

FEM, BEM 혼합적용에 의한 속도를 고려한

부상전자석의 3차원 와류 해석

임 달호*, 홍 정표*, 이 근호**, 신 홍교**, 김 규탁***

* 한양대학교 전기공학과 ** 경상대학교 전기공학과 *** 창원대학교 전기공학과

3-D Eddy Current Analysis Considering the Velocity of Suspension Magnet by Hybrid FE, BE Method

Dal-Ho Im*, Jung-Pyo Hong*, Geun-Ho Lee**, Heung-Gyo Sin**, Goo-Tak Kim***
* Hanyang Uni. ** Kyungsang Uni. *** Changwoon Uni. Electrical Engineering

Abstract

In this paper, The hybrid method in order to reduce the unknown variable for 3D eddy current calculation is proposed. we adopt the current vector potential(T) and the magnetic scalar potential(Ω) as field variable, and adopt image charge method for symetric boundary condition in BEM.

We apply the hybrid method to electromagnet for levitation system and analyze the characteristics of eddy current, airgap flux distribution, attractive, and magnetic drag force according to velocity.

I. 서론

에너지변환기들의 이용범위가 광범위해지고, 고기능, 고성능화 되어감에 따라 효율적인 자기회로 설계를 위하여 3차원 와류문제의 정확한 분석에 대한 요구가 커지고 있다. 이에따라 3차원 와류해석에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있으나, 대부분이 변압기 유기기전력만을 고려한 해석으로 속도기전력을 고려한 3차원 와류해석에 대한 연구는 아직 미미한 상태이다. 3차원해석은 2차원해석에 비해 각 절점에서 구해야 할 미지수가 증가하여 계산용량 및 계산시간 등의 문제가 대두된다.

본 논문은 속도기전력을 고려한 3차원 와류해석으로서 자기부상열차의 부상마그네트를 해석모델로하여 레일과 부상마그네트가 상대속도를 갖고 움직일 경우에 레일에 발생하는 속도기전력으로 인한 부상마그네트의 특성변화를 해석하였다. 즉, 속도에 따른 레일에서의 와류분포, 와류에 의한 부상력 및 자기항력 등의 특성변화를 해석하였다. 해석방법으로는 자기적으로 비포화 특성을 갖는 공기영역을 경계요소영역으로 하고, 강제입력전류를 포함한 전류영역과 철심영역을 유한요소영역으로하여 FE, BE (Finite Element, Boundary Element) 혼합적용방법을 채택하였으며[1], 전류벡터포텐셜과 자기스칼라포텐셜을 계변수로 하여 전류가 존재하는 영역에서만 자유도를 4로 하고, 전류가 존재하지 않는 영역에서는 자유도를 1로하여 미지수를 대폭적으로 줄일 수 있었다. [2][3]

II. 본론

FE, BE 혼합적용방법으로 해석하기 위하여 강제입력전류와 와류영역을 포함하는 전류영역과 철심을 FE영역(Finite Element region)으로하고, 공기과 같은 자유공간영역을 BE영역(Boundary Element region)으로 하였다. [1]

1. 기초방정식

유한요소영역과 경계요소영역으로 나누어 기초방정식을 구성하게 된다.

먼저 유한요소영역에서 속도를 고려한 Maxwell 방정식과 보조방정식은, 속도 v 는 z 방향성분만을 고려하며, 변압기 유기기전력은 0이기 때문에 다음과 같다.

$$\nabla \times E = \nabla \times (v_z \times B) \quad (1)$$

$$\nabla \times H = J \quad (2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3)$$

$$B = \mu H \quad (4)$$

$$J = J_o + J_e = J_o + \sigma E \quad (5)$$

여기에서

E : 유기기전력[V/m]	H : 자계의 세기[A/m]
B : 자속밀도[Wb/m]	J : 전류밀도[A/m ²]
J_o : 강제입력전류밀도[A/m ²]	J_e : 와류전류밀도[A/m ²]
v_z : 속도[m/sec]	σ : 도전율[moh/m]
μ : 투자율 [H/m]	

전류밀도 J 는 전류벡터포텐셜(T)를 이용하여 식 (7)과 같이 쓸 수 있다. [2]

$$J_o = \nabla \times T_o, \quad J_e = \nabla \times T_e \quad (6)$$

$$J = \nabla \times T = J_o + J_e \\ = \nabla \times T_o + \nabla \times T_e \quad (7)$$

여기에서,

T : 전류벡터포텐셜

T_o : 강제입력전류에 의한 전류벡터포텐셜

T_e : 와류에 의한 전류벡터포텐셜

상기 식 들로부터 T - Ω 법을 적용하기 위한 유한요소영역에서의 기초방정식을 구성하면 식 (8), (9)와 같다.

$$\nabla \cdot [\mu(T_o + T_e - \nabla \Omega)] = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\sigma} \nabla \times T \right] = \nabla \times [v_z \times \mu(T_o + T_e - \nabla \Omega)] \quad (9)$$

한편, 경계요소영역은 자유공간영역이며, 식 (10), (11)로부터식(12)와 같이 Laplace 방정식 형태로 유도된다.

$$H = -\nabla \Omega \quad (10)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (11)$$

$$-\mu \nabla^2 \Omega = 0 \quad (12)$$

여기에서, Ω : 자기스칼라포텐셜

2. FE 영역 정식화

식 (8), (9)에 Galerkin 법을 적용하여 정식화 하였을 때의 전류벡터포텐셜과 자기벡터포텐셜에 대한 영역잔차는 각각 다음과 같다.

$$R_T = \int_V N_i \frac{1}{\sigma} \nabla \times (\nabla \times T) dv - \int_V N_i \nabla \times [\mu_0 \times (T_0 + T - \nabla \Omega)] dv$$

$$= - \int_V \nabla N_i \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times T \right) dv + \int_{r_e} n \times \left(N_i \frac{1}{\sigma} \nabla \times T \right) ds$$

$$- \int_V \nabla N_i \times [\mu_0 \times (T_0 + T - \nabla \Omega)] dv$$

$$+ \int_{r_e} n \times [\mu_0 \times (T_0 + T - \nabla \Omega)] ds$$

$$R_\Omega = \int_{\Omega} N_i \nabla \cdot [\mu_0 T_0 + \mu_0 (T - \nabla \Omega)] dv$$

$$= - \int_{\Omega} \nabla N_i [\mu (T_0 + T - \nabla \Omega)] dv$$

$$+ \int_{r_e} N_i [\mu (T_0 + T - \nabla \Omega)] \cdot n ds$$

여기서, N_i 는 보간함수이다.

R_T 의 우변에 있는 경계적분항은 적절한 경계를 선정하면 이 경계적분항의 값이 zero가 되어 다음과 같이 쓸 수 있다. [4]

$$R_T = \int_V N_i \frac{1}{\sigma} \nabla \times (\nabla \times T) dv - \int_V N_i \nabla \times [\mu_0 \times (T_0 + T - \nabla \Omega)] dv$$

$$= - \int_V \nabla N_i \times \left(\frac{1}{\sigma} \nabla \times T \right) dv - \int_V \nabla N_i \times [\mu_0 \times (T_0 + T - \nabla \Omega)] dv$$

R_Ω 의 우변 경계적분항, $\int_{r_e} N_i [\mu (T_0 + T - \nabla \Omega)] \cdot n ds$ 은 강제입력전류가 없는 영역에서는 $\int_{r_e} N_i [\mu (T - \nabla \Omega)] \cdot n ds$ 으로 되고, 이 항은 FEM 과 BEM 혼합적용시 결합되는 항이다. 상기 두식을 이산화하여 대수방정식으로 표현하면 식(14)와 같다.

$$\left[S \right] \begin{bmatrix} T \\ \Omega \end{bmatrix} + [B] [T \cdot n_F] - [B] \left[\frac{\partial \Omega}{\partial n_F} \right] = \begin{bmatrix} f_T \\ f_\Omega \end{bmatrix} \quad (14)$$

3. BE 영역 정식화

경계요소영역은 모든 영역이 공기영역으로, 식(12)와 같이 Laplace 방정식이며, Laplace 방정식에 대한 경계요소법의 경계적분식은 식(15)와 같이 쓸 수 있다.

$$C \Omega_i + \int_r \frac{\partial \Omega}{\partial n} \Omega d\Gamma = \int_r \frac{\partial \Omega}{\partial n} \Omega^* d\Gamma \quad (15)$$

여기서, $\Omega^* = \frac{1}{4\pi r}$ 로서 기본해이며, 식 (15)의 계수 C 는 접합경계면상의 절점에 대해서는 0.5가 되고 경계요소 영역 내에서는 1이 된다.

유한요소법에서는 대칭경계를 처리하는데 어려움이 없지만, 경계요소법에서는 자기적인 대칭성이나 고정경계면의 처리를 위하여 영상법을 도입한다. 경계요소법에서 대칭경계조건은 $\Omega=0$ 인 경계와 $\frac{\partial \Omega}{\partial n}=0$ 인 경계로 나눌 수 있고, 이를 표현 하기 위한 영상법은 그림1과 같이 표현 할 수 있다.

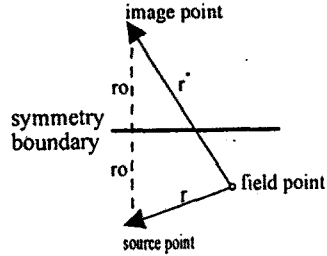


그림1. 영상법에 의한 대칭경계조건

영상법을 도입하여 해석할 경우, $\Omega=0$ 인 대칭영역을 고려하기 위해서, 기본해 $\Omega^* = \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r^*}$ 로 표현되며,

$\frac{\partial \Omega}{\partial n}=0$ 인 경계에 대한 기본해 $\Omega^* = \frac{1}{4\pi r} + \frac{1}{4\pi r^*}$ 로 표현 된다. BEM 영역의 적분 방정식을 이산화한 후 대수방정식으로 표현하면, 식(16)과 같이 쓸 수 있다.

$$[H][\Omega] = [G] \left[\frac{\partial \Omega}{\partial n_B} \right] \quad (16)$$

4. FEM, BEM의 결합

각 영역경계에서는 자속밀도의 수직성분 및 자계세기의 수평성분이 각각 연속이라는 조건으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$B_F \cdot n = B_B \cdot n \quad (17)$$

$$H_F \times t = H_B \times t \quad (18)$$

여기서, 철자 F, B 는 FE영역과 BE영역을 나타내며, n 과 t 는 각각 외향법선벡터와 접선벡터를 나타낸다.

식(17)과 (18)으로부터, 유한요소법과 경계요소법을 혼합적용하기 위한 결합조건을 영역별로 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다. [1]

- 1). BE영역과 FE1영역(와전류가 없는 영역)

$$\mu_F (-\nabla \Omega \cdot n_F) = -\mu_B (-\nabla \Omega \cdot n_B) \quad (19)$$

$$\mu_F \left(\frac{\partial \Omega_F}{\partial n_F} \right) = -\mu_B \left(\frac{\partial \Omega_B}{\partial n_B} \right) \quad (20)$$

- 2). BE영역과 FE2영역(와전류영역)

$$\mu_B (H_B \cdot n_B) = -\mu_F (H_F \cdot n_F) \quad (21)$$

$$H_B = -\nabla \Omega_B \quad (22)$$

$$H_F = T - \nabla \Omega_F \quad (23)$$

$$\mu_B (-\nabla \Omega_B \cdot n_B) = -\mu_F [(T - \nabla \Omega) \cdot n_F] \quad (24)$$

$$\frac{\partial \Omega_B}{\partial n_B} = \frac{\mu_B}{\mu_F} (T \cdot n_F - \frac{\partial \Omega_F}{\partial n_F}) \quad (25)$$

위의 결합 조건으로부터, 식 (15)와 (16)을 결합하여 하나의 방정식인 식 (26)과 같이 쓸 수 있다.

$$\left[S \right] \begin{bmatrix} T \\ \Omega \end{bmatrix} + \frac{\mu_F}{\mu_B} [B] [G]^{-1} [H][\Omega] = \begin{bmatrix} f_T \\ f_\Omega \end{bmatrix} \quad (26)$$

이제 식 (26)의 대수방정식을 풀면 유한요소 영역과 접합경계면에 위치한 절점의 포텐셜 값을 구할 수 있으며, 이 값을 식 (16)에 대입하여 경계요소영역 내부 임의의 위치에서의 포텐셜값을 계산할 수 있다.

5. 해석모델 및 경계조건

본 연구의 해석모델은 아래 그림과 같은 자기부상열차의 부상용 전자석이다. 전자석의 비투자율은 1000, 레일의 비투자율은 500으로 하였으며, 전자석의 도전율은 0으로, 레일의 도전율은 $1e5[moh/m]$ 로 하여 해석하였다.

부상용 전자석의 자극배치 방법에는 같은 극을 연속해 배치시키는 방법(N-N형)과 서로 다른 극을 번갈아 교번배치시키는

방법(N-S 형)이 있다. N-N 형으로 배치된 경우의 해석은 전자석 간의 대칭경계를 $\frac{\partial \Omega}{\partial n} = 0$ 인 조건으로 처리하며, N-S 형으로 고

변 배치된 경우는 $\Omega = 0$ 인 경계로 처리 한다. 해석영역 중에서 FEM1 영역은 강제입력전류 및 전자석의 철심을 포함하는 영역으로 T_0 와 Ω 를 계변수로 하는 영역이고, FEM2 영역은 와전류가 존재하는 영역으로 T 와 Ω 를 계변수로 하는 영역이다. 그리고, BEM1 영역은 공기영역으로 Ω 만을 계변수로 한다. 그림2. 은 N-N 형으로 배치된 전자석의 모델 중 전자석 한 개를 나타낸 것이며, N-N 형의 경우에 해석상의 경계조건을 표시한 것이다.

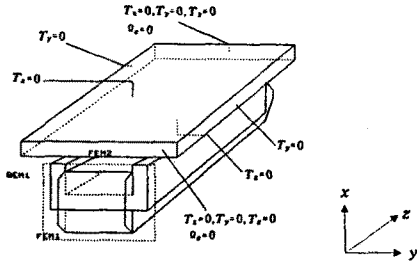


그림2. 해석 모델 및 경계 조건

6. 해석 결과

FEM2 영역을 공극 일부 포함하는 영역으로 하여, 전류벡터포텐셜과 자기스칼라포텐셜로부터 공극 자속밀도를 함께 계산할 수 있으며, 자계의 세기에 의해 물체가 받는 힘은 Maxwell 용력으로부터 식 (29)와 같이 표현된다.

$$F = \int_v \frac{1}{\mu_0} [B(\nabla \cdot B) - B \times (\nabla \times B)] dv \quad (27)$$

$$P = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B_z^2 - B_y^2 - B_x^2) & B_x B_y & B_x B_z \\ B_y B_x & \frac{1}{2}(B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) & B_y B_z \\ B_z B_x & B_z B_y & \frac{1}{2}(B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \int_s \begin{bmatrix} P \\ a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot dS \quad (29)$$

그림3과 그림4은 속도에 따른 레일 밀면의 와류분포를 나타낸 것이다. 속도에 의해 발생된 와류는 입구단에서는 자속이 증가하는 상태에 있기 때문에, 자속의 증가를 감소시키려는 방향으로 와전류가 발생하며, 출구단 쪽에서는 입구단과는 반대로, 자속이 감소로 되는 상태이기 때문에, 입구단과는 반대 방향의 와전류가 생성되었다. 그림5은 속도100[Km/h]시의 공극자속밀도 분포를 나타낸 것으로, 속도가 있을때 입구단과 출구단의 자속밀도의 차이를 볼 수 있다. 그림6은 속도에 따른 부상력 특성을 나타낸 것이다.

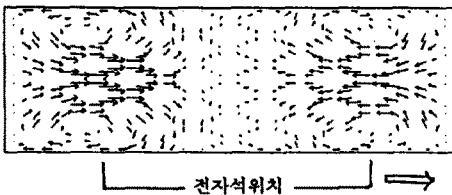


그림3. 속도 25[Km/h] 때의 와전류 벡터도

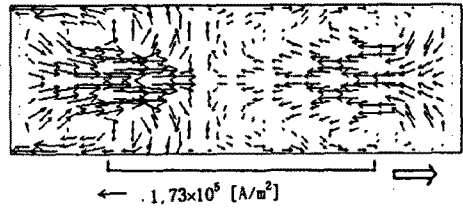


그림4. 속도 75[Km/h] 때의 와전류 벡터도

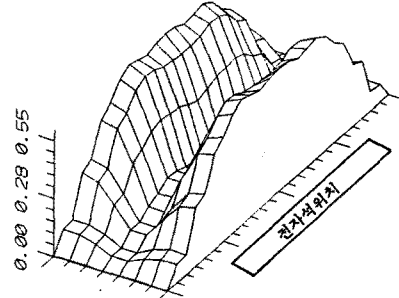


그림5. 속도 100[Km/h] 때의 공극자속밀도 분포

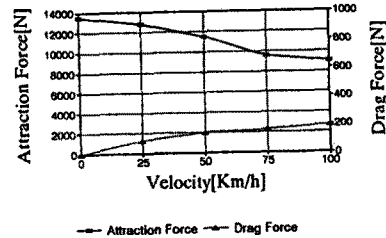


그림6. 속도에 따른 부상력 및 자기항력

III. 결론

본 연구에서는 속도기전력을 고려한 3차원 와전류해석을 위해 FEM과 BEM을 혼합적용하였으며, 영상법을 도입하여 해석영역을 줄이고, 계변수 T, Ω 를 사용하여 미지수를 대폭적으로 줄일 수 있는 방법을 제시하였다. 해석사례로 부상용 전자석의 속도 특성을 해석하였으며, 속도의 증가에 따른 공극자속밀도 분포, 부상력저하현상등을 규명 하였다.

참고문헌

- [1] T.Onuki and S. wakao, Hybrid finite element and boundary element method utilizing scalar potential for 3D electromagnetic field analysis, T.IEE Japan, 5, 1992.
- [2] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara and Y.Okada, Improvements of the T- Ω method for 3-D eddy current analysis, IEEE Trans. on Mag, 24, 1, 1988
- [3] Y.Tanaka, Tree-dimensional magnetic field analysis by T- Ω method using the finite element method coupled with integral equation, IEE japan, 1991.
- [4] T.Nakata, N.Takahashi, K.Fujiwara, M.Miura and Y.Okada, Boundary conditions for finite element analysis of 3-D fields, THE INTERNATIONAL WORKSHOP FOR EDDY CURRENT CODE COMPARASION, TOKYO, 1986.