

## Reissner-Mindlin 평판의 hp-Version 유한요소해석

### hp-Version of the Finite Element Analysis for Reissner-Mindlin Plates

우 광 성\*      이 기 덕\*\*  
Woo, Kwang Sung      Lee, Gee Doug

#### ABSTRACT

This paper is concerned with formulations of the hierarchical C<sup>0</sup>-plate element on the basis of Reissner-Mindlin plate theory. One reason for the development of the aforementioned element is that it is still difficult to construct elements based on h-version concepts which are accurate and stable against the shear locking effects. An adaptive mesh refinement and selective p-distribution of the polynomial degree using hp-version of the finite element method are proposed to verify the superior convergence and algorithmic efficiency with the help of the clamped L-shaped plate problems.

#### 1. 서론

평판이론은 크게 2가지로 나누어 볼 수 있는데 1850년에 제안된 Kirchhoff-Love 이론과 1944년과 1950년초에 제안된 Reissner-Mindlin 이론으로 대별할 수 있다. 각각의 이론은 뒤에서 상세히 설명되겠지만 전자는 평판의 지배방정식이 4계 편미분방정식으로 유한요소 정식화를 위해 변분(variation)을 취하게 되면 범함수(functional)는 최고 2계 미분항이 되므로 해석영역내에서는 C<sup>2</sup>-연속조건을 만족해야 하며 경계에서는 C<sup>1</sup>-연속조건을 만족해야 수렴성이 보장된다. 요소경계에서 C<sup>1</sup>-연속조건을 만족하기 위해서는 변위, 접선방향과 법선방향의 1차 미분값이 연속성을 가져야 하는데 그렇기 위해서는 절점자유도가 증가하며 따라서 보간함수의 차수도 증가해야 한다. 보통, 제안된 C<sup>1</sup>-요소는 24자유도에 5차의 보간함수를 갖는다. 반면에 후자의 평판이론은 지배방정식이 3개의 2계 편미분방정식으로 표현되어 범함수에 1계 미분항이 최고차수가 되므로 요소경계에서는 C<sup>0</sup>-연속조건만을 만족시켜 주면 그 수렴성이 보장된다. 본 연구에서는 C<sup>0</sup>-연속 조건을 만족시키는 평판요소를 적분형 르장드르함수에 기초한 계층적 C<sup>0</sup>-평판요소(hierachic C<sup>0</sup>-plate element)를 사용하여 수렴속도를 최대로 보장할 수 있는 hp-version 유한요소법을 이용하여 사각형 평판의 두께변화에 따른 전단구속(shear locking)현상의 영향과 요소분할시 요소의 형상에 대한 민감도를 알아보기 위해 왜곡도(skewness)를 갖는 쪼그러진 요소(distorted element)를 사용하여 해에 미치는 영향을 동시에 검토하였다. 한편, 개구부를 갖는 사각형 평판해석을 에너지 노름을 사용하여 수렴성을 연구하였으며 개구부의 꼭지점에서 발생되는 모멘트특이성(moment singularity)이 검토되었으며 응력구배가 심한 부근에서는 높은 차수의 형상함수를, 응력구배가 완만한 부근에서는 낮은 차수의 형상함수를 사용하는 적응적 체는 p-세분화의 연구가 일부 수행되었는데 고차와 저차의 형상함수가 만나는 꽁꽁경계에서는 저차의 형상함수로 연속성을 유지하였다.

\* 전남대학교 토목공학과 조교수

\*\*전남대학교 토목공학과 석사과정

## 2. 모서리 특이성(Corner Singularity)

평판의 모서리 특이성에 관한 수학적 특성에 관한 연구는 처음으로 Williams에 의해 수행되었다. Fig. 1에는  $90^\circ$  凹形모서리(reentrant corner)와 임의의 각을 갖는 평판조각(plate segment)이 나타나 있다. Williams에 의하면 특이현상은 원주방향(circumferential edge)의 경계조건과 하중에 무관하며 반경방향(radial edge)의 경계조건과 Fig. 1에서 보는 임의의 각  $\theta$ 에 따라 특이거동이 발생한다고 하였다. 그러므로, 응력특이는 하중에 무관하므로 평판의 지배방정식을 다음과 같은 제차 미분방정식으로 고려할 수 있다.

$$\nabla^4 w = 0 \quad (1)$$

방정식(1)의 해는 극좌표계를 사용하여 다음과 같이 정의된다.

$$w = \beta r^{(\lambda+1)} F(\theta, \lambda) \quad (2)$$

여기서  $F(\theta, \lambda)$ 는 식(3)과 같이 나타낼 수 있다. [9]

$$F = C_1 \cdot \sin(\lambda+1)\theta + C_2 \cdot \cos(\lambda+1)\theta + C_3 \cdot \sin(\lambda-1)\theta + C_4 \cdot \cos(\lambda-1)\theta \quad (3)$$

한편,  $\beta$ 는 양의 상수를 의미하며 상수  $C_1, C_2, C_3, C_4$ 는 평판을 둘러싸고 있는 반경방향에서 2개씩의 경계조건을 적용함으로서 결정된다. 4개의 경계조건을 적용하면 계수행렬(coefficient matrix)의 Determinant값이 0이 되어야 하는 조건으로부터 구해진 특성방정식(characteristic equation)을 사용하여 고유치  $\lambda$ 를 구하게 된다. 또한 식(2)로 부터 모멘트는  $r^{(\lambda-1)}$ 에 비례하고 전단력은  $r^{(\lambda-2)}$ 에 비례함을 알 수 있다. 그러므로,  $\lambda$ 가 1보다 작을 경우 모멘트특이(singular moment)가 발생하며  $\lambda$ 가 2보다 작을 경우에는 전단력특이(singular shear force)가 발생하게 된다. Williams에 의하면 단순지지인 경우는  $\theta$ 가  $\pi/2$  보다 큰 경우 모멘트특이가 발생함을 보였으며 본 연구에서 해석하려고 하는 개구부를 갖는 사각형 평판의 경우 즉,  $\theta$ 가  $3\pi/2$ 인 경우는 여러 가지 경계조건 모두 모멘트특이 및 전단력특이가 발생함을 보이고 있다.

## 3. 평판의 고전적 이론

### 3.1 Kirchhoff - Love 이론

변위장이 3개의 변위벡터로 표시되며 Fig. 2에서 보듯이  $x, y$  방향으로의 면내변위벡터(in-plane displacement vector)  $u_{x0}(x, y), u_{y0}(x, y)$ 와 수직변위벡터  $u_{z0}(x, y)$ 로 표현할 수 있다.

$$u_x = u_{x0}(x, y) - z \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} \quad (4-a)$$

$$u_y = u_{y0}(x, y) - z \frac{\partial u_{z0}}{\partial y} \quad (4-b)$$

$$u_z = u_{z0}(x, y) \quad (4-c)$$

평판의 두께에 따라 변위가 일정하므로 두께방향의 변형도는 0이 된다. 한편, 전단변형도  $\gamma_{xz}$ 와  $\gamma_{yz}$ 는 식(5)에서 보는 바와 같이 0이 된다.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = - \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z0}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

### 3.2 Reissner - Mindlin 이론

새로운 2개의 변위벡터  $u_{x1}(x, y)$ ,  $u_{y1}(x, y)$ 가 도입되는데 변형전과 변형후에서 중립면에 수직인 단면의 회전각을 의미한다.

$$u_x = u_{xo}(x, y) - z u_{x1}(x, y) \quad (6-a)$$

$$u_y = u_{yo}(x, y) - z u_{y1}(x, y) \quad (6-b)$$

$$u_z = u_{zo}(x, y) \quad (6-c)$$

Kirchhoff 가정의 경우와 같이  $\varepsilon_z=0$ 이 되며 두께 방향의 응력은 무시하므로  $\sigma_z=0$ 이 된다. 그러나, 전단변형도  $\gamma_{xz}$ 와  $\gamma_{yz}$ 는 식(7)과 같이 정의된다.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = - u_{x1}(x, y) + \frac{\partial u_{zo}}{\partial x} \quad (7-a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = - u_{y1}(x, y) + \frac{\partial u_{zo}}{\partial y} \quad (7-b)$$

이와 같이 Reissner 이론을 사용하게 되면 전단변형 효과를 고려할 수 있으며  $C^0$ -연속조건만을 만족시켜 주면 수렴성이 보장된다.

### 4. 계층적 $C^0$ -평판요소

본 연구에서는 Reissner-Mindlin 평판이론에 근거하고 적분형 르장드르 함수를 형상함수로 사용한 사변형 요소이며 요소의 크기와 형상함수 차수를 동시에 조절하여 정해에 좀 더 빨리 수렴할 수 있는 hp-version 유한요소 방식을 취하는 까닭에 아래와 같은 특성을 갖는다.

- 1) 계층적 성질(hierachic nature) 과 직교성(orthogonality)에 기인한 알고리즘의 효율성
- 2) 요소와 요소간에서 형상함수 차수의 선택적 사용
- 3)  $C^0$ -연속을 보장
- 4) 응력 특이점에서의 요소 세분화(h-refinement)

한편, 평판의 수직변위를  $w$ ,  $y$ 축 방향과  $x$ 축 방향으로의 처짐각을 각각  $\theta_1, \theta_2$ 라 할 때 일반적인 변형도  $\epsilon = (\xi^T, \phi^T)^T$ 이고  $\xi$ 는 곡률을 나타내며 아래 식과 같다.

$$\xi = \left[ -\frac{\partial \theta_1}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_2}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right) \right]^T \quad (8)$$

또한, 전단변형을 나타내는  $\phi$ 는 다음과 같다.

$$\phi = \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_1, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_2 \right)^T \quad (9)$$

일반화된 합응력(stress resultants)은 식(10)과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma = (m_x, m_y, m_{xy}, q_x, q_y)^T \quad (10)$$

이것은 힘 모멘트  $M=(m_x, m_y, m_{xy})^T$  와 전단력  $Q=(q_x, q_y)^T$ 의 2개 그룹으로 나눌 수 있다. 즉,

$$M = D \cdot D_B \zeta \quad (11-a)$$

$$Q = S \cdot D_S \phi \quad (11-b)$$

여기서

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad S = \frac{E t}{2(1+\nu) \alpha}$$

한편,  $\alpha$ 는 전단계수(shaer factor)를 나타내며 재료에 관한 매트릭스  $D_B$  와  $D_S$ 는 다음과 같다.

$$D_B = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad D_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

그러므로, 평판의 내부에너지는 식(12)와 같이 정의 된다.

$$I = \int_Q D \cdot \zeta^T \cdot D_B \cdot \zeta + S \cdot \phi^T \cdot D_S \cdot \phi \quad dQ \quad (12)$$

### 5. 전단구속 현상(Shear Locking Phenomenon)

Reissner-Mindlin 이론에 근거한 평판요소는 평판두께가 얕아짐에 따른 전단구속현상이 발생될 수 있다. 그 이유는 이미 Timoshenko 보요소에서 알 수 있듯이 처짐을  $\omega(x)$ , 처짐각을  $\phi(x)$ 라 하고 두께를  $t$ , 그리고 보의 해석영역을  $(0,1)$ 로 가정할 때 보의 내부에서 발생되는 내부에너지는 다음과 같다.

$$I = C_1 \int \phi'^2 + \frac{C_2}{t^2} (\omega - \phi)^2 \quad dx \quad (13)$$

여기서  $C_1$ 과  $C_2$ 는 힘과 전단에 대한 계수이며  $t$ 가 0에 접근하는 얕은 평판요소일 때 요소의 강성도(stiffness)는 매우 큰값으로 과대 추정되어 변위값이 예상치 못한 작은 값을 보이게 되는데, 이를 전단구속(shear locking)이라 한다. 일반적으로 구속현상(locking phenomenon)이란 두께에 따른 형상비 및 기하학적 또는 재료적 성질을 나타내는 매개변수가 어떤 한계값에 접근하면서 강성도가 과대추정되는 현상을 의미한다. 한편, p-version 유한요소법의 경우 전단구속현상을 살펴보기 위하여 고정단으로 지지된 정방형 평판이 등분포하중을 받고 있을 때 평판중앙에서의 최대처짐의 정규변위(normalized displacement)는 다음과 같이 정의하였다.

$$\omega_{\text{norm}} = \omega_{\max} E t^3 / q_0 L^4 \quad (14)$$

여기서,  $\omega_{\max}$ 는 최대처짐,  $E$ 는 탄성계수,  $q_0$ 는 등분포하중 세기 그리고  $L$ 는 평판의 변의 길이이다. Fig. 3에서 보듯이 Mesh1과 Mesh2는 p-version 모델을 나타내며, Mesh2는 요소의 치그러짐(distortion)정도에 따른 영향을 두께의 변화에 따라 분석하

였다. Mesh3은 Hughes가 제안한 Heterosis요소를 8x8개를 사용하여 두께가 얕아짐에 따른 전단구속현상을 살펴 보았다. p-version모델의 경우 p=7차를 사용한 Mesh1과 Mesh2는  $\text{Log}(L/t)=3.5$ 까지 변화하여도 전단구속이 발생하지 않은 반면 Heterosis요소를 사용한 Mesh3는  $\text{Log}(L/t)=2.0$ 에서부터 전단구속이 발생함을 Kirchhoff값과 비교하여 알 수 있었다. Fig. 4와 Fig. 5은 p-version모델을 사용한 Mesh1과 Mesh2의 p-level의 증가에 따른 수렴성을 보여 주고 있다. 즉 Mesh1의 경우 L/t가 각각 100, 1000일 경우 p=6차 이상을 사용하여야 전단구속을 피할 수 있으며 Mesh2의 경우도 Mesh1의 경우와 거의 같은 경향을 보여 주고 있다.

#### 6. L-형 평판(L-shaped plates)

개구부(opening)를 갖는 정방형 평판이 내부주변(inner edge)은 고정되어 있고 외부주변(outer edge)은 자유단으로 등분포하중을 재하받고 있을 때 개구부의 꼭지점에서는 모멘트 및 전단력특이가 발생하는 특이성문제가 된다. 먼저 Fig. 6에서 3개의 서로 다른 모델 Mesh A, Mesh B 와 Mesh C를 설정하여 p-level을 1차에서 5차까지 증가시킴에 따른 hp-version유한요소법의 수렴성을 분석하여 보았다. 그림에서 보듯이 동일한 자유도일때의 상대오차는 hp-version유한요소법을 사용한 Mesh C가 가장 좋은 수렴성을 보여 주고 있다. 한편, Fig. 7에서 보는 바와 같이 첫번째는 전 요소에 p=1 차를 사용하였고 두번째는 p=2차를 전 요소에 사용한 후 응력구배가 높은 점에는 점차 p의 차수를 높여 3% 상대오차를 만족하는 5번째까지 반복을 통하여올 때의 수렴성이 Fig. 8에 나타나 있다.

#### 7. 결론

이상에서 살펴 본바와 같이 hp-version유한요소법은 다음과 같은 특성을 보여 주었다.

- (1) p-version유한요소법에 비하여 높은 수렴성
- (2) 전단구속현상을 피할 수 있다.
- (3) 형상함수 차수의 선택적 사용
- (4) 적응적 체눈 p-세분화 효율성

#### 8. 참고문헌

- (1) O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu and N.G. Gong, "Effective and practical h-p version adaptive analysis procedures for the finite element method", Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 28, pp. 879-891 (1989)
- (2) A.K. Noor and I. Babuska, "Quality assessment and control of finite element solution", Finite Element Anal. Des., Vol. 3, pp. 1-26 (1987)

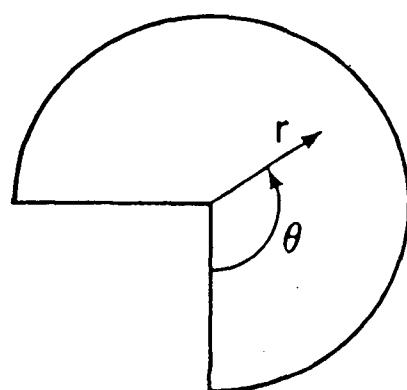


FIG. 1 Plate segment with a 90° reentrant corner

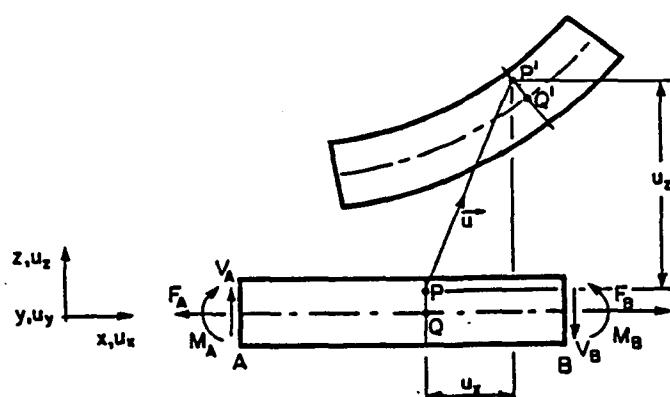


FIG. 2 Components of the displacement vector

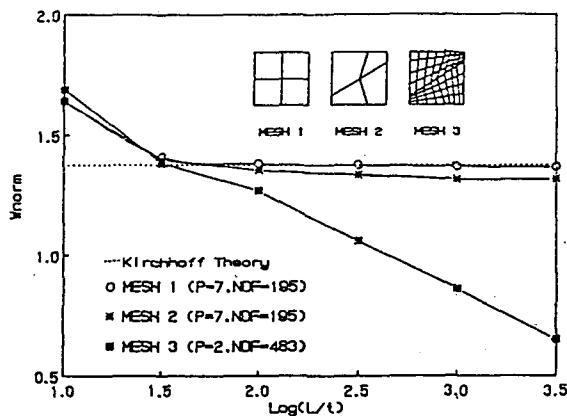


FIG. 3 Results of shear locking analysis

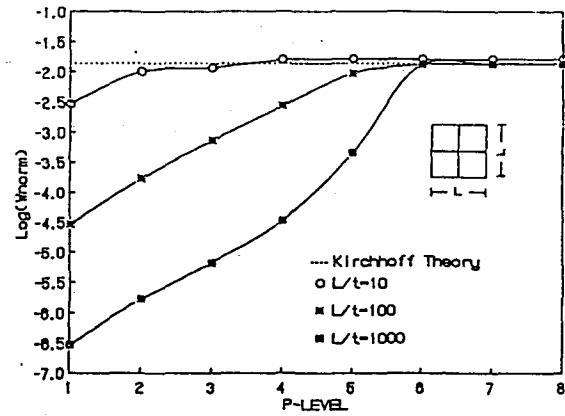


FIG. 4 Shear locking effect for different p-levels  
When  $L/t=10, 100$  and  $1000$  (Mesh 1 Case)

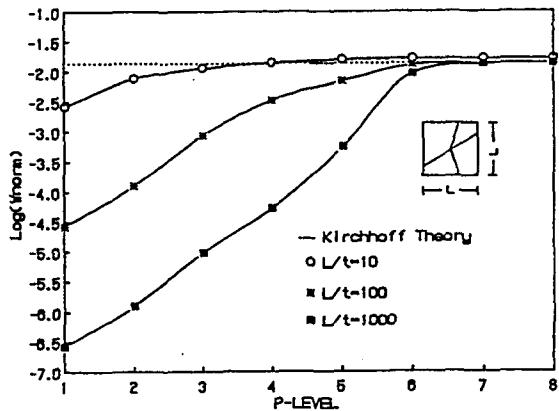


FIG. 5 Shear locking effect for different p-levels  
When  $L/t=10, 100$  and  $1000$  (Mesh 2 Case)

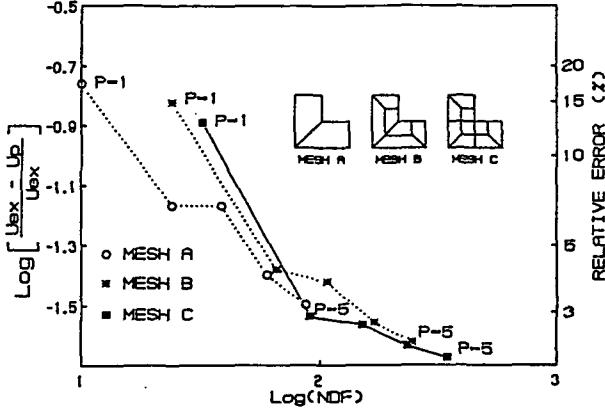


FIG. 6 Convergence of hp-version of FEM  
with respect to  $\text{LOG}(\text{NDF})$

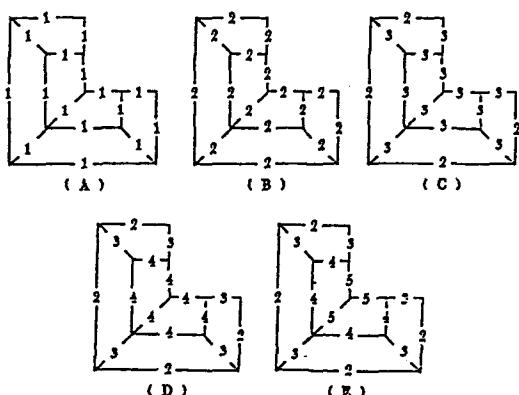


FIG. 7 Iteration scheme for p-adaptive meshes

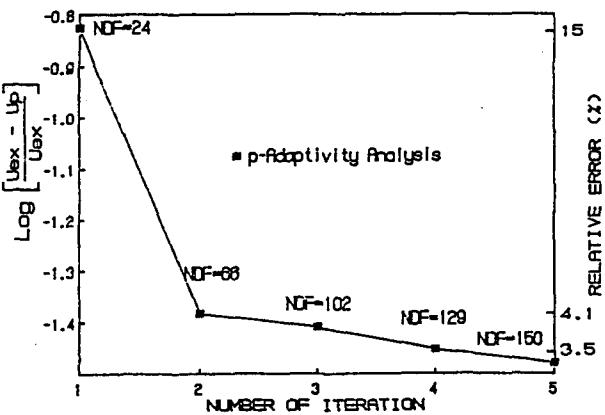


FIG. 8 Convergence characteristics of  
the p-adaptive analysis