다변수 계통의 강인제어기 설계에 관한 연구

박 승 규*

창원대학교 전기공학과

A STUDY ON THE ROBUST CONTROLLER DESIGN

PARK SEUNG KYU

Dept. of Electrical Eng., Changwon National Univ.

- abstract -

In this paper we propose a new method which diagonalize a transfer function matrix. Using it, we can design robust controllers for more MIMO system very easily.

1. 서 론

최근 주파수 영역에서의 제어기 설계에 관한 연구에 있어서 많은 진전이 있었다. 특히 계통의 모델 불확실성에 의한 제어 시스템의 성능저하를 방지하는 강인제어 이론의 진보가 있었는데 SISO계통에 대한 연구[1]와 더불어 MIMO계통에도 많은 연구가 있었다. MIMO계통에서의 연구들을 보면 singular value 개념을 사용하여 MIMO계통을 그대로 다루어 강인제어기를 설계하는 방법[2]과 여러개의 SISO계통으로 분리하여 각각에 대한 강인제어기를 설계하는 방법이 있다. MIMO계통을 스칼라 문제로 바꾸어 해결하는 연구중에서 대표적인 방법이 CL(Caracteristic Locus)[3], INA(Inverted Niqust Array)[4] 방법들이다. 이 방법들에 있어서의 중요한 과정이 전달함수행렬의 대각화 과정이다. 위의 방법을 사용하지 않더라도 전달함수의 대각화는 MIMO계통의 제어기 구성에 중요하다. 본 연구에서는 전달함수 행렬의 대각화 방법에 있어서 새로운 방법을 제시하여 MIMO계통을 SISO계통으로 바꾸어 강인제어기를 구성하는데 사용하고자 한다.

2. 전달함수 행렬의 대각화

본 절에서는 MIMO 계통의 강인제어에 사용되어 온 전달함수의 대각화 방법에 대해서 살펴봄과 동시에 새로운 대각화 방법을 제안하기로 한다.

(1) CL 방법에 사용된 대각화 방법

전달함수 행렬이 아닌 일반 상수 행렬을 대각화시키는 방법과 마찬가지의 방법이다.

(2) INA 방법에서 사용된 대각화 방법

전달함수 행렬에 행연산과 열연산을 취하여 대각화 하는 방법으로 다음과 같은 형태를 가진다.

$$P(s) = V(s)Q(s)W(s) \qquad (1)$$

여기서 $Q(s)$는 대각 전달함수 행렬이고 $V(s)$, $P(s)$, $W(s)$는 전달함수 행렬이다.

(3) 본 연구에서 제안한 대각화 방법

우선 본 연구에서 제안된 대각화 방법에 의해서 대각화가 가능할 조건은 다음 정리와 같다.

정리 대각화가 가능할 필요충분 조건은 다음과 같다.
임의의 전달함수 행렬 $P(s)= Q(s)/d(s)$에서 $Q(s)$가 행연산 $V(s)$와 열연산 $W(s)$를 행하여 다음의 형태로 만들 수 있다.

$$a_n s^n A_n + a_{n-1} s^{n-1} A_{n-1} + \cdots\cdots a_1 s A_1 + a_0 A_0 \qquad (2)$$

여기서
$d(s)$는 전달함수 행렬의 요소들의 분모의 최소공배다항식이고, $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 중에 임의의 하나를 제외하고 모두 단위행렬이다.

위의 대각화 조건은 대각행렬보다는 완화된 조건이므로 두번째 방법보다 더 많은 형태의 행렬의 대각화가 가능하다. 대각화시키는 방법은 다음과 같다.

대각화 시키고자 하는 $Q(s)$ 행렬을 식 (2)의 형태로 만들었다고 하고 A_k만이 단위행렬이 아니라고 하자. A_k의 대각화 행렬을 P_k라고 하면 다음과 같다.

$$P_k A_k P_k = \Lambda_k \qquad (3)$$

여기서 $\Lambda_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$V(s)P(s)W(s) = (a_n s^n I_n + a_{n-1} s^{n-1} I_n + \cdots\cdots a_1 s I_n + a_0 I_n)/d(s)$$

$$P_k V(s)P(s)W(s)P_k^{-1} = (a_n s^n I_n + \cdots\cdots a_k s^k \Lambda_k + \cdots\cdots a_1 s I_n + a_0 I_n)/d(s)$$

$$= \mathrm{diag}\{ a_n s^n + \cdots a_k s^k \lambda_i + \cdots a_1 s + a_0 \}/d(s)$$

(4) 대각화 방법의 비교

본 연구에서 제안한 방법과 기존의 대각화 방법들을 예제를 통해서 비교해 보기로 한다.

대각화할 대상은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

(a) 첫번째 방법

고유함수들을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_{1,2}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}[2s+3 \pm (16s^2 + 48s + 33)] \tag{5}$$

고유벡터들은 다음과 같다.

$$\frac{w_{1i}(s)}{w_{2i}(s)} = -2\left[\frac{-s -1 \pm(16s^2 + 48s + 33)}{s + 2}\right] \tag{6}$$

(b) 두번째 방법

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 2s+4 \\ 2s+2 & s+1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

다음의 행렬을 좌우측에 각각 곱하면 대각화가 이루어진다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2s+2}{s+2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

대각화된 형태는 다음과 같다.

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

(c) 본 연구에서 제안한 방법

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+2 & 2s+4 \\ 2s+2 & s+1 \end{bmatrix}$$

식(2)의 형태로 만들기 위하여 좌우에 다음의 행렬들을 각각 곱한다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

그 결과 다음과 같은 행렬과 표현식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 3s+6 & 0 \\ -2s & 2s+6 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

우변의 첫번째항의 행렬에 대한 대각화 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

그러므로 식(4)은 다음과 같은 표현이 가능하다.

Q(s)= AP(s)B

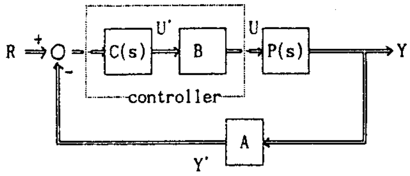
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}P(s)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{(s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{2s+6}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

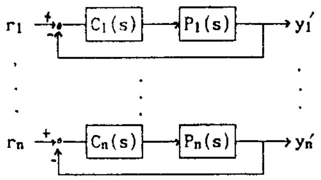
두번째 방법에서는 상수 행렬만을 가지고는 대각화시킬 수 없다고 생각했는데 이 방법에 의해서 상수행렬만을 가지고 대각화시킬 수 있었다.

3. MIMO계통에 대한 강인 제어기의 설계

본 연구에서 제안한 대각화 방법을 사용하여 식(4)를 전달함수 행렬로 갖는 MIMO계통을 여러개의 SISO계통으로 생각하여 각각에 대한 강인제어기를 설계함으로써 전체에 대한 강인제어기를 설계할 수 있게 된다.



위의 계통은 다음과 같은 여러개의 SISO계통으로 생각할 수 있다



여기서 $Q(s) = BP(s)A = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & p_n \end{bmatrix}$

각각에 대한 강인제어기를 설계하면 전체적인 제어기와 피이드백은 다음과 같다.

$$C(s) = A\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_n \end{bmatrix}, \; B \tag{11}$$

4. 결 론

본 연구에서는 일정한 조건을 만족시키는 전달함수 행렬의 좌우에 행렬을 곱함으로써 대각화 시킬 수 있는 새로운 방법을 제안하였다.

제안된 대각화 방법은 이제까지의 방법들보다 더 많은 범위의 행렬에 대한 대각화를 쉽게 행할 수 있도록 해준다. 즉 이제까지의 방법에 의해서 대각화가 되지 않다고 생각되는 식(2)의 형태에 대한 대각화를 쉽게 생각해낼 수 있도록 해준다.

제안된 방법을 이용하여 MIMO계통의 강인 제어기 설계를 용이하게 할 수 있다.

정방행렬에 대해서 전개했지만 정방행렬이 아닌 경우에도 그대로 적용된다.

5. 참 고 문 헌

(1) J.C.Doyle, B.A.Francis, A.R.Tannenbaum ," Feedback Control Theory", 1992

(2) J.C. Doyle, G. Stein, " Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", IEEE AC-26, pp.4-16, 1981

(3) A.G.J.MacFarlane, B.Kouvaritakis,"A design technique for linear multivariable feedback systems"', Int. J. Contr.,vol.25, pp837-879, 1977

(4) J.M. Maciejoski," Multivariable Feedback Design", 1989