

저차 시스템에 의한 다변수 시스템의 모델링

안두수*, 이명규[△], 김민형^{*0}

* : 성균관 대학교 전기공학과

[△] : 경성대학교 전기공학과

Modeling for Multivariable Systems by Low Order Systems

Ahn, Doo-Soo*, Lee, Myung-Kyu[△], Kim Min-Hyung^{*0}

* : DEPT. of ELECTRICAL ENG., SUNG KYUN KWAN UNIVERSITY

[△] : DEPT. of ELECTRICAL ENG., KYUNG SUNG UNIVERSITY

Abstract

This paper presents model reduction method of multivariable systems using orthogonal transformation based on aggregation method in time domain. Reduced model which is designed by presented method preserve stability as relative dominant eigenvalues are selected in original system and obtained computational advantages using orthogonal functions.

1. 서론

실제의 물리계는 해석적인 고찰의 결과로 상당히 복잡한 고차 시스템으로 모델링되는 경우가 대부분인데 이러한 고차 시스템은 그 동특성을 이해하기 어려울 뿐만 아니라 제어기 구현시 시스템 차수로 인해 계산량 부담이 커지게 되어 경우에 따라서는 구현이 불가능할 수도 있다. 따라서 이러한 어려움을 해결하기 위한 방법으로 고차 시스템과 유사한 특성을 갖는 저차 시스템을 구하는 모델 축소 기법의 연구에 대한 관심이 집중되어 왔다.

모델 축소 방법은 특성상 3가지로 분류된다.^{1,3}

첫째는 지배극 유지에 기초한 방법으로써 집성법(aggregation method), 섭동법(perturbation method), 특이 섭동법(singular perturbation method) 등이 이 부류에 속한다. 이 방법은 축소된 저차 시스템과 원 시스템과의 유사성을 보장할 수 없다는 문제점 때문에 정밀도가 요구되는 경우에는 어려움이 따른다.

둘째는 기하학적 접근 방법을 이용한 최적응답법으로써 연속분할기법(continued fraction method) 등이 이 부류에 속한다. 그러나 이 방법은 축소된 모델의 안정도를 보장할 수 없다는 단점이 있다.

셋째는 응답의 여러 특성을 matching하는데 기초한다. matching time moment, Pade 근사법, Routh Approximation 등이 이 부류에 속한다.

본 연구에서는 주어진 시스템을 월취함수로 변환한 후 축소모델의 안정도 보장을 위해 전달함수 행렬의 분모항에 대해서는 집성법을 적용하고 정밀도의 향상을 위해서 분자항은 최적응답법을 적용한 다변수계에서의 모델 축소 방법을 제시하고자 한다.

2. 월취함수 변환

적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 구간 $[0, T]$ 에서 직교 함수를 이용해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(t) = \sum_{i=0}^m c_i \phi_i(t) \quad (2.1)$$

여기서,

c_i : i 번째 직교 함수의 계수

$\phi_i(t)$: 임의의 직교 함수의 조합

임의의 함수 $f(t)$ 를 월취함수로 유한 급수 전개하면 다음과 같이 근사값 $\hat{f}(t)$ 로 나타낼 수 있다.

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \phi_i(t) \quad (2.2)$$

c_i : i 번째 월취 함수의 계수

m : 전개 항수

식 (2.2)와 같은 유한급수 전개의 근사적으로 표현하면 임의의 함수와 근사값 사이에 오차가 존재하는데 이 오차의 제곱을 적

분하여 최소화하도록 계수 c_i 를 결정한다. 즉,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \int_0^1 [f(t) - \hat{f}(t)]^2 dt \\ &= \int_0^1 [f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} c_i \phi_i(t)]^2 dt \end{aligned} \quad (2.3)$$

위 식과 같은 오차식을 최소화하기 위해 c_i 에 대해 편미분한 값이 다음 식과 같이 영(0)이 되어야 한다.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial c_i} = 0 \quad (2.4)$$

월취 함수는 다음과 같은 정규 직교성을 갖고 있다.

$$\int_0^1 \phi_i(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad (2.5)$$

월취 함수의 정규 직교성을 도입하면 계수 c_i 는 다음과 같이 구할 수 있다.^{1,3}

$$\begin{aligned} c_i &= \int_0^1 f(t) \phi_i(t) dt \\ \text{단, } i &= 0, 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. 월취함수에 의한 SISO 시스템의 모델 축소 기법

다음과 같은 n 차의 시스템을 축소시키기 위해

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= h'x(t) \\ x(t) &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.1)$$

단 (A, b, h') 는 minimal하다고 가정한다. 축소된 r 차의 시스템을 다음과 같이 가정하면

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t) &= A_r x_r(t) + b_r u(t) \\ y_r(t) &= h_r' x_r(t) \\ x_r(t) &\in \mathbb{R}^r \end{aligned} \quad (3.2)$$

단, $r < n$ 이고 (A_r, b_r, h_r') 는 minimal하다고 가정한다. 저차의 출력 $y_r(t)$ 가 임의의 입력에 대해 고차의 출력 $y(t)$ 에 접근하도록 파라미터 (A_r, b_r, h_r') 을 결정해야 한다.^{1,3} 임의의 입력에 대한 고차와 저차의 출력 간의 오차는 다음과 같다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t) \quad (3.3)$$

다음과 같은 자승 형태의 평가 함수를 고려하여

$$J = \int_0^T e^2(t) dt \quad (3.4)$$

이 평가 함수를 최소화하는 저차 시스템의 파라미터를 결정하는 것이 최적 응답 방법이다.

최적 응답 방법에 월취 함수를 적용하면 다음과 같다.

월취 함수는 $t \in [0, 1]$ 에서 정의되므로, 월취 함수가 적용된 평가 함수를 고려하기 위해 시간 스케일링(time scaling)을 하여 나타내면 다음과 같다.

$$\tau = \frac{t}{T}; \quad dt = T d\tau \quad (3.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = T(Ax + Bu) \quad (3.6)$$

$$\frac{dx_r}{d\tau} = T(A_r x_r + B_r u) \quad (3.7)$$

$$J = \int_0^1 e^2(\tau) d\tau \quad (3.8)$$

고차의 출력 $y(\tau)$ 를 일차 급수로 나타내면 다음과 같다.

$$y(\tau) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \dots + c_{n-1}\phi_{n-1} + \dots \quad (3.9)$$

c_i : 고차의 일차 급수 계수

저차의 출력 $y_r(\tau)$ 를 일차 급수로 나타내면 다음과 같다.

$$y_r(\tau) = c_{r0}\phi_0 + c_{r1}\phi_1 + \dots + c_{r,n-1}\phi_{n-1} + \dots \quad (3.10)$$

c_{ri} : 저차의 일차 급수 계수

식 (3.9) 와 식 (3.10) 간의 오차는 다음과 같은 오차 방정식으로 나타낸다.

$$e(\tau) = (c_0 - c_{r0})\phi_0 + (c_1 - c_{r1})\phi_1 + \dots + (c_{n-1} - c_{r,n-1})\phi_{n-1} + \dots \quad (3.11)$$

식 (3.11) 을 식 (3.8) 에 대입하여 평가 함수를 구하면 다음과 같다.

$$J = \int_0^1 [(c_0 - c_{r0})\phi_0 + (c_1 - c_{r1})\phi_1 + \dots + (c_{m-1} - c_{r,m-1})\phi_{m-1} + \dots]^2 dt$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (c_i - c_{ri})^2 \quad (3.12)$$

(3.12) 는 식 (2.3) 의 일차 함수의 직교 특성에 의해 얻어진다. '2,

전달함수를 미분 방정식으로 표현하면 일반적인 상태 방정식 표현에서 $n^2 + 2n$ 개의 파라미터 수가 $2n$ 개로 줄어든다. 따라서 n 차의 상태 방정식을 전달함수로 표현한 후 다음과 같은 n 차의 전달함수를 축소시킬 경우

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.13)$$

식 (3.13) 을 미분 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + b_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \quad (3.14)$$

일차함수를 적용하기 위해 시간 스케일링하고, 식 (3.14)를 표시하면

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) = b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} u(t) + b_{n-2} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} u(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \quad (3.15)$$

와 같다.

식 (3.15) 양변에 n 회의 적분을 취하여 적분 방정식으로 변환하면 다음과 같이 나타낸다

$$y(t) + a_{n-1} \int_0^t y(\tau) d\tau + a_{n-2} \int_0^t \int_0^{\tau} y(\tau) d\tau d\tau + \dots + a_1 \int_0^t y(\tau) d\tau + a_0 \int_0^t y(\tau) d\tau = b_{n-1} \int_0^t \int_0^{\tau} u(\tau) d\tau d\tau + b_{n-2} \int_0^t \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} u(\tau) d\tau d\tau d\tau + \dots + b_1 \int_0^t u(\tau) d\tau + b_0 \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (3.16)$$

여기서 위 첨자는 적분 횟수를 의미한다.

고차 시스템의 출력 $y(\tau)$ 와 입력 $u(\tau)$ 을 일차 함수 유한 급수 전개하면 다음과 같다.

$$y(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} c_i \phi_i(\tau) \quad (3.17)$$

$$= C' \Phi(\tau)$$

$$u(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i \phi_i(\tau) \quad (3.18)$$

$= U' \Phi(\tau)$

m : 전개 항수

여기서 $y(\tau)$ 와 $u(\tau)$ 의 일차 계수 벡터는 다음과 같다.

$$C' = [c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{m-1}] \quad (3.19)$$

$$U' = [u_0 \ u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{m-1}] \quad (3.20)$$

미분 방정식을 적분 방정식으로 변환하고 직교 함수를 도입할 때 적분 방정식을 대수 방정식으로 변환해주는 적분 연산자 (operational matrix)가 필요하다. '1,

$$\int_0^1 \phi_i(\tau) d\tau = P \phi_i(\tau) \quad (3.21)$$

여기서 P 는 적분 연산자 (operational matrix) 로 다음과 같은 형태이다.

$$P_{(m \times m)} = \begin{bmatrix} \frac{P(m/2 \times m/2)}{\frac{1}{2m} I(m/2 \times m/2)} & -\frac{1}{2m} I(m/2 \times m/2) \\ \frac{1}{2m} I(m/2 \times m/2) & 0(m/2 \times m/2) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

단, $P_{(1 \times 1)} = 1/2$

식 (3.17), (3.18), (3.22) 를 식 (3.16) 에 대입하여 전개하면 다음과 같다.

$$C' \Phi(\tau) + a_{n-1} I C' P \Phi(\tau) + \dots + a_1 I^{n-1} C' P^{n-1} \Phi(\tau) + a_0 I^n C' P^n \Phi(\tau) = b_{n-1} I U' P \Phi(\tau) + \dots + b_1 I^{n-1} U' P^{n-1} \Phi(\tau) + b_0 I^n U' P^n \Phi(\tau) \quad (3.23)$$

식 (3.23) 에서 $\Phi(\tau)$ 를 소거하고 임의의 입력에 대한 출력의 계수 벡터 C 가 다음 식에서 얻어진다.

$$[I + a_{n-1} I P' + a_{n-2} I^2 P'^2 + \dots + a_1 I^{n-1} P'^{n-1} + a_0 I^n P'^n] C = b_{n-1} I P' U + b_{n-2} I^2 P'^2 U + \dots + b_1 I^{n-1} P'^{n-1} U + b_0 I^n P'^n U$$

$$C = [I + a_{n-1} I P' + a_{n-2} I^2 P'^2 + \dots + a_1 I^{n-1} P'^{n-1} + a_0 I^n P'^n]^{-1} \times [b_{n-1} I P' U + \dots + b_1 I^{n-1} P'^{n-1} U + b_0 I^n P'^n U] \quad (3.24)$$

식 (3.13)에 대한 축소모델의 전달함수를 다음과 같이 가정하고

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{\beta_{r-1}s^{r-1} + \beta_{r-2}s^{r-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^r + \alpha_{r-1}s^{r-1} + \alpha_{r-2}s^{r-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (3.25)$$

단 $r < n$

식 (3.13) 모델과 같은 절차에 따라 축소 모델을 식 (3.24) 와 같이 나타내면 다음과 같다.

$$C_r + \alpha_{r-1} I P' C_r + \alpha_{r-2} I^2 P'^2 C_r + \dots + \alpha_1 I^{r-1} P'^{r-1} C_r + \alpha_0 I^r P'^r C_r = \beta_{r-1} I P' U + \beta_{r-2} I^2 P'^2 U + \dots + \beta_1 I^{r-1} P'^{r-1} U + \beta_0 I^r P'^r U \quad (3.26)$$

C_r : 축소 모델의 출력 계수 벡터

식 (3.12) 에 의해 고차와 저차시스템 간의 출력의 최소 차승 오차를 최소화 하기 위해 식 (3.26) 에 고차의 출력 계수 벡터 C 를 대입하여 정리하면

$$C + \alpha_{r-1} I P' C + \alpha_{r-2} I^2 P'^2 C + \dots + \alpha_1 I^{r-1} P'^{r-1} C + \alpha_0 I^r P'^r C = \beta_{r-1} I P' U + \beta_{r-2} I^2 P'^2 U + \dots + \beta_1 I^{r-1} P'^{r-1} U + \beta_0 I^r P'^r U \quad (3.27)$$

와 같이 되고, 식 (3.27) 을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$C = QR \quad (3.28)$$

R 은 미지 파라미터 벡터로써 다음과 같다.

$$R = [\alpha_{r-1} \ \alpha_{r-2} \ \dots \ \alpha_1 \ \alpha_0 \ \beta_{r-1} \ \beta_{r-2} \ \dots \ \beta_1 \ \beta_0] \quad (3.29)$$

그리고, Q 는 $m \times 2r$ 행렬로 다음과 같다.

$$Q = [-I P' C \quad -I^2 P'^2 C \quad \dots \quad -I^{r-1} P'^{r-1} C \quad -I^r P'^r C \quad I P' U \quad I^2 P'^2 U \quad \dots \quad I^{r-1} P'^{r-1} U \quad I^r P'^r U] \quad (3.30)$$

식 (3.28)로 부터 추정치 \hat{R} 은 다음과 같이 구한다.

$$\hat{R} = [Q' Q]^{-1} Q' C \quad (3.31)$$

4. 다변수 시스템에서의 모델 축소

다음과 같은 고차 다변수 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t) &\in R^n \end{aligned} \quad (4.1)$$

단, (A, B, C) 는 minimal 하다고 가정한다.

위 고차시스템의 축소모델을 다음과 같이 가정하면

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Fz(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hz(t) \\ z(t) &\in R^r \\ r &< n \end{aligned} \quad (4.2)$$

단, (F, G, H) 는 minimal 하다고 가정한다.

저차시스템의 출력 $y(t)$ 가 임의의 입력에 대해 고차의 출력 $y(t)$ 와 유사한 특성을 갖는 미지의 파라미터 (F, G, H) 를 결정하기 위해 다음과 같은 선형 변환의 관계를 이용한다. '3,

$$z(t) = Kx(t) \quad (4.3)$$

여기서 K 는 $(r \times n)$ 의 디멘전 (dimension)을 갖는 집성 행렬 (Aggregation matrix)이다. 식 (4.3)을 미분한 후 식 (4.1)에 대입하여 식 (4.2)와 비교하면,

$$\dot{z}(t) = K\dot{x}(t) = K(Ax(t) + Bu(t)) = KAx(t) + KBu(t) \quad (4.4)$$

식 (4.2)는 $\dot{z}(t) = FKx(t) + Gu(t)$ 로부터

$$KA = FK \quad (4.5)$$

$$KB = G \quad (4.6)$$

$$HK \approx C \quad (4.7)$$

의 관계가 성립된다.

다변수 시스템에서의 전달 함수 행렬을 표현하면

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \dots & G_{qp}(s) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{n_{11}(s)}{d_{11}(s)} & \frac{n_{12}(s)}{d_{12}(s)} & \dots & \frac{n_{1p}(s)}{d_{1p}(s)} \\ \frac{n_{21}(s)}{d_{21}(s)} & \frac{n_{22}(s)}{d_{22}(s)} & \dots & \frac{n_{2p}(s)}{d_{2p}(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n_{q1}(s)}{d_{q1}(s)} & \frac{n_{q2}(s)}{d_{q2}(s)} & \dots & \frac{n_{qp}(s)}{d_{qp}(s)} \end{bmatrix} \quad (4.8) \\
 &= \frac{\begin{bmatrix} N_{11}(s) & N_{12}(s) & \dots & N_{1p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{q1}(s) & N_{q2}(s) & \dots & N_{qp}(s) \end{bmatrix}}{d(s)}
 \end{aligned}$$

단, p: 입력의 개수
q: 출력의 개수

d(s)는 전달함수 행렬의 모든 분모에 대한 monic l.c.m.

$$N_{ij}(s) = n_{ij}(s) \times \frac{d(s)}{d_{ij}(s)} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, q \\ j = 1, 2, \dots, p \end{matrix} \quad (4.9)$$

축소된 다변수 system을 다음과 같이 표현하면

$$G_r(s) = \frac{\begin{bmatrix} r_{11}(s) & r_{12}(s) & \dots & r_{1p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{q1}(s) & r_{q2}(s) & \dots & r_{qp}(s) \end{bmatrix}}{d_r(s)} = \frac{r(s)}{d_r(s)} \quad (4.10)$$

단, d_r(s)는 d(s)에서 상대적 우세 고유치를 취한 식이고, d_r(s)의 degree는 r차로 가정한다. 이제 고차의 다변수 시스템의 출력과 유사한 특성을 갖는 저차 모델을 결정하는 문제는 결국 고차의 $\frac{N_{ij}(s)}{d(s)}$ 에 대한 $\frac{r_i(s)}{d_r(s)}$ 를 구하므로써 해결할 수

있다. 축소된 다변수 시스템의 파라미터 행렬 (F, G, H)는 다음과 같이 결정된다. 먼저, 축소 전달함수 행렬에서 분모와 분자를 아래와 같이 표현하면,

$$d_r(s) = s^r + a_{r-1}s^{r-1} + a_{r-2}s^{r-2} + \dots + a_1s + a_0 \quad (4.11)$$

$$r(s) = \beta_{r-1}s^{r-1} + \beta_{r-2}s^{r-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0 \quad (4.12)$$

β_i : r(s)에서 sⁱ에 대응되는 각 element의 계수행렬

식 (4.11), (4.12)로부터 (F, G, H)는 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} -a_{r-1}I_p & -a_{r-2}I_p & \dots & -a_1I_p & -a_0I_p \\ I_p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_p & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$G = \begin{bmatrix} I_p \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$H = [\beta_{r-1} \ \beta_{r-2} \ \dots \ \beta_0] \quad (4.15)$$

식(4.13), (4.14), (4.15)에서 구한 결과는 minimal realization이라는 보장을 할 수 없으므로 다음의 과정을 통하여 minimal 한 (F, G, H)를 구한다.

정리 1.

식(4.1)에서 C(A, B)의 rank는 r이고 r ≤ n이라면, 다음과 같은 형태를 갖는 등가변환 $\bar{x} = Tx$ 가 존재한다. 여기서, T는 rank가 n인 상수의 정칙행렬이다.

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A} &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_c & \bar{A}_k \\ \hline 0 & \bar{A}_c \end{array} \right] \\
 \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{C} &= [\bar{C}_c \ | \ \bar{C}_k]
 \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

이때 1. (\bar{A}_c , \bar{B}_c)는 controllable 하다.

2. (\bar{A} , \bar{B} , \bar{C})의 state는 제어가능하고 제어 불가능한 부분으로 분리된다.

3. $\bar{C}_c(sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c = C(sI - A)^{-1}B$ 인 관계가 성립된다.

증명)

$$1. \rho C \triangleq \rho [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = r < n \quad (4.17)$$

C ≡ controllability 행렬

$$\begin{aligned}
 C(\bar{A}, \bar{B}) &= \begin{bmatrix} \bar{B}_c & \bar{A}_c\bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{r-1}\bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n-r} \\
 &= \begin{bmatrix} C(\bar{A}_c, \bar{B}_c) & \bar{A}_c^r\bar{B}_c & \dots & \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{n-r} \quad (4.18) \\
 &= \begin{bmatrix} C(\bar{A}_c, \bar{B}_c) & C(\bar{A}_k, \bar{B}_k) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{n-r}
 \end{aligned}$$

$$C(\bar{A}_k, \bar{B}_k) \triangleq (\bar{A}_c^r\bar{B}_c, \dots, \bar{A}_c^{n-1}\bar{B}_c) \quad (4.19)$$

식 (4.18)에서 C(\bar{A}_k, \bar{B}_k)의 열(column)은 C(\bar{A}_c, \bar{B}_c)의 열에 대해 선형 종속이므로,

$$\rho \{C(\bar{A}_c, \bar{B}_c)\} = \rho \{C(\bar{A}, \bar{B})\} = r \quad (4.20)$$

∴ (\bar{A}_c, \bar{B}_c)는 controllable 하다.

2. 식 (4.16)을 상태방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{x}}_c(t) &= \bar{A}_c\bar{x}_c(t) + \bar{A}_{12}\bar{x}_k(t) + \bar{B}_c u(t) \\
 \bar{x}_k(t) &= \bar{A}_c\bar{x}_k(t) + 0 \cdot u(t)
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

이 때, $\bar{x}_k(t)$ 는 입력에 영향을 받지 않으므로 제어 불가능하다.

그리고, 앞의 결과 1로부터 $\bar{x}_c(t)$ 는 제어 가능하다.

3.

$$\begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (sI - \bar{A}_c)^{-1} & (sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_c)^{-1} \\ 0 & (sI - \bar{A}_c)^{-1} \end{bmatrix} = I \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
 C(sI - A)^{-1}B &= \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} \\
 &= [\bar{C}_c \ \bar{C}_k] \begin{bmatrix} sI - \bar{A}_c & -\bar{A}_{12} \\ 0 & sI - \bar{A}_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= [\bar{C}_c \ \bar{C}_k] \begin{bmatrix} (sI - \bar{A}_c)^{-1} & (sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{A}_{12}(sI - \bar{A}_c)^{-1} \\ 0 & (sI - \bar{A}_c)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \bar{C}_c(sI - \bar{A}_c)^{-1}\bar{B}_c \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

(증명 끝)

정리 2.

식(4.1)에서 O(C, A)의 rank는 r이고 r ≤ n이라면 다음과 같은 형태를 갖는 등가변환 $\bar{x} = Tx$ 가 존재한다. 여기서, T는 rank가 n인 상수의 정칙행렬이다.

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{A} &= \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_0 & 0 \\ \hline \bar{A}_{21} & \bar{A}_0 \end{array} \right] \\
 \bar{B} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ - \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \bar{C} &= [\bar{C}_c \ | \ \bar{C}_k]
 \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

이때 1. (\bar{C}_0 , \bar{A}_0)는 observable 하다.

2. (\bar{A} , \bar{B} , \bar{C})는 observable과 nonobservable한 변수로 분리 된다.

3. $\bar{C}_0(sI - \bar{A}_0)^{-1}\bar{B}_0 = C(sI - A)^{-1}B$ 의 관계가 성립된다.

(증명)

이 증명은 정리1.의 duality이다.

(증명 끝)

이제 식(4.13)-(4.15)의 결과로부터 정리1, 2)의 과정을 거친다면 minimal한 (F, G, H)를 구할 수 있다.

5. 시뮬레이션

다음과 같은 7차의 다변수 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.23 & -12.76 & -3.22 & 77.37 & 30.09 & 35.25 & 200 \\ 1.31 & -0.088 & 19.31 & 14.21 & 77.81 & 82.99 & 209.1 \\ -0.037 & -0.017 & -20.12 & -15.34 & -82.42 & -88.23 & -223.07 \\ 0 & -0.026 & -0.49 & -2.86 & 0.88 & 0.52 & -3.74 \\ 0 & 0.008 & 1.55 & -1.42 & 1.55 & 1.52 & 1.54 \\ 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.9 & 0.1 & -0.37 \\ 0 & 0 & 0 & 0.54 & 0.33 & 0.43 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.084 & -0.24 \\ 0.023 & -0.28 \\ -0.023 & 0.29 \\ 0.0047 & 0.003 \\ 0.0025 & -0.0025 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -209.4 & 373.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 68.36 & 1143.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

식(5.1)의 전달함수 행렬을 구하면

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} s^3+19s^2+110s+200 & s^3+27s^2+200s+300 \\ 4s^3+56s^2+172s+120 & s^3+303s^2+902s+600 \end{bmatrix}}{s^3+21s^2+151s+471s^2+640s+300} \quad (5.2)$$

이고 $G_r(s)$ 의 분모의 최고차를 2차로 결정한다면 상대 우세 고위 차 2개를 선택 할 수 있다.

일차 전개함수를 4항으로 하여 식(3.30), (3.31)을 이용하면 축소 모델의 전달함수 행렬을 구하면 다음과 같다.

$$G_r(s) = \frac{\begin{bmatrix} -0.0588s+1.33 & 0.1121s+2 \\ 0.6199s+0.8 & 2.9912s+4 \end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \quad (5.3)$$

식(5.3)을 식(4.13)-(4.16), (4.24)에 적용하여 minimal한 파라미터 행렬 (F, G, H)를 구한 결과는 다음과 같다.

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -2.2361 & 0 \\ 1.4142 & 0 \\ 0 & 2.2361 \\ 0 & -1.4142 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.6489 & 0.9844 & -0.7942 & -1.3349 \\ -0.1967 & 0.1273 & 0.8866 & -0.7133 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

집성행렬 K는 식(5.5)로부터 다음과 같이 구한다.

$$K = (H^T H)^{-1} H^T \quad (5.5)$$

$$K = \begin{bmatrix} -0.9514 & 18.5486 & 2.5881 & -0.3899 & -0.0508 & -3.5516 & -8.4860 \\ 0.2539 & 26.0880 & 1.9224 & -0.1998 & -0.0238 & 0.7067 & 0.5790 \\ 3.7393 & -25.8900 & -6.2076 & 1.0713 & 0.1429 & 13.5923 & 30.7939 \\ -2.4997 & -32.6430 & -0.0623 & -0.2264 & -0.0354 & -8.6977 & -17.8685 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

시뮬레이션 결과를 그림 1과 2에 실었다. 그림 1은 고차 시스템의 출력을, 그림 2는 축소모델의 출력을 나타낸다.

6. 결론

본 연구에서는 고차 다변수 시스템의 출력과 유사한 특성을 갖는 축소 모델을 구하는 새로운 방법에 대해서 제시하였다. 제안된 방법은 얻고자 하는 축소 모델의 안정도를 보장하기 위해서 전달함수 행렬의 분모 부분에 집성법(Aggregation method)을 적용하고 분자부분에는 최적응답법을 적용함으로써 원 모델에 대한 축소모델의 정밀도 향상을 도모하였다. 또한 원 모델과 축소모델을 정규 직교함수인 원위함수로 표현함으로써 축소모델을 구하기 위해 표현되는 미분방정식이 선형대수 연립방정식으로 변환되므로 축소모델을 구하는데 있어서 계산량의 감소 및 취급이 간단하다는 잇점이 있었다. 한편 축소모델의 차수는 $pr < n$ (p : 입력의 개수, r : 축소모델의 전달함수행렬에서 분모의 최고차수, n : 고차모델의 차수)의 범위내에서 선택하므로써 축소모델의 전달함수를 minimal한 상태방정식으로 변환시킨 후에도 축소모델의 차수가 원 시스템의 차수보다 커지게 되는 것을 방지할 수 있었다.

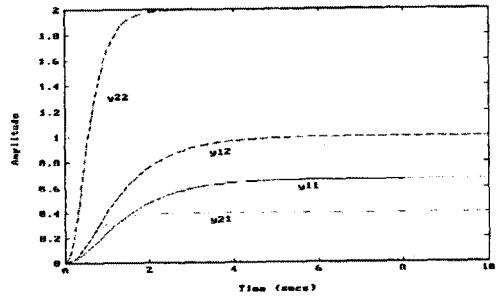


그림 1 원 시스템의 출력

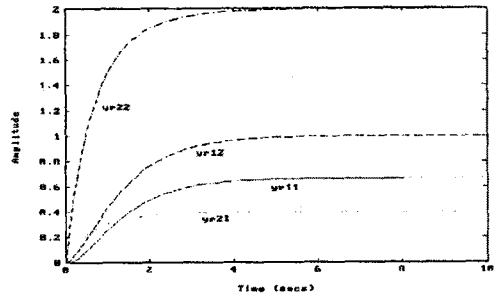


그림 2 축소 시스템의 출력

7. REFERENCE

1. Chen, C.F., "A state space approach to Walsh series solution of linear systems" Int. J. Syst. vol 6, 1975, pp. 833-838
2. C. F. Chen, C. H. Hsiao "Time-domain Synthesis via Walsh function" Proc. IEEE, Vol 122, No. 5, May 1975
3. Sinha, N.K and Kusztka, B "Modeling and Identification of Dynamic System" Van Nostrand Reinhold Company, 1983
4. Edward, J. Davison "A Method for Simplifying Linear Dynamic Systems", IEEE Transaction of Automatic Control, vol A C-11 No 1, 1966, pp. 93-101
5. Masanao Aoki, "Control of Large-scale Dynamic Systems by Aggregation", IEEE Transactions of Automatic Control, vol 1 AC-13 No 3, 1968, pp 246-253
6. Chen, C.F and Shieh, L.S "A novel approach to linear model simplification" Int. J. Control vol 8, No 6, 1968, pp. 561-570
7. Chen, T.C and Chang, C.Y and Han, K.W, "Model reduction using the stability-equation method and the continued-fraction method", Int. J. Control, vol 32, No 1, 1980, pp 81-94
8. Sinha, N.K and Berezna, G.T "Optimum approximation of high-order systems by low-order models" Int. J. Control vol. 14, No 5, 1971, pp. 951-959
9. Rozsa, P and Sinha, N.K, "Some canonical forms for linear multivariable systems" Int. J. Control, vol. 23, 1976, pp 8 65-883
10. Corrington, M.S "Solution of differential and integral equations with functions" IEEE CT-20, 1973, pp. 470-476
11. Jyh-Horng Chov and Ing-Rong Horng, "Chebyshev series analysis and identification of scaled systems" Int. J. Systems, Sci vol. 16 No 9, 1985, pp. 1157-1162
12. Cheng-Chian Liu and Yen-Ping Shih, "Model reduction via Chebyshev Polynomials" Comput. & Elect. Eng. Vol 12, No 3 /4 1986, pp. 89-100
13. Stratng, G, "Linear Algebra and its applications" 2nd ed, Academic Press, 1980.
14. Thomas Kailath, "Linear Systems", Prentices-Hall information and system sciences series, 1980
15. C. T. Chen, "Introduction to Linear System Theory", 1970