

2-링크 유연한 로봇 팔에 대한 적응제어

°한종길*, 유병국*, 임규만*, 함운철*
* 전북대학교 공과대학 전자공학과

Adaptive Control for Two-Link Flexible Robot Arm

°Jong Kil Han*, Byung Kook Yoo*, Kyu Mann Im*, Woon Chel Ham*
* Department of Electronic Engineering, Chonbuk National University

Abstract

This paper presents deterministic and adaptive control laws for two-link flexible arm. The flexible arm has considerable structural flexibility. Because of its flexibility, dynamic equations are very complex and difficult to get. dynamic equations for two-link flexible arm are derived from Bernoulli-Euler beam theory and Lagrangian equation. Using the fact that matrix is skew symmetric, controllers which have a simplified structure with less computational burden are proposed by using Lyapunov stability theory.

1. 서론

최근의 산업용 로봇트는 생산성 향상을 위하여 로봇트 매니플레이터의 움직임이 고속화 되어야 하며, 경제적인 측면에 있어서는 경량이며, 높은 정밀도가 요구된다. 오늘날 활용되고 있는 산업용 로봇트의 작업물에 대한 하중율은, 인간이 3 대 1의 하중률을 가지는데 비하여, 1 대 10에서 1 대 30 정도로 매우 낮다.[1] 이는 대부분의 산업용 로봇트 매니플레이터가 정밀한 위치선정을 위하여 강체로 구성되어 있기 때문으로 에너지 효율면에 있어서도 매우 비경제적이다. 따라서 이들 강체 로봇트 매니플레이터를 경량의 유연한 로봇트 매니플레이터로 대체함으로써 고속 동작과 에너지의 효율성, 그리고 안정성이 증대된다. 그러나 이러한 경량의 유연한 로봇트 매니플레이터는 유연성으로 인해 동작시 진동을 일으키므로 정밀한 위치제어를 위해서는 진동을 제어해야만 한다. 이를 위해서는 유연한 로봇트 매니플레이터에 대한 보다 정밀한 동력학 방정식과 새롭고 강인한 제어기의 개발을 요구한다. 최근에는 이러한 문제점들을 해결하기 위하여 유연한 로봇트 매니플레이터에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그러나 이러한 논문의 거의 모든 접근 방식은 인정도의 분석없이 PD 나 PID 제어방식에 근거하고 있다. 그 이유는 유연한 팔의 동력학은 안정성을 분석하기에 너무나 복잡한 비선형 방정식이기 때문으로 볼 수 있다. Cannon과 Schmitz[2]는 달단효과 기점을 검출하기 위하여 시각 센서를 사용하였으며 2차 성능 지수 접근 방식에 근거한 최적 제어 이론으로 유연한 팔을 제어하였고 Yoshiyuki 등[3]은 분산 매개변수 시스템에 대한 제어 이론에

근거하여 궤환제어기를 구성하기 위하여 센서 출력을 이용하여 유연치수의 비선형 동력학 보상기를 활용하였다. 그리고 Yeung 과 Chen[4]은 선형화를 통한 가변구조제어를 이용하였다. 그러나 이들의 방법은 선형 궤환 제어 방법에 근거를 두고 있는 관계로 동력학 방정식이 비선형인 유연한 로봇트 매니플레이터에 적용하기에는 다소 문제점이 발생할 수 있다.

최근 강체 로봇트 팔의 제어에 있어서 널리 활용되고 있는 computed 토크 방법과 유사한 방식을 통하여 안정한 비선형 제어 법칙을 모색하려는 연구 동향이 있다.[5,6] 또 다른 한편으로는 강체 로봇트의 적응제어에 관한 많은 논문이 있다.[7,8,9,10,11]

본 논문에서는 가정모드 방식과 Lagrange 방정식을 이용하여 임의의 모드 수를 갖는 단일 링크에서 확장된 2-링크 유연한 로봇트 팔의 동력학 방정식을 유도하였으며, 유도된 동력학 방정식에 근거하여 강체 로봇트 팔의 제어에 있어서 Spong 및 Ham 등[12]이 제안한 Lyapunov-like 함수를 활용하여 유연한 로봇트 팔에 대하여 새로운 일반화된 제어 방법과 적응제어 법칙을 제안하고 그 제어방식의 안정도를 분석하였다. 제안된 제어기설계에 있어서는 행렬 $dD/dt - 2C$ 이 skew-symmetric 행렬이라는 사실을 이용하여 제어기 구조를 단순화하였다.

본 논문의 구성은 2장에서는 가정모드 및 Lagrange 방정식을 이용하여 2번째의 링크 끝부위에 부하하중을 갖는 2-링크 유연한 팔의 동력학 방정식을 유도하였으며, 3장에서는 조인트 각을 원하는 각도로 움직이도록 하는 제어법칙을 Lyapunov 안정도 이론 및 비선형 보상기를 활용하여 제안하였다. 4장에서는 제안한 제어법칙에 적응제어 기법을 더하였으며, 5장에서는 결론을 맺는다.

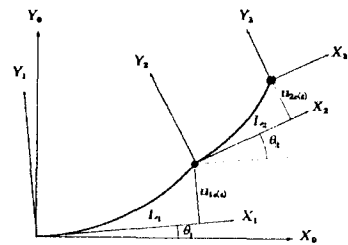


그림 1. 2-링크 유연한 로봇트 팔

2. 유연한 팔의 동역학 모델

본 장에서는 Bernoulli-Euler beam 이론 및 가정모드 방식을 이용하여 그림 1과 같이 2번째 링크의 끝부분에 부하를 갖는 2-링크 유연한 로봇 팔에 대한 동역학 모델을 유도한다.

OX_0Y_0 는 기준좌표계를, OX_1Y_1 , OX_2Y_2 , OX_3Y_3 는 각각의 관절에 대한 관절좌표계를 나타내며, 로봇 팔의 길이를 L_1, L_2 , 허브에서 관성을 J_H, J_H , 링크에서 관성을 J_L , 단위 길이당 질량을 ρ , Young의 계수를 E , 링크의 횡면적을 A , 횡면적 관성 모우멘트를 I 로 정의한다. 여기에서 아래첨자 1, 2는 링크의 첫번째, 두번째를 나타낸다. 좌표계간의 변환행렬은 다음과 같다.[13]

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & L_1 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & u_{1e}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & u_{2e}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 0A_i 는 기준좌표계에서 i 번째 좌표축의 위치를 나타내는 변환행렬이고 iA_j 는 i 번째 좌표계에서 j 번째 좌표축의 위치를 나타내는 변환행렬이다. 기준좌표계에서 링크 각각의 끝점에 대하여 본 좌표는 다음과 같다.

$${}^0R_{L1} = {}^0A_1 {}^1A_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$${}^0R_{2L} = {}^0A_1 {}^1A_2 {}^2A_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

여기서 ${}^0R_{iL}$ 은 기준좌표계에서 i 번째 링크끝점의 위치를 표시하는 변환행렬이다.

로봇 팔의 힘에 대하여 Bernoulli-Euler의 Beam 이론을 적용하면 링크에 대한 동역학 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$EI \frac{\partial^4 u(\xi, t)}{\partial \xi^4} + \rho AL^4 \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

여기서 $\xi = x/L$ 은 링크의 길이를 정규화한 변수를 의미한다. 이때 링크의 횡굴절 $u(\xi, t)$ 는 시간함수와 공간함수의 곱의 무한급수로 나타낼 수 있다. 즉

$$u(\xi, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(\xi) \delta_i(t) \quad (5)$$

일반적으로 유연성 시스템의 3차 이상의 고차모드의 크기는 1차모드의 크기에 비하여 대단히 작으므로 2차모드로 하여도 시스템을 충분히 분석할 수 있다.

식 (4)에 의하여 각각의 시간함수 $\delta_i(t)$ 와 공간함수 $\phi_i(\xi)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta_i(t) = \exp(j\omega_i t), \quad \omega_i^2 = \frac{\beta_i^4 EI}{\rho AL^4} \quad (6)$$

$$\phi_i(\xi) = C_1 \sin \beta_i \xi + C_2 \cos \beta_i \xi + C_3 \sinh \beta_i \xi + C_4 \cosh \beta_i \xi \quad (7)$$

링크의 경계조건을 만족하는 β 의 값은 무한히 많으며 이들 각각은 링크의 변형에 대한 공간상의 형태함수를 특정 짓는다. 또한 이러한 β 값에 대응하여 링크의 시간에 대한 함수의 고유진동 주파수 ω 가 결정된다. 링크의 hub 부위 및 끝점의 하중에 대한 경계조건으로부터 식(8-10)이 만족된다.

링크 1의 끝점에서의 유연한 팔의 경계조건을 찾을 때 링크 2 및 부하의 질량을 무시하고 단지 링크 2의 허브값만을 고려하면 다음과 같다.

$$\phi_1(\xi) |_{\xi=0} = 0, \quad \phi_1'(\xi) |_{\xi=0} = 0 \quad (8)$$

$$\phi_1''(\xi) |_{\xi=1} = \frac{J_{L1} \beta^4}{\rho_1 A_1 L_1^3} \phi_1'(\xi) |_{\xi=1} \quad (9)$$

$$\phi_1'''(\xi) |_{\xi=1} = \frac{M_{L1} \beta^4}{\rho_1 A_1 L_1} \phi_1(\xi) |_{\xi=1} \quad (10)$$

링크 2의 끝점 및 링크 2의 허브에서 유연한 팔의 경계조건을 찾으면 다음과 같다. 문제를 단순화시키기 위하여 load를 point mass로 간주하며 이때 회전력에 의하여 생기는 J_{L2} 는 0이다.

$$\phi_2(\xi) |_{\xi=0} = 0, \quad \phi_2'(\xi) |_{\xi=0} = 0 \quad (11)$$

$$\phi_2''(\xi) |_{\xi=1} = \frac{J_{L2} \beta^4}{\rho_2 A_2 L_2^3} \phi_2'(\xi) |_{\xi=1} = 0 \quad (12)$$

$$\phi_2'''(\xi) |_{\xi=1} = \frac{M_{L2} \beta^4}{\rho_2 A_2 L_2} \phi_2(\xi) |_{\xi=1} \quad (13)$$

위에서 서술한 것처럼 링크1과 링크2의 경계조건으로부터 각각 링크의 힘이 결정된다. 여기서 M_{L1}, M_{L2} 은 링크 끝점의 부하 질량, J_{L1}, J_{L2} 은 링크 끝점의 관성모멘트를 나타낸다. 링크 1의 힘은 식(8-10)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2 \quad (14)$$

$$Q_1(\beta) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

여기서 β 의 값은 2×2 행렬 $Q_1(\beta)$ 의 행렬식이 0이 되도록 하는 다음과 같은 식을 만족하도록 찾으려 된다.

$$\begin{aligned}
& (1 + \cos \beta \cosh \beta) - M \beta (\sin \beta \cos \beta - \cos \beta \sinh \beta) \\
& - J \beta^3 (\sin \beta \cosh \beta + \cos \beta \sinh \beta) + M J \beta^4 (1 - \cos \beta \cosh \beta) \\
& = 0 \tag{16}
\end{aligned}$$

여기서 $M = M_{L1} / \rho A L_1$, $J = J_{L1} / \rho A L_1^3$ 이다.
링크 2의 힘은 식(11-13)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_3 = -C_1, \quad C_4 = -C_2 \tag{17}$$

$$Q_2(\beta) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{18}$$

여기서 β 의 값은 2×2 행렬 $Q_2(\beta)$ 의 행렬식이 0 이 되도록 하는 다음과 같은 식을 만족하도록 찾으면 된다.

$$(1 + \cos \beta \cosh \beta) - M \beta (\sin \beta \cos \beta - \cos \beta \sinh \beta) = 0 \tag{19}$$

여기서 $M = M_{L2} / \rho A L_2$, $J = J_{L2} / \rho A L_2^3$ 이다.

이제 Lagrangian 접근방식을 이용하여 2-링크 유연한 로보트 팔의 동역학 모델을 유도한다.
유연한 팔의 전체 운동에너지 T는 다음과 같이 분리하여 표현 될 수 있다.

$$T = T_{hub1} + T_{link1} + T_{hub2} + T_{link2} + T_{load} \tag{20}$$

허브의 각각에서 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_{hub1} = \frac{1}{2} J_{H1} \dot{\theta}_1^2 \tag{21}$$

$$T_{hub2} = \frac{1}{2} J_{H2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} M_{L1} (\dot{\theta}_1^2 u_1(L_1, t)^2 + (\dot{u}_1(L_1, t) + L_1 \dot{\theta}_1)^2)$$

(point mass로하여 얻은 항)

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} J_{L1} \left[\dot{\theta}_1 + \frac{\partial \dot{u}_1(L_1, t)}{\partial x} \right]^2 \\
& \text{(point mass가 아닌 회전에 의한 항)} \tag{22}
\end{aligned}$$

유연한 링크의 각각에서 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_{link1} = \frac{1}{2} \int \text{trace}({}^0V_1 {}^0V_1^T) dm \tag{23}$$

$$T_{link2} = \frac{1}{2} \int \text{trace}({}^0V_2 {}^0V_2^T) dm \tag{24}$$

$${}^0R_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ u_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 x_1 - \sin \theta_1 u_1 \\ \sin \theta_1 x_1 + \cos \theta_1 u_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0V_1 = {}^0R_1 = \begin{bmatrix} -\sin \theta_1 \dot{\theta}_1 x_1 - \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 u_1 - \sin \theta_1 \dot{u}_1 \\ \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 x_1 - \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 u_1 + \cos \theta_1 \dot{u}_1 \end{bmatrix}$$

$$\| {}^0V_1 \|^2 = \dot{\theta}_1^2 x_1^2 + \dot{\theta}_1^2 u_1^2(t) + \dot{u}_1^2(t) + 2\dot{\theta}_1 \dot{u}_1(t) x_1 \tag{25}$$

load에서 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_{load} = \frac{1}{2} M_{L2} ({}^0V_{2L} {}^0V_{2L}^T) \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\| {}^0V_{2L} \|^2 = & \dot{\theta}_2^2 [L_2^2 + u_{2e}^2 + L_1^2 + u_{1e}^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 - 2L_1 u_{2e} \sin \theta_2 \\
& + 2L_2 u_{1e} \sin \theta_2 + 2u_{1e} u_{2e} \cos \theta_2] + \dot{\theta}_2^2 (L_2^2 + u_{2e}^2) \\
& + \dot{\theta}_2 (L_2 \dot{u}_{2e} + \dot{u}_{1e} L_2 \cos \theta_2 - u_{1e} \sin \theta_2 \dot{u}_{2e}) \\
& + u_{2e}^2 + u_{1e}^2 + u_{1e} \cos \theta_2 \dot{u}_{2e} \\
& + 2\dot{\theta}_1 [L_2^2 \dot{\theta}_2 + (L_2 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 u_{2e} + L_1)(\cos \theta_2 \dot{u}_{2e} + \dot{u}_{1e}) \\
& + u_{1e} (L_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 u_{2e} + \sin \theta_2 \dot{u}_{2e}) \\
& + u_{2e}^2 \dot{\theta}_2 + L_1 (L_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 - \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 u_{2e}) \\
& + \sin \theta_2 \dot{u}_{2e} (L_2 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 u_{2e})] \tag{27}
\end{aligned}$$

문제를 간단하게 하기 위하여 링크의 무게를 무시하고 링크를 가상의 얇은 유연한 줄(string)로 간주하여 이 유연한 링크상에서의 운동에너지는 없다고 가정하고 단지 끝점 및 시작점 부위에서의 감쇠(deformation)만 고려하여 동역학 모델을 구하였다. 즉 힘의 형태를 구할 경우에는 유연한 링크상의 무게 밀도 및 단면적 등을 고려하고 경계조건으로부터 힘의 형태를 찾되 Lagrange 방정식을 도입하는 시기에 있어서는 이들 링크상의 변위에 대한 운동에너지를 무시하여 문제를 간략화하기로 한다.

Strain 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
U &= \int_0^L \frac{EI}{2} u_i''(x, t)^2 dx \\
&= \int_0^L \frac{EI}{2} \left[\sum_{i=1}^m \phi_i''(x) \delta_i(t) \right]^2 dx \tag{28}
\end{aligned}$$

감쇠 δu 동안에 점성력에 의하여 형성되는 가상에너지 δW_E 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W_E = - \int_0^L (f \dot{u}(x, t) \delta u) dx \tag{29}$$

여기서 f 는 점성 마찰 계수이다.

모드 항을 2로 하면 u 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= \sum_{i=1}^2 \phi_{1i}(x) \delta_{1i}(t) & u_2(x, t) &= \sum_{i=1}^2 \phi_{2i}(x) \delta_{2i}(t) \\
u_{1e}(t) &= \sum_{i=1}^2 \phi_{1ie}(x) \delta_{1ie}(t) & u_{2e}(t) &= \sum_{i=1}^2 \phi_{2ie}(x) \delta_{2ie}(t) \tag{30}
\end{aligned}$$

다음과 같이 Lagrangian 방정식을 적용한다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial W_E}{\partial q_i} = F_i$$

$$i=1,2,3, \dots, 6 \quad (31)$$

$$q_1=\theta_1, q_2=\theta_2, q_3=\delta_{11}, q_4=\delta_{12}, q_5=\delta_{21}, q_6=\delta_{22}$$

$$F_1=\tau_1, F_2=\tau_2, F_3=0, \dots, F_6=0$$

여기서 T 는 전체 운동 에너지 ($T_{hub1}+T_{hub2}+T_{load}$), U 는 strain 에너지, W_E 는 점성 마찰 에너지, F_i 는 적용한 일반화된 힘, q_i 는 일반화된 변수, \dot{q}_i 는 일반화된 속도이다. 이상의 관계에서 다음과 같은 동역학 방정식을 구한다.

$$D \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k\eta + F\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기서

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad D_{11} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} d_{31} & d_{32} \\ d_{41} & d_{42} \\ d_{51} & d_{52} \\ d_{61} & d_{62} \end{bmatrix} \quad D_{22} = \begin{bmatrix} d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \\ d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\ d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad C_{12} = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \\ c_{51} & c_{52} \\ c_{61} & c_{62} \end{bmatrix} \quad C_{22} = \begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \eta = \begin{bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad \text{이다.}$$

동가 스프링 상수 행렬 K 와 댐핑 행렬 F 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \text{diag}(k_1, \dots, k_4)$$

$$F = \text{diag}(f_1, \dots, f_4)$$

여기서 k_i 와 f_i 는 각각 다음과 같다.

$$k_i = \frac{EI}{L_1^3} \int_0^1 \left[\frac{d^2 \phi_{1i}(\xi)}{d\xi^2} \right]^2 d\xi \quad i=1,2$$

$$k_i = \frac{EI}{L_2^3} \int_0^1 \left[\frac{d^2 \phi_{2i}(\xi)}{d\xi^2} \right]^2 d\xi \quad i=3,4$$

$$f_i = - \int_0^1 f \phi_{1i}^2(\xi) d\xi \quad i=1,2$$

$$f_i = - \int_0^1 f \phi_{2i}^2(\xi) d\xi \quad i=3,4$$

식(32)에서 행렬 $dD/dt - 2C$ 가 skew-symmetric 행렬임을 알 수 있다.

3. 조인트 각변위에 대한 확정적 제어기 설계

식(32)의 동역학 방정식에서 변수들을 알고 있다고 가정할 경우, 제어 문제는 $\eta(t)$ 가 0 벡터로 수렴하는 동안 조인트 각변위 $\theta(t)$ 가 가능한 한 빨리 원하는 궤적 $\theta_d(t)$ 를 추적하는 입력 $\tau(t)$ 를 결정하는 문제이다. 동역학 방정식을 다음과 같이 분할한다.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k\eta + F\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서 $\tau_n(t)$ 를 다음과 같이 둔다.

$$\tau_n(t) = \tau(t) - D_{12}^{-1} \ddot{\eta} - C_{12} \dot{\eta} \quad (34)$$

원하는 궤적 $\theta_d(t)$ 로 정확히 수렴하기 위하여 제어 법칙은 다음과 같은 Lyapunov-like 함수를 이용한다.[13]

$$V(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & P_{\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서 I 는 2×2 단위행렬이고, $P_{\infty}, P_{12}, \Gamma$ 는 2×2 symmetric positive definite 행렬이고, P_{12}, P_{∞} 는 $P_{12} = P_{\infty}^{-1} \Gamma$ 에서 선정된 행렬이며 $\dot{\theta} = \theta(t) - \theta_d(t)$ 이다.

벡터 $x_s(t)$ 와 4×4 행렬 S 는 다음과 같다.

$$x_s(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad S = \begin{bmatrix} I & P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (36)$$

$V(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$V(t) = \frac{1}{2} [S x_s]^T \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} [S x_s] \quad (37)$$

$V(t)$ 를 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= [S x_s]^T \begin{bmatrix} D_{11}/2 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \dot{[S x_s]} \\ &+ [S x_s]^T \begin{bmatrix} D_{11} & 0 \\ 0 & P_{\infty} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &= [S x_s]^T \begin{bmatrix} D_{11}/2 + D_{11} P_{12} & -D_{11} P_{12} P_{12} \\ P_{\infty} & -P_{\infty} P_{12} \end{bmatrix} [S x_s] \\ &+ [S x_s]^T \begin{bmatrix} \tau_n - C_{11} - D_{11} \delta_d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

제어 법칙에서 고려할 사항은 $V(t)$ 가 Sx_s 의 negative definite 형태가 되도록 한다. 만일 Γ 가 symmetric positive definite 행렬이면, 다음의 4×4 행렬은 symmetric positive definite임을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} P+P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty} & -P_{\infty} \\ -P_{\infty} & \Gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad (39)$$

위의 사실에 근거하여 다음의 보조정리 1에서 새로운 제어 법칙을 제안한다.

보조정리 1

P_{∞} , Γ , P 가 symmetric positive definite 행렬이고, $P_{12} = P_{\infty}^{-1}\Gamma$ 라 하면, 이때 P_{∞} , Γ , P 의 임의의 선택에 대하여 제어 법칙 τ_n 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_n = & D_{11}(\dot{\theta} - P_{12}\dot{\theta}) + C_{11}(\dot{\theta} - P_{12}\dot{\theta}) \\ & - (P + P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty})(\dot{\theta} + P_{12}\dot{\theta}) + P_{\infty}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (40)$$

이때 $V(t)$ 의 시간 도함수는 다음과 같다.

$$\dot{V}(t) = -[\dot{\theta}, \dot{\theta}] Q \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (41)$$

여기서 Q 는 다음과 같다.

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} I & P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P+P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty} & -P_{\infty} \\ -P_{\infty} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

증명

보조정리 1에서 위의 제어 법칙을 식 (38)에 적용하면 $V(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V(t) = & [Sx_s]^T \begin{bmatrix} D_{11}(\eta)/2 - C_{11} - (P+P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty}) & P_{\infty} \\ P_{\infty} & -\Gamma \end{bmatrix} \\ & [Sx_s] \end{aligned} \quad (42)$$

$D-2C$ 가 skew-symmetric 행렬이므로 다음을 구할 수 있다.

$$D_{11} - 2C_{11} = 0 \quad (43)$$

식 (39)을 이용하여 앞의 식 $V(t)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} V(t) = & -[Sx_s]^T \begin{bmatrix} P+P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty} & -P_{\infty} \\ -P_{\infty} & \Gamma \end{bmatrix} [Sx_s] \\ & = [\dot{\theta}^T, \dot{\theta}^T] Q \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \leq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

η 의 안정도 분석에 있어서, 앞에서 적용한 식 (40)의 제어 법칙과 정상상태에서 $\theta(t)$ 가 $\theta_d(t)$ 로 수렴한다고 가정하면, 동력학 방정식 $\eta(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$D_{22}\ddot{\eta}(t) + (C_{22} + F)\dot{\eta}(t) + K\eta(t) = -D_{12}\dot{\theta}_d(t) - C_{21}\theta_d(t) \quad (45)$$

만일 위의 동력학 방정식이 불안정하면, 제안한 제어 법칙은 전체의 제어 법칙의 적용 과정에 있어서 실행 불가능하다. 정상 상태에서 $C_{22} + F > 0$ 이며 $\dot{\theta}_d(t) = 0$, $\theta_d(t) = 0$ 인 $\theta_d(t)$ 를 선정하면 위에서의 동력학 방정식은 D_{22} , $C_{22} + F$, K 가 4×4 positive definite 행렬이므로, 안정함을 알 수 있다.

Remark 1 : 만일 유연한 링크/허브를 $C_{22} + F$ 가 positive definite가 아닌 빠르게 이동한다면, 위의 $\dot{\eta}(t)$ 와 관련된 동력학 방정식은 불안정하며, 진동은 damped out되지 않고 유연한 링크/허브의 이동 동안에 증가하게 된다. 즉, 만일 유연한 링크, 허브를 서서히 이동하면, 진동이 발생하지 않음을 알 수 있다.

4. 적응 제어기 설계

본 장에서는 앞 장에서 제안한 것처럼 제어기를 구성하기 위하여 D , C , K , F 에 포함되어 있는 시스템 변수를 update할 수 있는 변수 적용 법칙을 제안한다. 미지의 시스템 변수가 다음의 형태와 같이 선형인 확정적 제어 법칙을 살펴본다.

$$\begin{aligned} \tau(t) = & \psi(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})\theta + \psi_o(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) \\ & = D_{12}^T\ddot{\eta} + C_{12}\dot{\eta} + D_{11}(\dot{\theta}_d - P_{12}\dot{\theta}) + C_{11}(\theta_d - P_{12}\dot{\theta}) \\ & \quad (P + P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty})(\theta_d + P_{12}\dot{\theta}) + P_{\infty}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (46)$$

θ 는 미지이므로, $\hat{\theta}$ 은 θ 의 추정인 다음의 제어 법칙을 이용한다.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(t) = & \psi(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})\hat{\theta} + \psi_o(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) \\ & = \hat{D}_{12}^T\ddot{\eta} + C_{12}\dot{\eta} + \hat{D}_{11}(\theta_d - P_{12}\dot{\theta}) + C_{11}(\theta_d - P_{12}\dot{\theta}) \\ & \quad - (P + P_{\infty}\Gamma^{-1}P_{\infty})(\theta_d + P_{12}\dot{\theta}) + P_{\infty}\dot{\theta} \end{aligned} \quad (47)$$

$\hat{\theta}$ 을 다음과 같이 정의 하면,

$$\hat{\theta} = \hat{\theta} - \theta$$

위의 제어법칙은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(t) = & \psi(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})\theta + \psi_o(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}) \\ & + \psi(\theta_d, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta})\hat{\theta} \end{aligned} \quad (48)$$

만일 Lyapunov-like 함수 $V_1(t)$ 를 다음과 같이 정의하면

$$V_1(t) = V(t) + \frac{1}{2} \bar{\theta}^T P_{\infty} \bar{\theta} \quad (49)$$

여기서 $V(t)$ 는 $\tau(t)$ 를 $\bar{\tau}(t)$ 로 교체하면 식 (35)와 같고, P_{∞} 은 크기가 벡터 $\bar{\theta}$ 에 의하여 결정되는 positive definite 행렬이다. 식 (48)에서 정의한 바와 같이 제어 법칙을 이용하여, $V(t)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} V_1(t) &= V(t) + [Sx_e]^T \begin{bmatrix} \psi \bar{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\theta}^T P_{\infty} \bar{\theta} \\ &= V(t) + [\bar{\theta}, \bar{\theta}] \begin{bmatrix} I & 0 \\ P_{12} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \bar{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\theta}^T P_{\infty} \bar{\theta} \\ &= V(t) + (\bar{\theta} + P_{12} \bar{\theta}) \psi \bar{\theta} + \bar{\theta}^T P_{\infty} \bar{\theta} \end{aligned} \quad (50)$$

여기서 $V(t)$ 는 식(41)과 같다. $V_1(t) = V(t)$ 가 되도록 하기 위하여, 마지막 두개의 항의 합이 0 이 되도록 변수 적용 법칙을 설계하여야 한다.

즉

$$\bar{\theta} = \bar{\theta} - P_{\infty}^{-1} \psi^T (\bar{\theta} + P_{12} \bar{\theta}) \quad (51)$$

5. 결론

본 논문은 2-링크 유연한 로봇트 팔에 대한 확정적이고 적응적인 제어법칙을 다루었다. 동력학 방정식은 Bernoulli-Euler beam 이론, 가정모드 방식과 Lagrangian 방정식을 이용하여 구하였다. $dD/dt - 2C$ 이 skew-symmetric 행렬이 되도록, 전체 운동에너지를 Lagrangian 방정식에 적용하여 동력학 방정식을 구한 다음, D행렬은 상태변수의 각각에 대한 가속도 항을 구함으로써 얻을 수 있었고, C행렬은 상태변수의 각각에 대한 속도 항과 속도의 제곱항을 구한 다음 속도항은 2로 나눔으로써 얻을 수 있었다. $dD/dt - 2C$ 이 skew-symmetric 행렬이라는 사실에서 제어를 좀더 간단하게 구성할 수 있으므로 더욱 계산량을 줄일 수 있었다. 앞으로 효율적인 적응제어를 위하여 비선형인 동력학 방정식을 미지의 모든 매개변수로 선형화 시키는 연구가 더욱 필요하다.

참고 문헌

[1] P.Kopacek, K.Desoyer and P.Lugner, "Modelling of flexible robots an introduction," *IFAC Symposium*, Karlsruhe, FRG, Oct, 1988, pp.20-28.
 [2] Robert H.Cannon, Jr. Eric Schmitz, "Initial Experiments on the End-Point Control of a Flexible One-Link Robot," *the Int.J.Robotics Research*, vol.3, no.3, Fall, 1984, pp.62-75.
 [3] Y.Sakawa, F.Matsuno, and S.Fukushima, "Modeling and feedback control of a flexible arm", *J. of Robotic systems*, vol. 2, no.4, 1985, pp.453-472.

[4] K.S.YEUNG and Y.P.CHEN, "Regulation of a one-link flexible robot arm using sliding-mode technique", *I.J.Control*, 1989, vol. 49, no. 6, 1965-1978
 [5] S.Nicosia, P.Tomei, and A.Tornambe, " Non-linear control and observation algorithms for a single-link flexible arm", *I.J.Control*, vol.49, no.3, 1989, pp.827-840.
 [6] A.D. Luca and B.Siciliano, "Trajectory control of a nonlinear one-link flexible arm", *I.J.Control*, vol.50, no.5, 1989, pp.1699-1715.
 [7] J.J.E. Slotine and W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators," *Int'l J. of Robotics Research*, vol.6, no.3, Fall, 1987, pp.49-59.
 [8] J.J.E. Slotine and W. Li, "Adaptive robot control: A new perspective," *Proc. of the 26th IEEE Conference on Decision and Control*, Dec, 1987, pp.192-198.
 [9] J.S. Chen and C.H. Menq, "Modeling and adaptive control of a flexible one-link manipulaor, *Robotica*, vol.8, 1990, pp.339-345.
 [10] R.Johansson, "Adaptive control of robot manipulator motion," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol.6, no.4, Aug, 1990, pp.483-490.
 [11] M.W. Spong, R.Ortega, "On adaptive inverse dynamics control of rigid robots," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.35, Jan, 1990, pp.92-95.
 [12] W.C.Ham, "Adaptive control based on explicit model of robot manipulators", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.38, no.4, April, 1993, pp.654-658.
 [13] Mark. W. Spong, M.Vidyasagar, "Robot Dynamics And Control", *John Wiley & Sons Pub*, pp.62-91.