선형 이산 시스템에 대한 미지입력 관측기의 설계

이 재 혁°, 변 증 남*

° : 한국과학기술원 전기및전자공학과 박사과정

* : 한국과학기술원 전기및전자공학과 교수, 공학박사

Design of Unknown Input Observers for Linear Discrete-Time Systems

Jae-Hyeok Lee , Zeungnam Bien

Dept. of Electrical Engineering, KAIST

Abstract : In this paper, a new design procedure is proposed for constructing the observer for linear discrete-time systems with unknown inputs. An existence condition for the suggested observer is also presented. The observer design procedure does not use any transformation technique, augmentation technique and has a clear physical meaning, so it is easy to understand and to design the observer. It directly estimates the unknown inputs from the outputs only, so it is different from other pre-works in which the reconstruction of the unknown inputs are performed with the additional output derivatives.

1. 서 론

지난 몇년간 미지입력이 존재하는 선형 시스템에 대한 관측기의 설계 문제에 대하여 많은 연구가 되어 왔다. 먼저 미지입력에 대하여 많은 지식이 있는 경우에 Johnson[1], Meditch 와 Hostetter[2], Chung[3]등의 연구가 있었다. 하지만 미지입력의 특성을 정확하게 아는 경우는 매우 특별한 시스템에 한하며 일반적인 경우에는 적용하기가 곤란하다. 미지입력의 특성을 완전히 모르는 경우의 관측기 설계 문제는 Wang[4]이 처음으로 제안하였으나 체계적인 관측기 이득 결정 방법이 없고 시행 착오(try-and-error)적으로 결정하고 있다. 이러한 관측기의 존재 조건은 Kudva[5]에 의해 제시되었다. 그 후 방법만 달리할 뿐 기본적인 개념은 같은 여러가지 설계 방법들이 발표되었다[6-8]. 하지만 위의 모든 방법들은 단지 시스템 상태 벡터만을 정확하게 구하는데 촛점이 맞추어져 있다.

최근에는 앞의 방법들과는 달리 시스템의 상태 벡터와 미지 입력을 동시에 추정하려는 연구들이 발표되었다[9-11]. Park 과 Stein[9]은 시스템 상태 벡터와 입력을 동시에 추정하는 관측기를 제안하였다. 이는 본래의 시스템을 특별한 형태로 확장(augmentation)하여 새로운 시스템에 대하여 관측기를 구현하는 것이다. Gleason 과 Andrisani II[10] 역시 특별한 입력 모델(input model)로 확장한 후 칼만 필터(Kalman filter)의 한 형태인 피셔 필터(Fisher filter)를 구현하는 방법을 제안하였다. Hou 와 Müller[11]의 경우는 본래의 시스템을 좌표 변환을 이용하여 특이 시스템(singular system)으로 바꾼 후 기존의 관측기 이론에 의해 설계하는 방법을 제시하였다. 하지만 [9]와 [11]의 경우는 미지입력을 추정하기 위해 출력 벡터, 출력 벡터의 미분 벡터, 관측기 상태 벡터, 입력 벡터등 얻을 수 있는 모든 정보를 이용하여 미지입력을 재추정하고 있다. 이 경우에는 무엇보다 추가의 미분기를 필요로 하기 때문에 비용과 무게 등의 경제적 단점과 함께 감지기(sensor)쪽의 작은 잡음(noise)에도 민감하게 반응하는 단점이 있다. 또 [10]의 경우에는 미지입력이 deadbeat 응답을 보이기 때문에 한 스텝 뒤에 추정이 가능하기는 하나 일반적인 관측기 설계 방법이 제안되지 않고 단지 하나의 관측기(Fisher filter) 설계 방법만 제시되었다. 또한 전체 설계 방법이 확률(stochastic) 시스템 개념으로 설계되고 전달함수로 시스템을 기술하기 때문에 다양한 현대 제어 설계 방법의 도입이 힘들다. 또한 [9-11] 연구 모두 특별한 좌표 변환이나 확장을 기반으로 설계하기 때문에 이해하기 어렵고 설계가 어려운 단점이 있다.

본 논문에서는 선형 이산 시스템에 대한 새로운 미지입력 관측기를 제안하고, 체계적인 설계 방법을 제시하고 또한 관측기의 존재 조건을 유도하였다. 제안된 방법에 대한 물리적 의미를 투영(projection) 행렬을 이용하여 설명하였다. 제안된 관측기는 앞의 다른 방법들과는 달리 특별한 좌표 변환이나 확장의 기술을 필요로 하지않기 때문에 이해하기 쉽고 설계하기 쉬우며 미지입력을 단지 출력만으로 추정하며 또 미지입력에 대해서는 deadbeat 응답, 즉 한 스텝 뒤에 그 값을 바로 추정할 수 있다. 또한 유도된 존재 조건이 기존의 다른 관측기 존재 조건과 동일함을 보였다.

2. 미지 입력 관측기

다음과 같은 이산 선형 시스템을 생각하자.

$$x(t) = Ax(t-1) + Bu(t-1) + Dd(t-1) \tag{1a}$$

$$y(t) = Cx(t)\,, \tag{1b}$$

여기서 $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t) \in \mathbf{R}^p, d(t) \in \mathbf{R}^q, y(t) \in \mathbf{R}^m$ 는 각각 상태 벡터, 입력 벡터, 미지입력 벡터, 출력 벡터를 나타낸다. $Rank(D) = q$ 와 $Rank(C) = m$ 또 $m \geq q$ 를 가정하였다.

식(1) 로 기술되는 시스템에 대한 제안된 미지입력 관측기는 다음과 같다.

$$\bar{x}(t) = \hat{x}(t) + D\hat{d}(t-1) \tag{2a}$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) \tag{2b}$$

여기서

$$\hat{d}(t-1) = [CD]^{\dagger}[y(t) - \hat{y}(t)] \tag{2c}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{2d}$$

$$\hat{x}(t) = A\bar{x}(t-1) + Bu(t-1) + K[y(t-1) - \bar{y}(t-1)] \tag{2e}$$

이고 $\bar{x}(t)$, $\hat{d}(t-1)$ 는 각각 상태 벡터, 미지입력 $x(t)$, $d(t-1)$ 에 대한 추정값이고 K 는 미지입력 관측기의 이득이며 † 는 의사 역행렬(pseudo-inverse)이다.

식 (1)와 (2)에 의해 새로운 추정 에러식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{e}_x(t) = G\bar{e}_x(t-1) + D\hat{e}_d(t-1). \tag{3}$$

여기에서 $G = A - KC$, $\bar{e}_x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ 이고 $\hat{e}_d(t-1) = d(t-1) - \hat{d}(t-1)$ 이다. 그러면 식(2c)에 의해

$$\hat{d}(t-1) = [CD]^{\dagger}CG\bar{e}_x(t-1) + d(t-1) \tag{4}$$

이고 식(3)과 식(4)에 의해 최종 에러식은 다음과 같다.

$$\bar{e}_x(t) = [G - D[CD]^{\dagger}CG]\bar{e}_x(t-1). \tag{5}$$

따라서 식(4),식(5)과 적당한 관측기 이득을 가정하면, 임의의 초기치 $\bar{e}_x(t_o) \neq 0$와 미지입력 $d(t)$에 대해 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\lim_{t\to\infty} \bar{e}_x(t) = 0 \ , \ \lim_{t\to\infty} \hat{e}_d(t) = 0 \ .$$

하지만 식(5)에서 알 수 있듯이 관측기 이득 K를 행렬 $A - KC$가 안정하도록 선택하였다 하여도 에러 식의 고유치(eigenvalue)가 바뀔 수 있고 잘못하면 불안정해질 수 있다. 따라서 좀 더 체계적인 이득 결정 방법이 필요하게 된다.

먼저 본 연구에서 중심적으로 사용할 P 행렬을 정의한다. P 는 $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 이고 $P = [I_n - D(CD)^{\dagger}C]$ 로 정의한다.

다음 정리는 앞의 P 행렬을 이용하여 제안된 관측기를 기존의 관측기 설계 이론으로 설계할 수 있음을 보여준다.

정리 1 : 식(1)과 같이 기술된 시스템에 대하여 미지입력 관측기를 식(2)와 같이 구성하는 경우 다음 조건들이 만족한다면 시스템의 상태 벡터와 미지입력을 동시에 점근적으로 추정할 수 있다.

(C1) $Rank(CD) = q$.

(C2) $(\tilde{A}, \tilde{C})$ 이 가검출(detectable)이다, 여기서 $\tilde{A} = AP$, $\tilde{C} = CP$ 이다.

정리 1 의 증명 : 조건 (C1) 을 이용하면 상태 추정 에러 식(5)를 얻을 수 있다. 행렬 P를 이용하여 식(5)를 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\bar{e}_x(t) = P(A - KC)\bar{e}_x(t-1) = (PA - PKC)\bar{e}_x(t-1). \tag{6}$$

만일 어떤 행렬 X, Y 가 정방(square) 행렬인 경우에는 행렬 XY와 YX 의 고유치가 같게된다[12, page 322]. 따라서 이득 K 가 어떤 값으로 결정된 경우 $P(A - KC)$ 의 고유치들이 $(A - KC)P$ 와 같게 된다. 이 사실을 이용하여 행렬 $PA - PKC$ 의 고유치 지정 문제를 행렬 $AP - KCP$ 의 고유치 지정 문제로 바꿀 수 있다.

따라서 $(\tilde{A}, \tilde{C})$ 가 가검출인 경우 시스템 상태 벡터와 미지입력을 함께 추정할 수 있는 식(2)의 관측기 설계가 가능하다. □

검토 1 : 조건(C1)을 이용하면 행렬 P 가 투영 행렬임을 쉽게 증명할 수 있다. 즉 $P^2 = P$ 이다. 또 D의 행 벡터들에 의해 생성되는 공간이 P의 null space 에 속한다. 즉 $PD = 0$이다. 따라서 상태 추정 에러 공간에서 미지입력의 영향을 투영 행렬을 이용하여 제거하는 것이 제안된 관측기의 배경 원리이다.

3. 존재 조건

정리 2 : $Rank(CD) = q$ 이 만족되면 아래 관측기 존재 조건들은 등가(equivalent)이다.

(S1) 행렬 쌍 $(\tilde{A}, \tilde{C})$ 이 가검출이다.

(S2)

$$Rank \begin{bmatrix} zI_n - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \ \ \forall z \in \mathbf{C}, \ \|z\| \geq 1 \ .$$

정리 2 의 증명 : i) 다음과 같이 행렬 M 을 정의하자.

$$M = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

여기서 $T \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 은 다음과 같이 얻어진다.

$$T = [N \ D], \quad N \in \mathbf{R}^{n\times(n-q)} \tag{8}$$

여기서 $N \in \mathbf{R}^{n\times(n-q)}$ 은 행렬 $[N \ D]$ 이 비특이(nonsingular) 가 되도록 선정되었으며 또 $PN = N$ 을 만족하도록 선정한다. 또한 행렬 $U \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 은 다음과 같다.

$$U = [CD \ \ Q], \quad Q \in \mathbf{R}^{m\times(m-q)} \tag{9}$$

여기서 $Q \in \mathbf{R}^{m\times(m-q)}$ 는 행렬 $[CD \ \ Q]$ 가 비특이하도록 선택되었다. T 와 U 가 비특이 행렬이므로, M 도 비특이 행렬이 된다.

A의 변환 행렬과 U의 역행렬을 다음과 같이 놓자.

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \ , U_1 \in \mathbf{R}^{q\times m} \ , U_2 \in \mathbf{R}^{(m-q)\times m}. \tag{11}$$

어떤 특별한 Q 행렬을 선택한 경우 $U_1CN = 0$ 가 된다. (9)에서 그러한 Q 가 선택되었다고 가정하였다.

다음 식이 성립하므로

$$T^{-1}PT = \begin{bmatrix} I_{n-q} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

아래와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$T^{-1}APT = (T^{-1}AT)(T^{-1}PT) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & 0 \\ \bar{A}_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

M 와 T 이 비특이 행렬이므로, 식 (7), (10), (11), (13) 을 이용하여 아래 결과를 얻을 수 있다.

$$Rank \begin{bmatrix} zI_n - \tilde{A} \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = Rank\{M \begin{bmatrix} zI_n - AP \\ CP \end{bmatrix} T\}$$

$$= Rank \begin{bmatrix} zI_n - T^{-1}APT \\ U^{-1}CPT \end{bmatrix} = Rank \begin{bmatrix} zI_{n-q} - \bar{A}_{11} & 0 \\ -\bar{A}_{21} & zI_q \\ U_1CN & 0 \\ U_2CN & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$= Rank \begin{bmatrix} zI_{n-q} - \bar{A}_{11} \\ U_2CN \end{bmatrix} + q \quad (15)$$

따라서 $(\tilde{A}, \tilde{C})$ 가 가검출이면, 식(15) 로 부터

$$Rank \begin{bmatrix} zI_{n-q} - \bar{A}_{11} \\ U_2CN \end{bmatrix} = n - q. \quad (16)$$

을 얻을 수 있다.

ii) Hou 와 Müller[11] 의 정리2 의 증명에서, 앞의 i)과 같은 $U_1CN = 0$ 이 되는 N 과 Q를 잡으면

$$Rank \begin{bmatrix} zI_n - A & D \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q$$

는 다음식을 의미한다.

$$Rank \begin{bmatrix} zI_{n-q} - \bar{A}_{11} \\ U_2CN \end{bmatrix} = n - q. \quad (17)$$

따라서 (16) 과 (17) 로 부터 제안된 관측기의 존재 조건 (S1) 과 기존의 조건 (S2) 가 동가(equivalent)임을 알 수 있다. □

위 정리에서 제안된 관측기의 존재 조건과 [5][9][11]에서 유도한 미지입력 관측기의 존재 조건들이 모두 동가임을 알 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 미지입력이 존재하는 선형 이산 시스템에 대한 새로운 관측기를 제안하고 이에 대한 설계 방법과 존재 조건을 제시하였으며 관측기에 대한 물리적 의미를 설명하였다. 제안된 관측기는 다른 방법들과는 달리 좌표 변환 기법이나 확장 기법을 사용하지 않기 때문에 이해하기 쉽고 설계가 쉬운 장점이 있다. 또한 미지입력을 추정하기 위해서 단지 출력 벡터만을 사용하고 있으며 미분기등의 추가 하드웨어를 필요로 하지 않는다. 미지입력의 경우는 단지 한 스텝후에 바로 추정하는 장점이 있다. 제안된 관측기는 시스템의 모니터링과 고장 진단등에 유용하게 쓰일 수 있다고 생각한다.

참고 문헌

[1] C. D. Johnson, "Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 16, pp. 635-644, 1971.

[2] J. S. Meditch and G. H. Hostetter, "Observers for systems with unknown and inaccessible inputs," *Int. J. Control*, vol. 19, no. 3, pp.473-480, 1974.

[3] J. C. Chung, Y. S. Kim and Z. Bien, " A note on ship-motion prediction based on wave-excitation input estimation," *IEEE J. Oceanic Engineering*, vol. 15, no. 3, pp. 244-250, Jul., 1990.

[4] S. H. Wang, E. J. Davison, and P. Dorato, "Observing the states of systems with unmeasurable disturbances," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 20, pp. 716-717, 1975.

[5] P. Kudva, N. Viswanadham and A. Ramakrishna, "Observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 25, no. 1, pp. 113-115, 1980.

[6] S. P. Bhattacharyya, "Observer design for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 23, pp. 483-484, 1978.

[7] F. Yang and R. W. Wilde, "Observers for linear systems with unknown inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.* , vol.33, no.7, Jul., pp.677-681, 1988.

[8] Y. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observers," *IEEE Trans. Automat. Contr.* , vol.36, no.5, May, pp.632-635, 1991.

[9] Y. Park and J. L. Stein, "Closed-loop, state and input observer for systems with unknown inputs," *Int. J. Control* , vol. 48, no. 3, pp.1121-1136, 1988.

[10] D. Gleason and D. Andrisani II, "Observer design for discrete systems with unknown exogenous inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.* , vol.35, no.8, Aug., pp.932-935, 1990.

[11] M. Hou and P. C. Müller, "Design of observers for Linear Systems with Unknown Inputs," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, pp.871-875, no. 6, Jun., 1992.

[12] J. L. Goldberg, *Matrix Theory with Applications.* New York : McGraw-Hill, 1992.