경계요소법을 위한 3차원 자동요소분할

이향범* 이상훈* 김형석** 이기식*** 한송엽*

*서울대학교 전기공학과 **순천향대학교 전기공학과 ***단국대학교 전기공학과

3D Automatic Mesh Generation Scheme for the Boundary Element Method

H.B. Lee* S.H. Lee* H.S. Kim** K.S. Lee*** S.Y. Hahn*

*Dept. of Electrical Eng., Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea
**Dept. of Electrical Eng., Soonchunhyang University, Onyang, Chungnam, 336-600, Korea
***Dept. of Electrical Eng., Dankook University, Seoul, 140-714, Korea

Abstract - This paper presents a three dimensional automatic mesh generation scheme for the boundary element method, and this scheme can be applicable to practical problems of complex shape. The geometry of the problem is expressed as an assemblage of linear Coon's surfaces, and each surface is made up of four edge curves which are defined in the form of a parametric function. Curves are automatically segmented according to their characteristics. With these segments of curves, interior points and triangular mesh elements are generated in the parametric plane using Lindholm's method, and then their projection on the real surface forms the initial mesh. The refinement of initial mesh is performed so that the discrete triangular planes are close to the real continuous surfaces. The bisection method is used for the refinement. Finally, interior points in the refined mesh are rearranged so as to make each element be close with an equilateral triangle. An attempt has been made to apply the proposed method to a DY (Deflection Yoke) model.

1. 서 론

경계요소법을 사용하여 공학적인 문제를 해석함에 있어서, 해석 기술과 컴퓨터 성능의 발달로 인해 보다 더 정밀한 해석과 보다 더 복잡한 모델의 해석에 대한 요구가 증가하게 되었다. 이에 따라 최근에는, 경계요소법의 입력자료를 생성하는 3차원 요소분할이 문제해석에 있어 어려움이 되지 않도록 하기 위하여 자동요소분할법의 필요성이 증대되고 있다. 따라서 본 논문에서는 복잡한 형상을 가진 실용적인 문제에도 적용할 수 있는, 경계요소법을 위한 3차원 자동요소분할법을 소개한다.

3차원 형상은 여러 면들의 집합으로 표현되고, 각 면들은 선형 쿤곡면 (linear Coon's surface)을 사용하여 정의되며[1], 각 선들은 여러가지 종류의 스플라인을 이용하여 정의된다. 길이, 곡률, 두 면이 만나는 각도에 따라 선들에 절점을 발생시키고, 이 절점자료를 가지고 실제면(real surface)을 고려하여 매개변수평면(parametric plane)을 분할한다. 매개변수평면에 발생된 요소망을 실제면에 투영하면 초기요소망이 형성된다.

복잡한 형상을 효율적으로 분할하기 위하여, 삼각형 요소로 이산화된 면과 실제 곡면의 차이를 나타내는 형상오차를 정의하고, 형상오차가 심한 요소를 찾아내어 이분법을 써서 세분하였다[3]. 이렇게 세분된 요소들은 정삼각형에 가까운 질좋은 요소로 만들기 위해 두 가지 방법을 써서 정렬된다. 하나는 이분법 과정을 거치면서 좋지않게 분할된 요소쌍을 찾아 재분할하는 것이고, 다른 하나는 내부점들을 주변점들과의 위치관계를 고려하여 찾아낸 최적의 위치로 이동시키는 것이다.

사례연구로써 본 논문에서 제안된 방법을 자기편향시스템의 DY(Deflection Yoke)의 요소분할에 적용하여 그 결과를 보였다.

2. 요소 분할 방법

2.1 형상 입력

3차원 형상은 여러 면들의 집합으로 표현한다. 각 면은 4개의 선으로 구현되는 선형 쿤곡면으로

정의되며, 각 면의 법선벡터가 모두 외부를 향하도록 각 선의 방향을 정한다. 선의 방향이 그림 1과 같을때, 선형 쿤곡면은 식 (1)과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
P(u,w) = {} & P_1(u)(1-w) + P_2(u)w + P_3(w)(1-u) + P_4(w)u \\
& - P_1(0)(1-u)(1-w) - P_2(0)(1-u)w \\
& - P_1(1)u(1-w) \qquad - P_2(1)uw
\end{aligned}
\tag{1}
$$

또한 각 선은 직선, 원호, 큐빅 스플라인, 베지어 곡선 등의 매개변수를 이용한 스플라인으로 표현된다.

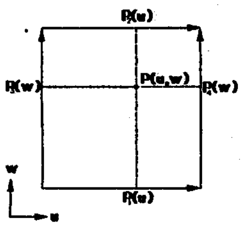


그림 1. 선형 쿤 곡면

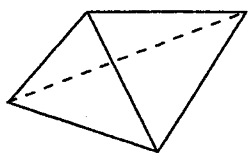


그림 2. 요소의 재분할

2.2 절점생성 및 초기요소망생성

모든 선들의 길이, 곡률과 그 선이 속한 두 면이 만나는 각을 계산하여, 식 (2)와 같이 가중치와의 선형결합에 따라 자동적으로 선들에 발생시킬 절점의 갯수 n_{seg}를 결정한다.

$$n_{seg} = n_{\min} + (n_{\max} - n_{\min}) \cdot (w_l l + w_c c + w_a a) \tag{2}$$

여기서, w는 가중치를 나타내고, l, c, a는 각각 길이, 곡률, 두면이 만나는 각도를 나타낸다.

절점의 위치는 입력점을 기본으로 하되, 추가되는 절점은 각 선분의 길이와 곡률에 따라 절점이 가장 필요한 선분상에 놓이게 된다.

발생된 절점을 이용하여 쿤곡면의 매개변수평면을 Lindholm의 방법에 따라 분할하되,[2] 분할에 필요한 모든 계산은 실제면에서 수행함으로써 발생되는 요소들과 실제면과의 연관성을 크게 했다. 매개변수면에 형성된 삼각형 요소들을 실제면에 투영시키면 초기요소망이 형성된다.

2.3 요소 세분

그림 3과 같이 매개변수평면의 삼각형 abc의 무게중심을 p라 하고 이것들이 실제면에 투영된 것을 각각 ABC와 P라고 하자. 여기서 분할된 삼각형과 실제면과의 형상오차를 SE라고 하면 SE는 식 (3)과 같이 정의할 수 있다.

$$SE = \frac{S_{PAB} + S_{PBC} + S_{PCA}}{S_{ABC}} - 1 \tag{3}$$

여기서 S_{ABC}는 삼각형 ABC의 면적을 나타낸다.

만일 삼각형 ABC가 실제면과 일치한다면 SE는 0일 것이고, 실제면과 차이가 크다면 SE는 0보다 큰 값이 나올 것이다. 따라서 모든 요소에 대해 SE값을 계산하여 SE값이 일정값보다 큰 삼각형은 이분법을 써서 세분하면, 실제면의 형상을 잘 근사하는 삼각형 요소망이 형성된다.

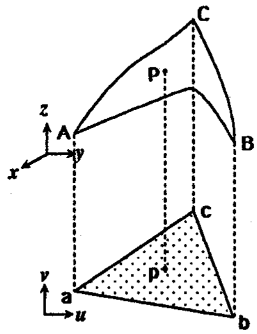


그림 3. 매개변수평면의 삼각형요소와 그것이 투영된 실제면에서의 삼각형요소

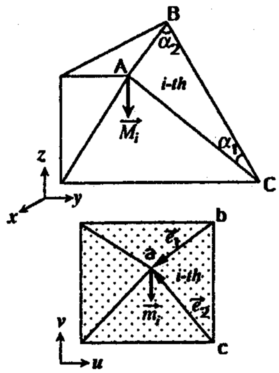


그림 4. 매개변수평면과 실제면에서의 내부점 이동방향

2.4 요소망 정렬

요소망 정렬이란, 삼각형 요소들을 정삼각형에 가까운 모양이 되도록 변형시키는 것을 말하는데, 본 논문에서는 요소망 정렬에 두가지 방법을 사용한다.

첫번째는 세분된 요소망에서 요소쌍들의 질을 검사하여, 그림 2와 같이 좋지 않게 분할된 요소쌍을 찾아서 재분할한다. 그림 2에서, 두 요소는 점선을 사용하여 분할하는 것 보다는 실선을 사용하여 분할하는 쪽이 요소의 질이 좋음을 알 수 있다.

첫번째 방법을 쓴 후에는, 내부점을 이동시키는 방법을 사용한다. 실제면에서 삼각형 요소들의 내각을 계산하여, 주어진 점의 이동벡터 m을 매개변수평면에서 구한다. 그림 4에 표시된 한 삼각형의 이동벡터 m_i는 그 삼각형의 내각이 60°에 가까와지도록 내부점을 이동시키는 벡터이므로, m은 식 (4)와 같이 m_i의 합벡터로 나타난다.

$$
\begin{aligned}
\vec{m_i} &= (60^\circ - \angle ACB)\vec{u_1} + (60^\circ - \angle ABC)\vec{u_2} \\
\vec{m} &= c\sum_{i=1}^{N}\vec{m_i}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

여기서, u_i는 e_i의 단위벡터이고, N은 연결점의 갯수, c는 이동변위상수이다.

실제면에서 점 A와 점 A를 둘러싸고 있는 점들

의 위치관계는 매개변수평면에서 점 a와 점 a를 둘러싼 점들의 위치관계와 같으므로, 주어진 점을 $\vec{m}$만큼 이동하여 실제면으로 투영시키면 실제면의 요소의 질이 향상된다. 요소의 질이 향상되는 정도는 이동변위상수 c의 크기에 크게 영향을 받는다.

2.5 자동요소분할법의 전체 흐름도

지금까지 기술한 3차원 자동요소분할법의 전체적인 흐름을 그림 5에 도시하였다.

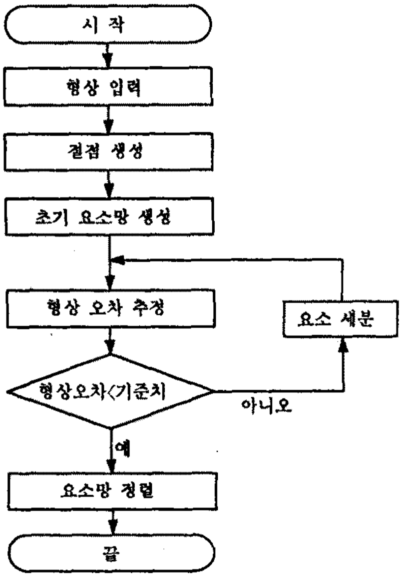
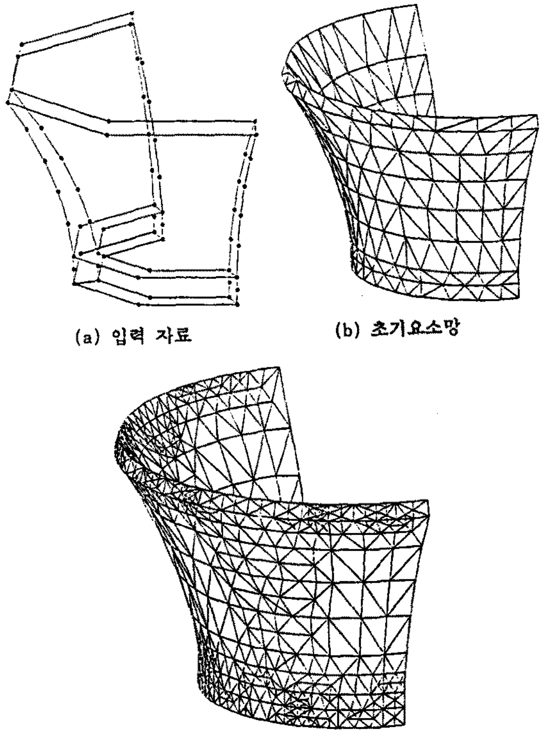


그림 5. 자동요소분할법의 전체 흐름도

3. 사례 연구

본 논문에서 제안된 방법을 DY모델에 적용하였다. 그림 6(a)는 주어진 형상을 표현하기 위해 입력한 자료들로서, ●표시는 입력점을 나타낸다. 입력자료의 양은 점이 60개, 선이 32개, 면이 16개이다. 그림 6(b)는 절점 발생후에 초기요소망을 만든 모습이다. 초기요소망의 점의 갯수는 310이고, 요소수는 616이다. 그림 6(c)는 형상오차 0.1%이하로 요소를 세분하고, 요소망 정렬을 마친 최종요소망의 모습이다. 최종요소망에서는 굴곡이 심해서 형상오차가 큰 부분의 요소들이 많이 세분되어 있는 것을 살펴볼 수 있다. 최종요소망의 점의 갯수는 1293이고, 요소수는 2582이다.



(a) 입력 자료 (b) 초기요소망

(c) 최종요소망

그림 6. DY모델의 요소망

4. 결 론

복잡한 형상을 가진 모델에도 적용할 수 있는 3차원 경계요소법을 위한 자동요소분할법을 제시하였다. 이산화된 요소망을 실제모델에 가깝게 하기 위하여 형상요차가 심한 부분을 더욱 세분하는 방법을 사용하였고, 이 방법을 DY모델에 적용하여 성공적인 결과를 얻었다. 이 방법은 경계요소법의 해석 알고리즘과 결합하여 적응요소분할법으로 발전시킬 수 있으며, 3차원 유한요소법을 위한 자동요소분할법의 개발에도 응용될 수 있으리라 기대된다.

참고 문헌

[1] D. F. Rogers and J. A. Adams, 2nd ed., Mathmatical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill Publishing Company, 1990, pp.250-426.

[2] D. A. Lindholm, "Automatic triangular mesh generation on surfaces of polyhedra," IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 19, No. 6, pp. 2539-2542, November 1983.

[3] 김형석, 정현교, 한송엽, "삼차원 적응 유한 요소법을 위한 사면체 요소세분에 관한 연구," 전기학회 논문지, 제 39권 9호, pp.921-927, 1990.9.