

연속제어기의 GSHF(Generalized Sampled-data Hold Function)을 이용한 디지털 재설계시의 이산적 GRAMMIAN행렬의 사용

○정 지 배*, 정 태 상**, 양 원 영*
* 중앙대학교 공과대학 전기공학과
** 중앙대학교 공과대학 제어계측공학과

Digital Redesign using the Discrete Grammian Method

Chi B. Chung*, Tae S. Chung**, Won Y. Yang*

* Department of Electrical Engineering, Chung-Ang University

**Department of control and Instrumentation Engineering, Chung-Ang University

Abstract

Digital redesign techniques are to derive a digital controller from the existing continuous controller and its plant so that the performance of the digitally controlled system is matched as closely as possible to that of the original continuous system at the sampling instants. Recently a new digital redesign technique was developed to use the generalized sampled-data hold function(GSHF) based on the the grammian matrix. With this new technique the digitally redesigned system showed several good features compared with any existing technique in terms of the state match at the sampling instants, the large sampling period, and the transient reponses.

This paper concerns a further improvement of the new digital redesign technique by employing the discrete grammian matrix instead of the continuous grammian matrix in defining GSHF. With this modification, it was observed by simulation that the transient response of the modified digital system shows far better performance than the digital system based on the continuous grammian matrix

1. 서 론

많은 시스템들의 제어기는 연속시간영역에서 설계되고, 아날로그요소에 의해 수행된다. 그러나 근래에 들어와서 디지털 구성요소와 컴퓨터가 널리 이용됨에 따라 기존의 아날로그 제어기를 등가적인 디지털제어기로 대체하는 경향이 확산되고 있다. 일반적으로 컴퓨터를 이용한 제어기들은 샘플링주기가 충분히 작다는 가정하에 아날로그제어기를 플랜트의 동적특성에 관계없이 이산화될 수 있다. 그런데 이산시간시스템은 샘플링시점사이의 동안에 개루프로 동작하기 때문에 원래의 개루프 시스템이 불안정한 경우에는 샘플링주기가 충분히 작지 않으면 불안정해진다. 또한, 이산시간시스템이 폐루프적으로 안정한 경우에도, 이산제어기의 출력과 연속제어기의 출력간의 차이가 플랜트의 동특성을 통해 전달, 축적됨으로써, 이산제어시스템과 연속제어시스템의 상태들이 가깝게 일치하지 않게 된다.

본 논문에서는 기존의 아날로그제어기들이 만족할 만한 성능을 갖고 있는 경우에, 이산제어기를 처음부터 새로이 설계하는 대신 동등한 성능을 갖는 이산제어기로 대체하는 소위 "디지털 재설계(Digital Redesign)"방법에 대해 생각해 본다. 여기서 디지털 재설계의 목표는, 이산제어기의 출력과 기존의 아날로그제어기를 사용했을 때의 출력이 동일한 기준입력과 초기조건에 대해 일치되도록 하는 것이다. 이러한 문제는 다음과 같이 이야기할 수 있다.

일반적인 연속시간 선형시불변 시스템

$$\dot{x}_c(t) = Ax_c(t) + Bu_c(t), \quad x_c(0) = x_0 \quad (1)$$

에 대한 상태피드백 제어식은 다음과 같다.

$$u_c(t) = -K_c x_c(t) + E_c r(t) \quad (2)$$

이 (2)식을 (1)식에 대입하면

$$\dot{x}_c(t) = \tilde{A}x_c(t) + BE_c r(t), \quad \tilde{A} = A - BK_c \quad (3)$$

와 같이 되며, 이와 등가적인 디지털시스템은

$$\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + Bu_d(t), \quad x_d(0) = x_0 \quad (4)$$

로 쓸 수 있다. 그런데 이산제어 $u_d(t)$ 는 상태변수 $x_d(t)$ 와 기준입력 $r(t)$ 의 이산시간 값들의 함수로서

$$u_d(t) = -K_d x_d(kT) + E_d r(kT), \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (5)$$

와 같으며, 이 (5)식을 (4)식에 대입하면

$$\dot{x}_d(t) = Ax_d(t) + B[-K_d x_d(kT) + E_d r(kT)] \quad (6)$$

와 같이 된다. 여기서 (3)식과 (6)식을 풀어서 $x_c(t)$ 와 $x_d(t)$ 를 구하면 각각 식 (7) 및 (8)과 같이 된다.

$$x_c(t) = e^{(A-BK_c)(t-kT)} x_c(kT) + \int_{kT}^t e^{(A-BK_c)(t-\tau)} B E_c r(\tau) d\tau \quad (7)$$

$$x_d(t) = [e^{A(t-kT)} - \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} d\tau B K_d] x_d(kT) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)} d\tau B E_d r(kT) \quad (8)$$

그런데 디지털재설계문제는 한 샘플링주기동안 동일한 기준입력 $r(t) = r(kT)$ 에 대해 $x_c(t)$ 와 $x_d(t)$ 가 일치하도록 식 (3)의 E_c 와 K_c 로부터 식 (6)의 디지털이득 K_d 와 E_d 를 구하는 것이다.

이와 같이 아날로그시스템과 디지털시스템의 상태벡터들을 일치시키는 방법에 관해 활발한 연구가 진행되어 왔으며, 그 방법도 다양하다. 예를 들면, Kuo[1]과 Tsai[2]는 동일한 초기상태 $x_c(kT) = x_d(kT)$ 와 기준입력 $r(t) = r(kT)$ 에 대해 $x_c(kT+T)$ 와 $x_d(kT+T)$ 가 일치되도록 하기 위해서 샘플링시점에서만 상태벡터들을 비교한다. 그런데 $t=kT+T$ 에서의 (7)과 (8)의 응답은

$$x_c(kT+T) = e^{(A-BK_c)T} x_c(kT) + \int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} d\tau B E_c r(kT) \quad (9)$$

$$x_d(kT+T) = [e^{AT} - \int_0^T e^{A\tau} d\tau B K_d] x_d(kT) + \int_0^T e^{A\tau} d\tau B E_d r(kT) \quad (10)$$

와 같으며, 이들이 일치되기 위한 조건은

$$e^{AT} - e^{(A-BK_c)T} = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B d K_d \quad (11)$$

$$\int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} d\tau B E_c = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B E_d \quad (12)$$

와 같다. 이로부터 Kuo[1]가 얻은 디지털이득은 다음과 같다.

$$K_d = K_c \cdot \frac{1}{2} K_c (A - BK_c) T \quad (13)$$

$$E_d = [I_m - \frac{1}{2} K_c B T] E_c \quad (14)$$

또한 Tsai[2]가 얻은 디지털 이득은 다음과 같다.

$$K_d = \frac{1}{2} [I_m + \frac{1}{2} K_c H]^{-1} K_c (I_n + G), \quad G = e^{AT} \quad (15)$$

$$E_d = [I_m + \frac{1}{2} K_c H]^{-1} E_c, \quad H = (G - I_n) A^{-1} B \quad (16)$$

그리고 Shieh[3]는 다음

$$J(kT) = e(kT+T)^T Q e(kT+T) + \frac{1}{2} \int_{kT}^{kT+T} e(t)^T R e(t) dt \quad (17)$$

과 같은 목적함수를 최소화 하는 동적제어규칙을 다음과 같이 제시하였다.

$$u_d(kT) = -K_d e(kT) - K_d x_d(kT) + E_d r(kT), \quad (18)$$

$$e(kT+T) = K_d e(kT) + K_d x_d(kT) + E_d r(kT)$$

그러나 위에서 예시된 방법들은 상태의 일부 또는 그 선형조합만이 일치하거나, 정상상태에서는 일치하지만 과도응답성능이 좋지 않다.

최근에 발표된 새로운 재설계방법[4]은 GRAMMIAN행렬에 근거한 GSHF(Generalized Sampled-data Hold Function)를 이용한 제어식을 이용하였다. 이 새로운 기법은 기존의 방법들에 비해 현저한 성능향상을 보이고는 있지만, 정상상태에서 주기적 리플(ripple)현상이 관찰되었다.

본 논문에서는 GRAMMIAN행렬에 근거한 GSHF를 정의할 때 연속적 GRAMMIAN행렬을 사용하는 대신에 이산적 GRAMMIAN행렬을 사용함으로써, 정상상태응답이 뛰어난 결과를 보였다. 2장에서는 연속적GRAMMIAN행렬에 기반한 GSHF를 이용한 방법을 재검토하며, 3장에서는 이산적 GRAMMIAN행렬에 근거한 GSHF를 이용한 방법을 제시할 것이다.

2. 연속적 GRAMMIAN행렬에 근거한 GSHF를 이용한 디지털 재구현
앞의 여러 방법들이 부분적 상태벡터 일치를 이루는 것은 (11)와 (12)의 방정식을 만족시키는 K_d 와 E_d 의 해로서 상수행렬이 존재하지 않기 때문이다. 여기서, K_d 와 E_d 가 반드시 상수행렬이라는 제약이 없기 때문에 이것을 주기 T의 주기적이득을 가지는 시변행렬로 할 수 있다. 이와 같은 시변 피드백을 이용한 상태피드백 제어식은 다음과 같이 된다.

$$u_d(t) = -K_d(t)x(kT) + E_d(t)r(kT), \quad kT \leq t < kT+T \quad (19)$$

단, $K_d(t)$ 와 $E_d(t)$ 는 주기가 T인 주기적 시변 feedback와 feedforward 이득들로서,

$$K_d(t+T) = K_d(t), \quad E_d(t+T) = E_d(t) \quad (20)$$

을 만족시킨다.

이러한 시변이득을 가진 이산제어시스템의 상태가 매 샘플링시점마다 연속제어시스템의 상태와 일치하기 위한 조건은, 식 (11)과 (12)를 수정함으로써 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$e^{AT} - e^{(A-BK_c)T} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B K_c(\tau) d\tau \quad (21)$$

$$\int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} d\tau = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B E_d(\tau) d\tau \quad (22)$$

이 식의 해를 구하기 위하여 다음과 같은 GRAMMIAN행렬을 생각해 보자.

$$W(0, T) = \int_0^T (e^{A(T-\tau)} B) (e^{A(T-\tau)} B)^T d\tau = \int_0^T (e^{A\tau} B) (e^{A\tau} B)^T d\tau \quad (23)$$

시스템 (A, B)가 제어가능해서 contrabillity행렬 C(A, B)가 non-singular하다면, GRAMMIAN행렬 W(0, T)도 non-singular하다 [5]. 그런데 디지털재설계의 대상인 아날로그시스템은 제어가능하므로 그에 대한 W(0, T)는 non-singular하며, 따라서 그 역행렬이 존재한다. 그러므로 식 (21)과 (22)의 해인 $K_d(t)$ 와 $E_d(t)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K_d(t) = [e^{A(T-t)} B]^T W(0, T)^{-1} [e^{AT} - e^{(A-BK_c)T}] \quad (24)$$

$$E_d(t) = [e^{A(T-t)} B]^T W(0, T)^{-1} \int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} d\tau B E_c \quad (25)$$

for $0 \leq t < T$

이러한 이득을 주기적으로 사용한다면, 이산제어시스템의 상태들과 원래의 연속제어시스템의 상태들이 매 샘플링시점마다 완전히 일치할 것이다.

그런데 이산시간상에서 피드백제어를 수행하기 위해서 (24) 및 (25)의 연속이득행렬을 한 샘플링주기 T동안에 N개의 시점에서

$$K_d(\frac{iT}{N}) = (e^{A(T-iT/N)} B)^T W(0, T)^{-1} [e^{AT} - e^{(A-BK_c)T}] \quad (26)$$

$$E_d(\frac{iT}{N}) = (e^{A(T-iT/N)} B)^T W(0, T)^{-1} \int_0^T e^{(A-BK_c)(t-\tau)} B E_c d\tau \quad (27)$$

$i=0, 1, \dots, N-1$.

와 같은 식에 의해 offline으로 계산해서 실시간 제어컴퓨터의 메모리에 저장한다. 여기서 사용된 주기 T동안의 W(0, T)를 연속적 GRAMMIAN행렬이라고 한다.

3. 이산적 GRAMMIAN행렬에 근거한 GSHF를 이용한 수정된 디지털 재설계

주기적 시변이득을 구하는데 사용되어진 연속적 GRAMMIAN행렬 W(0, T)는 식(21)과 (22)로부터 유도되었다. 여기서 식(21)과 (22)는 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$e^{AT} - e^{(A-BK_c)T} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B K_d(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B K_d(\tau) d\tau$$

$$\int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} d\tau B E_c = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B E_d(\tau) d\tau = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B E_d(\tau) d\tau$$

$$\Delta = \frac{T}{N} \quad (28)$$

또한 다음과 같은 이산적 GRAMMIAN 행렬[6]을 정의하자.

$$W_d(0, T) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B d\tau \cdot \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} (e^{A(T-\tau)} B)^T d\tau \quad (29)$$

만약 식(28)에서 $K_d(\tau)$ 와 $E_d(\tau)$ 가 구간 $i\tau \leq \tau < (i+1)\tau$ 에 대해서 상수행렬로서 존재한다고 가정하면 위의 식은

$$e^{AT} - e^{(A-BK_c)T} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B K_d(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B d\tau K_{di}$$

$$\int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} d\tau B E_c = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B E_d(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B d\tau E_{di}$$

$$\Delta = \frac{T}{N} \quad (30)$$

과 같이 된다. 그러므로, (29)와 (30)으로부터 K_{di} 와 E_{di} 를 구할 수 있으며, 그 식은

$$K_d(\tau) = K_{di} = \Delta \cdot \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B d\tau \cdot W_d^{-1} (e^{AT} - e^{(A-BK_c)T})$$

$$E_d(\tau) = E_{di} = \Delta \cdot \int_{i\tau}^{(i+1)\tau} e^{A(T-\tau)} B d\tau \cdot W_d^{-1} \int_0^T e^{(A-BK_c)\tau} B E_c d\tau$$

$$, \quad i\tau \leq \tau < (i+1)\tau \quad (31)$$

와 같다. 이 식을 이용하여 N개의 각 구간에서 $K_d(\tau)$ 와 $E_d(\tau)$ 가 구해진다.

다음 4장에서는 이러한 이산적 GRAMMIAN행렬을 사용한 결과를 simulation함으로써, 연속적 GRAMMIAN행렬을 사용한 경우 및 Shieh의 optimal 디지털재설계방법과 비교해 보기로 한다.

4. 시뮬레이션

다음과 같은 행렬로 표현된 불안정한 시스템을 생각해 보자.

$$A = \begin{bmatrix} 0.809 & -2.060 & 0.325 & 0.465 & 0.895 \\ 6.667 & 0.200 & 1.333 & 0.000 & 0.667 \\ -1.291 & 0.458 & -1.072 & -2.326 & -0.199 \\ -0.324 & 0.824 & 1.670 & -1.186 & -0.358 \\ -3.509 & -4.316 & -0.702 & 0.000 & -8.351 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.955 & -0.397 \\ -1.667 & -1.667 \\ -0.212 & 1.195 \\ 0.618 & 0.052 \\ 0.877 & 1.403 \end{bmatrix}$$

(32)

이 시스템의 eigenvalue는 $\delta(A) = [0.2 \pm j0.4, -1.0 \pm j2.0, -8.0]$ 로서 불안정하며, 다음 식과 같은 피드백이득으로 안정해진다.

$$K_c = \begin{bmatrix} 7.871 & -0.563 & 3.255 & -0.137 & 0.754 \\ 1.625 & -1.247 & 1.297 & -1.003 & 0.182 \end{bmatrix} \quad (33)$$

여기서, 다음과 같은 상황을 가정하자.

- 샘플링 시간 $T = 0.5$ sec
- feedforward 이득 행렬 $E_c = I_2$
- 기준 입력 $r_1(t) = r_2(t) = 1$

그림 1(a)는 샘플된 상태벡터에 근거한 주기적 연속제어 모델이며, (b)는 주기적 이산제어 모델을 나타낸다. 이 행렬 $K_d(t)$ 와 $E_d(t)$ 는 25개의 점에 대해 구하여 메모리에 저장한다.

그림 2(a)와 (b)는 각각의 경우에 대하여 응답특성을 보여주고 있으며, 그림 3(a)와 (b)는 기준입력에 변화를 주었을 때 응답특성을 보여주고 있다. 또한, 그림 4는 Shieh의 최적 디지털제 설계 기법과 위의 두 방법들에 대한 각 상태들의 오차를 제공하여 더한 값을 보여주고 있다. 마지막으로 그림 5는 연속적인 경우와 이산적인 경우의 상태벡터오차를 보여주고 있다.

5. 결론

본 논문에서는 기존의 아날로그제어기를 컴퓨터로 구현하기 위해 디지털제설계를 할 때, GSHF(Generalized Sampled-data Hold Function)을 구하는 데 있어서 연속적 GRAMIAN행렬을 사용하는 대신 이산적 GRAMIAN행렬을 사용하면 디지털제어시스템의 과도응답능이 더 개선됨을 simulation을 통해 보였다.

[REFERENCE]

- [1] B. C. Kuo, G. Singh, and R. A. Yackel, "Digital of continuous data control systems by point-by-point state approximation", Comput. and Elect. Engng, vol. 1, pp. 155-70, Pergamon Press, 1973.
- [2] J. S. Tasi, L. S. Shieh, and N. P. Coleman, "Digital Redesign of pseudo continuous-time suboptimal regulators for large scale discrete systems", Cont. Theory Adv, vol 5, no. 1, pp 37-65, 1989.
- [3] L. S. shieh, X. M. Zhao, and, J. L., "locally optimal-digital Redesign of continuous time systems", IEEE Trans. on, industrial Electronics, vol 36, no. 4, pp. 511-515, Nov. 1989.
- [4] Tae-sang Chung, and Bambang Pharmasetiawan, "A New digital Redesign Technique Using the Generalized sampled-data hold function", IEEE Transaction on Automatic control 1, under review.
- [5] C. T. Chen, Introduction to Linear System Theory, New York, NY: Holt, Rinehart and Winston, Inc, 1970.
- [6] Hamed M. Al-Rahmani, and Gene F. Franklin, "Linear Periodic Systems: Eigenvalue Assignment Using Discrete Periodic Feedback", IEEE Trans. on, Automatic control, vol 34, no. 1, JANUARY, 1989.

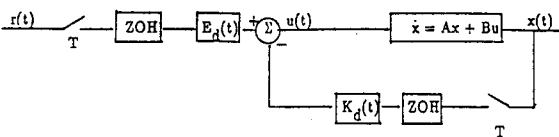


그림 1. (a) 이산상태와 이산입력 샘플에 근거한 주기적 연속제어 구조

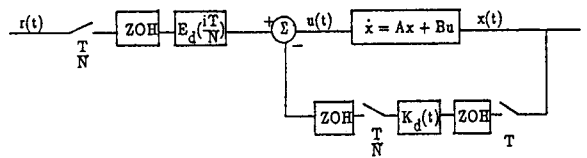


그림 1. (b) Low-rate상태샘플과 multi-rate입력샘플에 기초한 multi-rate 이산제어구조

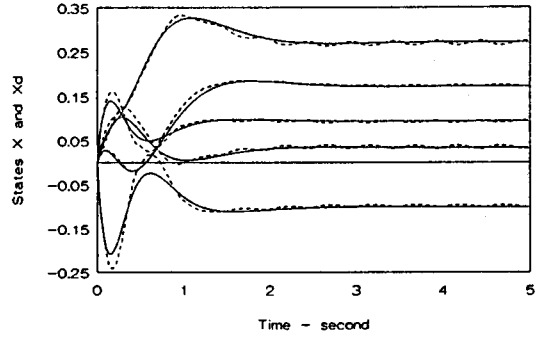


그림 2. (a) 샘플링 주파수가 2Hz이고, 이산제어 주파수가 50Hz인 연속적 GRAMIAN행렬을 사용한 경우

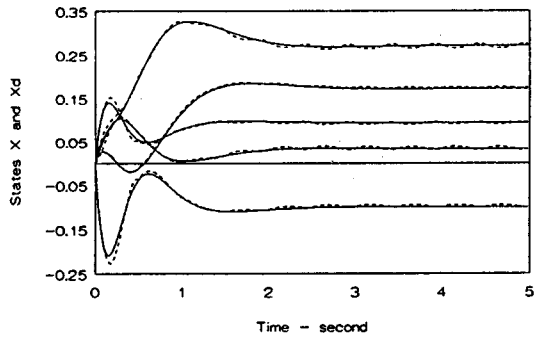


그림 2. (b) 샘플링 주파수가 2Hz이고, 이산제어 주파수가 50Hz인 이산적 GRAMIAN행렬을 사용한 경우

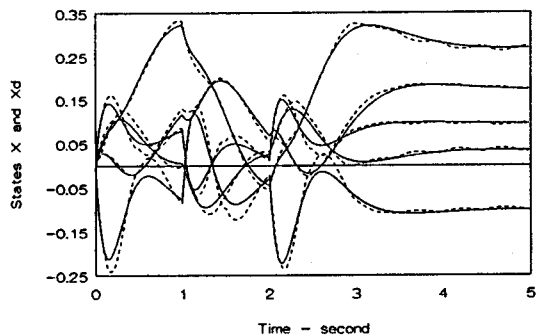


그림 3. (a) 연속적 GRAMIAN행렬을 사용한 경우
 $0 \leq t < 1, r_1(t) = r_2(t) = 1; 1 \leq t < 2, r_1(t) = r_2(t) = 0; t \geq 2, r_1(t) = r_2(t) = 1$

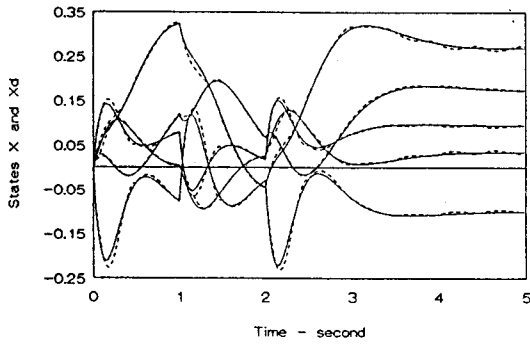


그림3. (b)이산적 GRAMIAN해법을 사용한 경우
 $0 \leq t < 1, r_1(t) = r_2(2) = 1, 1 \leq t < 2, r_1(t) = r_2(t) = 0, t \geq 2, r_1(t) = r_2(2) = 1$

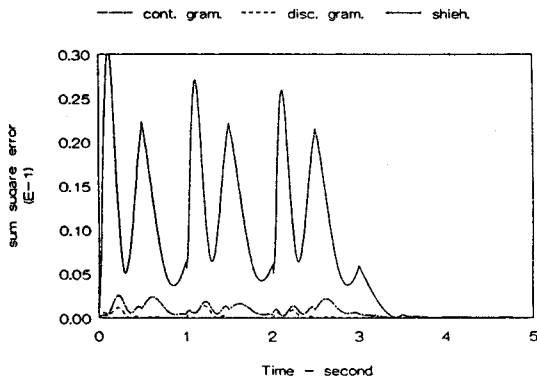


그림4. Shieh's local optimal method와 두방법들과의 상태 벡터오차 비교

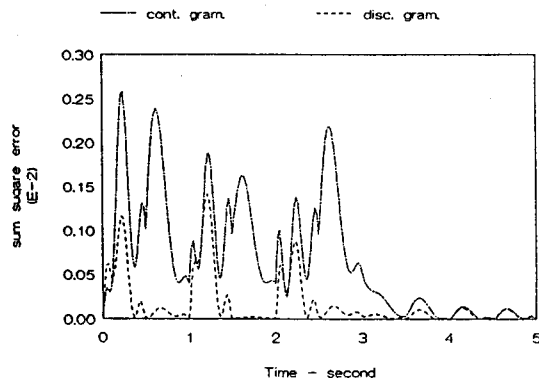


그림 5. 이산적인 경우와 연속적인 경우의 상태벡터오차의 비교