

슬라이딩 모드를 이용한 견실한 추정기설계

*윤 병도 *김 윤호 **김 춘삼 **김 찬기 ***한 재혁*
 중앙대학교 전기공학과

Design of Robust Estimator using Sliding Mode

*Byung-Do Yoon *Yoon-Ho Kim **Choon-Sam Kim **Chan-Ki Kim ***Jae-Hyeok Han*
 Department of Electrical Engineering
 Chung-Ang University

Abstract

Recently, in the industrial applications, the sensorless system is developed, but the sensorless system is required to have robustness for the measurement noise and disturbance. In this paper, for the sensorless system, the method of designing a robust sliding mode observer taking account of the ability of disturbance and noise attenuation is presented. Also, the strategy for the estimation of rotor flux using the sliding mode observer, which is robust to the measurement noise, is described. Robustness are achieved by assigning the pole of the the system during the sliding motion in such a way as to minimize the effects of the disturbances on the rotor flux estimation error. Finally, using worst case design and LQG (least square error design), the sliding mode observer is verified by computer simulations.

1. 서론

최근, 고속용달성이 요구되어지는 가변속 구동분야에서, 제어성, 신뢰성, 경제성등의 점에서 유리한 벡터제어를 행한 유도전동기가 사용되고 있다. 유도전동기를 직접벡터제어하기 위해서는 정밀한 2차자속의 정보가 필요하다. 유도전동기의 2차자속 추정문제에 대해서, 다양한 관측기의 적용이 보고 되어 왔고, 현재에는 주로 최소차원 관측기(reduced observer)의 구현이 보고 되고 있다. [1] 또한, 유도기의 파라미터(특히 2차저항의 변화)가 온도 등에 의해서 변동되기 때문에 파라미터 변동에 강인한 관측기의 개발이 대두되고 있다. 이 때문에 최소차원 관측기의 저감도화 극배치법이 보고되고 있지만, 이러한 관측기의 저감도화 극배치방법은 저속영역에서, 파라미터 추정에 문제가 생기며, 측정잡음에 영향이 많다. 또한 최소차원 관측기는 관측기 파라미터가 정확하다고 가정된 상태에서 설계되어지지만, 파라미터가 정확하고, 변동이 없을 때에도 원리적으로 출력오차의 미분을 이용하기 때문에 측정잡음에 약하다는 문제를 갖고있다. [2]

본 논문에서는 슬라이딩 모드 관측기가 최소차원 관측기와 거의 같은 특성을 가지면서, 부하토크 관측기나 기타 다른 관측기에도 적용이 가능한 이론적 배경을 제시하고 있으며, 이와 더불어, 측정잡음에 강하고, 파라미터 변동에 강한 관측기의 설계에 중점을 두었다. [3] 그리고 슬라이딩 모드 관측기를 측정잡음이나 유도기의 1차저항, 2차저항이 변할때 유도기의 2차 자속 추정에 적용하여 강인한 특성을 확인하였다.

2. 슬라이딩 모드 관측기의 특성

일반적인 선형계에 있어서 슬라이딩 모드 관측기의 특성을 간단히 표시한다. 제어대상을 가관측(observable)하고, 다음과 같이 Gopinath형식으로 표현가능한것으로 한다.

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1U \quad \text{----- (1)}$$

$$\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2U \quad \text{----- (2)}$$

$$Y = cx = [I_M] x = x_1 \quad \text{----- (3)}$$

슬라이딩 모드 평면을 $s = \dot{y} - y = 0$ 로 하고, 슬라이딩 모드 관측기는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\hat{x}}_1 = A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{x}_2 + B_1U + K_1 l(\hat{y} - y) \quad \text{----- (4)}$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}\hat{x}_2 + B_2U + K_2 l(\hat{y} - y) \quad \text{----- (5)}$$

$$\dot{\hat{y}} = \hat{x}_1 \quad \text{----- (6)}$$

단, $\hat{\cdot}$: 추정치

$$l(Z) = [\text{sgn}(Z_1), \dots, \text{sgn}(Z_M)]$$

이때 오차 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{e}_1 = A_{11}e_1 + A_{12}e_2 + K_1 l(\hat{y} - y) \quad \text{----- (7)}$$

$$\dot{e}_2 = A_{21}e_1 + A_{22}e_2 + K_2 l(\hat{y} - y) \quad \text{----- (8)}$$

단, $e_1 = \hat{x}_1 - x_1, e_2 = \hat{x}_2 - x_2$

슬라이딩 모드를 발생시키기 위한 조건은 $s'\dot{s} < 0$ 이지만, 이것은 K_1 을 충분히 크게하면 된다. 슬라이딩 모드를 발생시킨 후의 관측기의 특성과 최소차원 관측기의 특성을 비교하고자 한다. 등가제어 입력법에 의해서, 등가 입력은

$$s = \hat{y} - y = 0, \dot{s} = \dot{\hat{y}} - \dot{y} = 0$$

$$\therefore K_1 l(\hat{y} - y) = -A_{12}e_2 \quad \text{----- (9)}$$

가 얻어진다. 슬라이딩 평면상의 오차 방정식은

$$\dot{e}_2 = \dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2 = (A_{22} + LA_{12}) e_2 \quad \text{----- (10)}$$

으로 표현된다. 여기에서 $K_2 = -LK_1$ 으로 하고있다.

한편 최소차원 관측기는 다음식으로 구성되어진다.

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}\hat{x}_2 + B_2U + L(\hat{y} - y) \quad \text{----- (11)}$$

단 $\hat{\cdot}$ 는 추정치.

이때 오차 방정식은

$$\dot{e}_1 = \dot{\hat{x}}_1 - \dot{x}_1 = A_{12}e_2 \quad \text{----- (12)}$$

$$\dot{e}_2 = \dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2 = (A_{22} + LA_{12}) e_2 \quad \text{----- (13)}$$

이 된다. 따라서 식(10)은 출력오차의 미분치를 이득 L 값으로 개환 최소차원 관측기의 오차방정식은 식(13)과 일치한다. 이것은 슬라이딩 관측기의 내부에서 미분동작이 행해지고 있음을 표시한다. 우선 오차방정식을 표시한 식(7)은 그림1에 표시한 것과 같은 가변구조 필터구성도로 표현되어진다. 끝단의 필터는 스위치항의 고주파 성분을 갖기 위한 가상적인 것으로, e_2 의 오차방정식(8)이 필터능력을 가진 경우에는 불필요하다. 이 가변구조 필터는 일종의 미분필터로 이 출력은 $A_{12}e_2$ 즉, 식(12)는 최소차원 관측기의 출력오차의 미분식이다. 이것은 슬라이딩 관측기가 출력오차 e_2 를 미분하고, e_2 에 개환한것을 의미한다. 또한 최소차원 관측기와 같은 동작을 하고 있음을 알수있다. 그러면 슬라이딩 모드 관

속기 측정잡음 η 가 존재하는 경우에는 슬라이딩 모드가 일어나지 않고, 준 슬라이딩모드가 발생한다. 그러면 K_1 은 등가이득 $k_{eq} (<0)$ 가 얻어진다. 이 경우 그림1의 가변구조 필터는 순수한 미분기로서 동작하지 않고, 등가적으로 아래와 같은 등가 전달계수 행렬 $P_{eq}(s)$ 의 특성을 가진다.

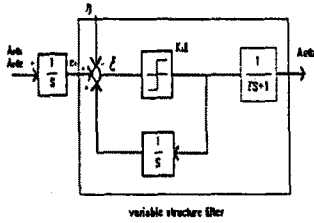


그림1. 가변구조 필터의 구성도
Fig.1. Block diagram of variable structure filter.

$$P_{eq}(s) = [sI - K_{eq}]^{-1} s K_{eq} \quad (14)$$

$$K_{eq} = \text{diag}([k_{eq}], [k_{eq}], \alpha 1/\eta_0) \quad (15)$$

식(14), (15)에서 필터항 $[sI - K_{eq}]^{-1}$ 의 차단 주파수는 잡음레벨 η_0 에 반비례하고, 슬라이딩 관측기는 일종의 적응필터의 능력을 가진다. 따라서 최소차원 관측기가 미분기로서 가지는 특성 즉, 잡음에 약하다는 것은 위와같은 가변구조 필터가 적응필터능력이 있기 때문에 해결될 수 있음을 알수있다.

다음으로 슬라이딩 모드 관측기의 강인성에 대하여 서술하면 다음과 같다. 모델화 오차나 측정잡음등에 의한 외란의 입력행렬을 D 라고 할때, 슬라이딩 모드 관측기가 외란에 둔감하기위한 조건은 다음과 같이 얻어진다.

$$\text{Im } D \subset \text{Im } \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \text{Im } K \quad (16)$$

이것은 슬라이딩 모드 관측기가 외란에 대해서 강인한 특성이 자유로이 설정되는 것을 의미하지만, 안정한 슬라이딩 모드를 실현하기 위해서는 k 를 설계할 필요가 있다. 그 필요충분조건은 「전달계수 $C(sI - A)^{-1}K(A = [A_{ij}])$ 의 영점이 좌측반평면에 존재해야 한다」는 것이다.

- 결국, 슬라이딩 모드 관측기의 특성은 아래와 같이 주어진다.
- (1) 슬라이딩 모드 관측기의 특성은 최소차원 관측기의 특성과 같다.
 - (2) 측정잡음에 대하여 적응필터의 능력을 가지고, 최소차원 관측기보다 측정잡음에 대한 특성이 우수하다
 - (3) $\text{Im } K$ 에 속한 외란에 대해서 강인하다.

3. 유도 전동기의 2차자속추정

<3-1> 슬라이딩 모드 관측기의 구성법

유도 전동기의 2차 자속추정에 대해서 슬라이딩 모드 관측기의 구성법은 다음과 같다. 고정자 좌표상의 유도 전동기의 상태 방정식은 식(17), 식(18)과 같이 표현된다. 상태 변수 x 는 1차전류 i_s 와 2차 자속 λ_r 로 하고, 제어 입력은 1차전압 v_s 로 한다.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} v_s - DW \quad (17)$$

$$i_s = [I \ 0] \begin{bmatrix} i_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} + \eta \quad (18)$$

단, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$DW = [\eta_1 \ \eta_2]^T$; 외란, η : 측정잡음

$$A_{11} = -(R_s + R_r M^2 / L_r^2) / (\sigma L_s) I$$

$$A_{12} = (R_r M / \sigma L_s L_r^2) I - p \omega_m M / (\sigma L_s L_r) J$$

$$A_{21} = (M R_r / L_r) I$$

$$A_{22} = -(R_r / L_r) I + p \omega_m J$$

$$B_1 = (1 / \sigma L_s) I, \sigma = 1 - M^2 / (L_s L_r)$$

단, p = 극수, R_s = 고정자저항, L_s = 고정자인덕턴스

ω_m = 회전자 각속도, R_r = 회전자저항,

L_r = 회전자인덕턴스, M = 상호인덕턴스

슬라이딩 모드 관측기는 다음과 같이 구성된다.

$$\dot{i}_s = A_{11} i_s + A_{12} \lambda_2 + B_1 v_s + K_1 (i_s - i_s^*) \quad (19)$$

$$\dot{\lambda}_r = A_{21} i_s + A_{22} \lambda_2 + K_2 (i_s - i_s^*) \quad (20)$$

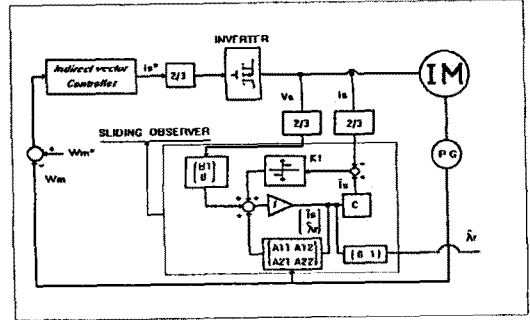


그림2. 슬라이딩 모드 관측기의 구성도
Fig.2. Block diagram of sliding mode observer.

그림2는 슬라이딩 모드 관측기의 구성법을 블록으로 나타내었다. 슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$s = [s_1 \ s_2]^T = i_s - i_s^* = 0 \quad (21)$$

슬라이딩 모드를 발생시키기 위한 충분조건은 다음과 같다.

$$s_1 \dot{s}_1 < 0, \quad s_2 \dot{s}_2 < 0 \quad (22)$$

K_1 을 식(23)과 같이 놓고, k_1, k_2 가 식(24)을 만족시키면, 식(22)는 만족한다.

$$K_1 = k_1 I + k_2 J, \quad K_2 = -L K_1 \quad (23)$$

$$k_1 + k_2 < -\Delta_{\max}, \quad k_1 - k_2 < -\Delta_{\max} \quad (24)$$

단, $\Delta_{\max} = \max\{a|s_1| + \Delta_1, a|s_2| + \Delta_2\}$

$$\Delta_1 = (|\eta_1| + c|\lambda_{dr} - \lambda_{dr}| + d|\lambda_{qr} - \lambda_{qr}|) \text{의 최대치}$$

$$\Delta_2 = (|\eta_2| + d|\lambda_{dr} - \lambda_{dr}| + c|\lambda_{qr} - \lambda_{qr}|) \text{의 최대치}$$

$$a = (R_s + R_r M^2 / L_r^2) / \sigma L_s, \quad c = R_r / (L_r \epsilon)$$

$$d = p \omega_m / \epsilon, \quad \epsilon = \sigma L_s L_r / M$$

전동기의 정격 및 사용환경에 의해서 외란이나 2차자속의 최대치가 추정될 수 있기 때문에, Δ_1, Δ_2 가 계산되어진다.

따라서, k_1, k_2 가 존재해야만 하는 영역은 그림3에 표시한것과 같이 빗금친 영역이다.

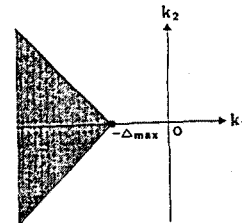


그림3. 스위칭 게인 K의 범위
Fig.3. Allowable region of switching gain K.

<3-2> 외란의 기하학적 구조

외란이 존재하는 시스템의 관측기 구성법에서, 외란의 구조를 파악하는것이 특히 중요하다.

유도전동기의 관측기에 있어서 외란의 기하학적 구조 D 와 외란 벡터 W 를 도출한다. W 와 D 를 알면, 외란의 추정오차의 영향이

평가된다. 상태 방정식(17) 및 A_{11} 의 관계에 의해, 각종 외란 입력 행렬 D 및 외란 벡터 W 를 간단히 계산한다.

(1) $\Delta R_s(R_s \rightarrow R_s + \Delta R_s)$ 에 의한 외란의 경우

$$D = [I \ 0]^T, \quad W = -(\Delta R_s / \sigma L_s) i_s$$

(2) $\Delta R_r(R_r \rightarrow R_r + \Delta R_r)$ 에 의한 외란의 경우

$$D = [I \ -\varepsilon]^T, \quad W = -(\Delta R_r M / \varepsilon L_r) i_r$$

$$i_r = I_s - \lambda_r / M \quad \text{: 토크전류}$$

식(17)의 외란 DW 에 대한 슬라이딩 모드 영향의 영향을 명확히 하면, 슬라이딩 모드에 대한 외란의 입력행렬 F 는 등가 제어 입력법에 의해 $F = [L \ I] D$ 가 된다. 슬라이딩 모드 평면상의 오차 방정식은

$$\dot{e}_2 = \bar{A} e_2 + F W \quad \text{----- (25)}$$

$$\text{단, } \bar{A} = A_{22} + L A_{12} = -\alpha I + \beta J \quad (\alpha > 0)$$

$$L = x I + y J \text{가 된다.}$$

$$A_{12} = cI - dJ, \quad A_{22} = -\varepsilon (cI - dJ)$$

$$\therefore -\alpha = c x + d y - c \varepsilon \quad \text{----- (26)}$$

$$\beta = -d x + c y + d \varepsilon \quad \text{----- (27)}$$

α, β 는 페루프의 극에 해당되며, 피드백 행렬 L 과 같이 파라미터로 보는 것이 가능하다. 계산에 의해

$$\|F\|_2 = \sigma_{\max} \{ [L \ I] D \} \\ = \sqrt{\eta^2 ((\alpha - \xi)^2 + (\beta - \sigma)^2) + \mu^2} \quad \text{----- (28)}$$

로 일반적으로 표현된다.

윗 식은, $\|F\|_2$ 는 상수, 일정 궤적의 원이 됨을 나타내고 이 원의 중심을 $(x, y) = (x_0, y_0)$ 로 하면 다음 식이 성립한다.

$$\xi = -(c x_0 + d y_0 - c \varepsilon) \quad \text{----- (29)}$$

$$\sigma = -(d x_0 + c y_0 - d \varepsilon) \quad \text{----- (30)}$$

따라서 η, ξ, σ, μ 의 구체적인 값은 행렬 D 가 주어지면 간단히 계산되어질 수 있다. 도출한 슬라이딩 관측기의 외란에 대한 특성을 기초로하여 외란 제어능력을 문제설정에 도입해서 슬라이딩 관측기의 설계문제를 검토하면 다음과 같다.

4. 슬라이딩 모드 관측기에 관계하는 전달계수행렬의 설계

<4.1> 외란의 전달계수 행렬의 H_∞ norm

외란 W 에서 추정오차 e_2 로의 전달계수 행렬을 $T(s)$ 로 하면, $T(s)$ 는 외란의 추정오차로써의 영향을 표현하는 것이기 때문에 $T(s)$ 의 norm 값을 갖는 것이 가능하지만, 여기에서는 최악의 상태를 고려한 W 를 가상해서, 그때의 $T(s)$ 의 이득을 고려한다.

--> 최대여유설계(WORST CASE DESIGN)

이것은 $T(s)$ 의 H_∞ norm $\|T\|_\infty$ 을 평가하는 것이 된다.

$\|T\|_\infty$ 는 아래와 같이 구해줄 수 있다.

$$T(s) = (sI - \bar{A})^{-1} F \quad \text{----- (31)}$$

$$\therefore \|T\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max} [T(j\omega)] \quad \text{----- (32)}$$

$$= \|F\|_2 / \alpha \quad \text{----- (33)}$$

즉, 외란에서 추정오차로의 전달계수 행렬의 H_∞ norm은 그 외란의 입력행렬 F 의 유도 norm $\|F\|_2$ 에 비례하고, 페루프계의 극의 실수부의 α 에 반비례한다. 따라서, 외란에 대한 감도를 최소화 하는 것은 $\|F\|_2$ 를 최소화하는 것, 혹은 감쇄특성을 크게하면 좋지만, 실제로 각각을 독립적으로 조정하는 것은 불가능하다. 또한,

$$\|T\|_\infty = \sqrt{\eta^2 ((\alpha - \xi)^2 + (\beta - \sigma)^2) + \mu^2 / \alpha} \quad \text{----- (34)}$$

$\|T\|_\infty$ 는 α, β 에 대응하는 의존성을 주고있다. $\|F\|_2$ 는 ξ, μ 의 값에 의해서, $\|T\|_\infty$ 는 α 에 대하여 의존성이 다르기 때문에 그것에 따라서 외란의 부류를 고려하여야 만한다.

<4-2> 페루프 전달계수 행렬의 H_2 norm

관측기의 설계에는 외란 제어능력외에도 바라던 페루프 전달계

수 행렬을 실현하는 것이 중요하다. 즉, 초기오차를 빠르게 감쇄시킬 필요가 있다. <4-1>결과와 같이 페루프 전달 계수 행렬의 적당한 norm을 이용해서 감쇄특성을 평가하는 것이 가능하다. 초기 오차에 대하여 응답은 다음의 임펄스응답으로 주어진다.

$$e_2(s) = G(s)e_2(0) = (sI - \bar{A})^{-1} e_2(0) \quad \text{----- (35)}$$

여기에서 $G(s)$ 의 H_∞ norm과 H_2 norm을 검사한다.

H_∞ norm은 WORST CASE DESIGN에 대응하고, H_2 norm은 LEAST SQUARE ERROR DESIGN(LQG 문제)에 대응한다.

우선, $F=I$ 로 하고, <4-1>결의 결과를 이용하면,

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} \sigma_{\max} \{ (j\omega - \bar{A})^{-1} \} \quad \text{----- (36)}$$

$$\therefore \|G\|_\infty = 1/\alpha \quad (\omega = |\beta|) \quad \text{----- (37)}$$

이 된다. 즉, $\|G\|_\infty$ 는 페루프 전달 계수 행렬의 극의 실수부 α 의 역수로 주어진다.

$G(s)$ 의 H_2 norm, $\|G\|_{H_2}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\|G\|_{H_2}^2 = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace } G(-j\omega)^T G(j\omega) d\omega \quad \text{----- (38)}$$

$$= 1/\alpha = \|G\|_\infty \quad \text{----- (39)}$$

물리적으로 $\|G\|_{H_2}$ 는 추정오차의 2승 평균치를 표시하고 있다.

윗 식에 의해, $\|G\|_\infty$ 또는 $\|G\|_{H_2}$ 의 어느것으로 평가해도 똑같다. $\|G\|_{H_2}$ 를 제어하는 데에는 α 를 크게하면 좋지만, 또한 위에서 서술한 결과를 이용하면, 외란에서 추정오차로의 전달계수 행렬의 norm간에 다음과 같은 관계가 얻어진다.

$$\|T\|_{H_2} = \|F\|_2 / \sqrt{\alpha} = \sqrt{\alpha} \|T\|_\infty \quad \text{----- (40)}$$

그래서 <4-1>결과 <4-2>결에서 논한 내용을 가지고 외란제어능력을 고려한 슬라이딩 모드 관측기를 설계할수있으며 적당한 극배치를 할 수 있으며, 외란을 정량적으로 평가할 수 있다.

5. 시뮬레이션

본 논문에서는 슬라이딩 모드 관측기를 이용해서 2차자속을 추정하는 것이 문제이므로 2차자속을 제한하지 않았다. 그리고 이 절에서는 앞절에서 설명한 내용을 근거로 하여 유도기의 2차자속을 추정하였다. 그리고, α 값은 실수부에 위치시켰다. 그림4는 그림3과 같은 간접벡터제어 시스템에서 유도기 실제자속을 나타내고 있다. 그림5는 실제자속의 정상상태 d-q자속을 d-q평면으로 나타내고 있다. 그림6은 전류를 측정할때 생기는 잡음을 고려하여 시뮬레이션한 것으로, 인버터는 히스테리시스 인버터를 사용했으며, 히스테리시스 밴드 전류는 0.5A로하였다. 측정잡음은 히스테리시스인버터가 스위칭 할때 생기는 잡음보다 1.5배 많은 값으로 결정하였고, 그림6에서 보는바와같이 관측기가 가지는 저속에서의 추정오차를 제외하고는 실제자속과 차이가 없음을 알수있다. 그림7은 고정자저항의 변동을 고려한 것으로 실제실험에서는 고정자권선외부에 노출되어있어 그다지 큰 변화가 생기지는 않지만, 고정자저항이 측정된 값보다 150%정도 변화한것으로 가정하여 추정한 것이다. 그림8은 회전자저항이 변화한 것으로 가정하여 추정한 값이며, 정상상태에서의 실제자속과 추정자속과의 작은 오차는 최대여유설계를 통해서 극값을 결정한 것으로 외란(2차저항의 변화)이 큰경우를 가정한 것이다.

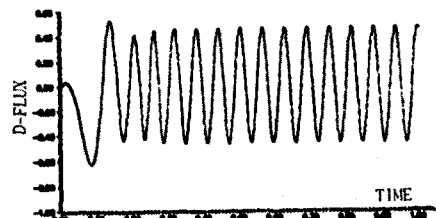


그림4-1. 실제자속(d축 자속)
Fig. 4-1. Real Flux(d-Flux).