^T tr[\Phi_F(t,\tau)\{[\Delta A - K_M(t,\tau)\Delta C] T(t,\tau)^T + T(t,\tau)[\Delta A - K_M(t,\tau)\Delta C]\} \Phi_F(t,\tau)^T] d\tau$$

$$\leq tr[R_u(t,T)] + 2\int_0^T \{ tr | [\Phi_F(t,\tau)\Delta A T(t,\tau)\Phi_F(t,\tau)^T] | + | tr[\Phi_F(t,\tau) K_M(t,\tau)\Delta C T(t,\tau) \times \Phi_F(t,\tau)^T] | \} d\tau$$

보조정리 1에 의해 다음의 관계가 성립한다.

$$tr[R_r(t,T)] \leq tr[R_u(t,T)] + 2\int_0^T \{ \| \Phi_F(t,\tau)^T \Phi_F(t,\tau) \| \| \Delta A T(t,\tau) \| + \| \Phi_F(t,\tau)^T \Phi_F(t,\tau) K_M(t,\tau) \| \times \| \Delta C T(t,\tau) \| \} d\tau \quad (4.19)$$

따라서 다음의 관계식을 이용하여

$$\| \Delta A T(t,\tau) \| \leq \| \Delta A \| \| T(t,\tau) \|$$

$$\| \Delta C T(t,\tau) \| \leq \| \Delta C \| \| T(t,\tau) \|$$

$$\| T(t,\tau) \| \leq \alpha_1$$

아래와 같은 상한 허용한계 범위 $\Delta\pi_2(t)$을 구할 수 있다.

$$| tr[R_r(t,T)] - tr[R_u(t,T)] | \leq \Delta\pi_2(t) \quad (4.20)$$

또한 하한 허용 한계치는 마찬가지 방법으로 식(4.19)에서 두번째, 세번째 항의 부호를 음으로 해서 구할 수 있다. 이로써 증명은 완료된다.

□□□

5. 상하한 한계치 예제

이 절에서는 해상에서 동작하는 항공기의 동작추정문제[8]에 앞절에서 제시한 결과를 적용하여 불확실성에 대한 추정오차 상호분산에 대한 최적 FIR 필터와 칼만 필터의 한계치를 구하는 문제를 살펴보기로 한다.

해상에서 동작하는 항공기의 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_{21} & A_{22}+\Delta_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.036 \end{bmatrix} w(t)$$

$$z(t) = [1+\Delta_c \;\; 0] x(t) + v(t)$$

여기서

$$A_{21} = -0.36, \; A_{22} = -0.06, \; q = 0.035, \; v = 1$$

그리고 시스템에 존재하는 잡음 불확실성은 다음과 같으며

$$| \Delta q | \leq 0.01, \; | \Delta v | \leq 0.1$$

모델 불확실성은 다음과 같다.

$$| \Delta_{22} | \leq 0.006, \; | \Delta_c | \leq 0.1$$

위의 조건에의해서 구한 최적 FIR 필터와 칼만 필터의 추정오차 허용 한계치는 표 1 과 같다. 이 표에서 볼 수 있듯이 최적 FIR 필터는의 한계값이 칼만 필터에 비해 작다. 따라서 이 예제의 경우, 모델링 오차가 존재하는 시스템에서의 추정성능은 최적 FIR 필터가 칼만 필터보다 견실한 한계성능을 나타냄을 알 수 있다.

표 1. 최적 FIR 필터와 칼만 필터의 한계 허용치

	최적 FIR 필터					칼만 필터
	T = 1	T = 3	T = 5	T = 7	T = 10	
$\Delta\pi_1(t)$	0.0013	0.0059	0.0031	0.0081	0.0041	0.0173
$\Delta\pi_2(t)$	0.0055	0.0165	0.0036	0.0171	0.0030	0.0480

6. 결론 및 검토

이 논문에서는 모델 불확실성이 존재하는 연속형 시스템에서 최적 FIR 필터의 성능한계에 대하여 분석하였다. 성능평가 함수로 추정오차 상호분산을 이용하여 시스템 잡음에 불확실성이 존재하는 경우와 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 경우를 고려 하였다.

시스템 잡음과 시스템 모델에 불확실성이 존재하는 각각의 경우에 모델 불확실성이 존재하는 최적 FIR 필터의 성능 한계치를 정리 3.1 과 정리 4.1에 나타냈다. 이러한 한계치는 추정문제에서 정확한 추정오차 보다 추정오차의 한계치로서 시스템 성능의 정보를 나타내는데 유용하리라 생각된다.

이 논문에서 제시한 결과를 해상에서 동작하는 항공기 동작 추정문제에 적용하는 모의실험을 통해 FIR 필터가 칼만 필터 보다 우수한 성능한계를 갖음을 알 수 있었다. 앞으로의 연구과제는 시스템 잡음과 모델 불확실성이 동시에 존재하는 경우의 성능한계 해석과 제어입력이 존재하는 경우의 최적 FIR 필터의 성능한계치 해석 등을 제시할 수 있다.

●감사의 글 : 이 논문은 1993년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행된 것이며, 이에 깊이 감사드린다.

참고 문헌

[1] R.V. Patel and M. Toda, "Bounds on Performance of Nonstationary Continuous-time Filters Under Modelling Uncertainty," *Automatica*, vol.20, pp.117-120, Jan. 1984

[2] M. Toda and R.V. Patel, "Performance Bounds for Continuous-time Filters in the Presence of Modeling Errors," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-14, pp. 912-919, Nov. 1978.

[3] W.H. Kwon, O.K. Kwon and K.S. Lee, "Optimal FIR filters for time-varying state-space models," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 26, pp. 1011-1021, Nov. 1990.

[4] H. Heffes, "The effect of erroneous models on the Kalman filter response," *IEEE Trans. Automat. Contr.* vol. AC-11, pp. 541-543, Jul. 1966.

[5] T. Nishimula, "On the a priori information in sequential estimation problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-11, pp. 197-204, Apr. 1966.

[6] T. Nishimula, "Error bounds of continuous Kalman filters and the application to orbit determination problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-12, pp. 268-275, Jun. 1967.

[7] Coddington, E.A. and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill, New York, 1955.

[8] M. Sidar and B.F. Doolin,"On the feasibility of real time prediction of aircraft carrier motion at sea," *NASA, Tech. Memo.* TM X-62, Jun. 1975.