

반무한 다층 구조계의 비선형 유한요소 - 경계요소 해석

Analysis of Multi-Layered Structural Systems
Using Nonlinear Finite Elements - Boundary Elements

김문겸* 장정범** 이상도*** 황학주****
Kim, Moon Kyum Jang, Jung Bum Lee, Sang Do Hwang, Hak Joo

Abstract

It is usual that underground structures are constructed within multi-layered medium. In this paper, an efficient numerical modelling of multi-layered structural systems is studied using coupled analysis of finite elements and boundary elements. The finite elements are applied to the area in which the material nonlinearity is dominated, and the boundary elements are applied to the far field area where the nonlinearity is relatively weak. In the boundary element modelling of the multi-layered medium, fundamental solutions are restricted. Thus, methods which can utilize existing Kelvin and Melan solution are sought for the interior multi-layered domain problem and semi infinite domain problem. Interior domain problem which has piecewise homogeneous layers is analyzed using boundary elements with Kelvin solution; by discretizing each homogeneous subregion and applying compatibility and equilibrium conditions between interfaces. Semi-infinite domain problem is analyzed using boundary elements with Melan solution, by superposing unit stiffness matrices which are obtained for each layer by energy method. Each methodology is verified by comparing its results with the results from the finite element analysis and it is concluded that coupled analysis using boundary elements and finite elements can be reasonable and efficient if the superposition technique is applied for the multi-layered semi-infinite domain problems.

1. 서론

지하구조계를 해석하는 방법으로 유한요소법, 경계요소법 등과 같은 수치해석방법이 전자계산기의 발달과 더불어 다각적으로 시도되어 왔다. 경계가 무한이나 반무한영역에 설정되는 문제의 경우, 굴착부 주변의 응력집중부에는 유한요소를 사용하고 비선형의 영향을 거의 없는 무한 및 반무한 영역에서는 경계요소를 사용하여 조합해석을 실시하는 것이 효율적이다(1,2). 또한 지반은 일반적으로 퇴적층의 형성 또는 지각변동에 의해 다층구조를 가지게 되므로, 해석에 다층구조의 영향을 반영할 필요가 있다. 본 연구에서는 다층으로 구성된 지하구조계를 대상으로 구조물과 그 주변에는 비선형 유한요소를 사용하고, 비선형성이 상대적으로 미약한 다층지반에는 선형경계요소를 사용하는 조합해석방법을 연구하고, 효율적인 해석프로그램을 개발하고자 한다. 반무한영역에 설정되는 다층구조계를 경계요소로 모형화할 때, 반무한 다층기본해의 유도과 수치해석화는 실제 적용에 제한사항이 따르므로(3), 본 연구에서는 기존의 무한 기본해를 이용하여 각각의 층을 부영역(subregion)으로 분할하고 계방정식을 구성한 뒤에, 접합면에서 평형조건과 적합조건을 만족시켜 주는 내부영역문제의 조합해석방법(4)과 기존의 반무한 기본해를 이용하여 구성된 계방정식으로부터 산정한 단위강성도 행렬을 층에 따라 중첩하는 조합해석방법을 각각 사용한다. 유한요소와 경계요소의 조합방법으로는 경계요소의 계방정식을 유한요소형 계방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근방법을 사용한다.

2. 다층구조계의 경계요소해석

경계요소법은 크게 직접 경계요소법과 간접 경계요소법으로 나눌 수 있다. 직접 경계요소법이 유한요소법과 조합하기에 용이하므로(4) 본 연구에서는 직접 경계요소법에 의한 접근방법을 이용하도록 한다.

2.1 경계적분방정식

연속체 내의 한 점에서 응력텐서를 σ_{ij} , 물체력을 b_i 로 나타내면 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (1)$$

대상영역 Ω 의 전체경계 Γ 를 기하학적 경계 Γ_1 과 역학적 경계 Γ_2 로 분할할 때, 경계조건은 Γ_1 과 Γ_2 에 대하여 각각 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i && \text{on } \Gamma_1, \\ t_i &= \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i && \text{on } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 u_i 는 변위벡터, t_i 는 표면력벡터이며 \bar{u}_i 및 \bar{t}_i 는 기지의 변위벡터 및 표면력벡터이다. 또한 n_j 는 외부로 향한 수직벡터의 방향여현이다.

대상영역에 대하여 가중잔차방정식(weighted residual equation)을 구성하면 식 (3)과 같다.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u^*k d\Omega = \int_{\Gamma_1} (u_k - \bar{u}_k) t^*k d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\bar{t}_k - t_k) u^*k d\Gamma \quad (3)$$

여기서 u^*k 는 가중영역에서의 변위벡터이며, t^*k 는 가중영역에서의 변위벡터에 대응하는 표면력벡터이다. 식 (3)을 두 번 부분적분하고 변형을-변위 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있다.

* 연세대학교 공과대학 토목공학과 부교수
** 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정
*** 연세대학교 산업기술연구소 연구원
**** 연세대학교 공과대학 토목공학과 교수

다.

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma_1} u_k t_{pk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k t_{pk}^* d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} b_k u^* k d\Omega + \int_{\Gamma_2} t_k u^* k d\Gamma + \int_{\Gamma_1} t_k u^* k d\Gamma \quad (4) \end{aligned}$$

여기서 영역 내 임의점 i 에서 x_p 의 방향으로 단위하중 δ_{pi} 가 작용될 때의 응력을 σ_{pkj}^* 라고 하면 다음의 방정식이 성립된다.

$$\sigma_{pkj,j}^* + \delta_{pi} = 0 \quad (5)$$

이 방정식의 해 (기본해) 를 가중영역으로 하여 적분방정식을 경계문제화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & c_{pk} u_k^i + \int_{\Gamma_1} u_k t_{pk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k t_{pk}^* d\Gamma \\ & = \int_{\Omega} b_k u^*_{pk} d\Omega + \int_{\Gamma_2} t_k u^*_{pk} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} t_k u^*_{pk} d\Gamma \quad (6) \end{aligned}$$

여기서 u_k^i 는 i 점에서 x_p 방향으로 가해진 단위하중에 의한 x_k 방향으로의 변위이고 t_{pk}^* 와 u^*_{pk} 는 각각 가중영역에서의 표면력과 변위이다. 또한 c_{pk} 는 경계면의 기하학적 형상에 의하여 결정되는 상수이다.

2.2 경계요소 계방정식

경계적분방정식은 한 점의 변위에 대하여 전체 경계 Γ 와 전체 영역 Ω 에 대한 적분방정식으로 표시된다. 경계적분방정식을 풀기 위해 경계를 요소화하고, 이 요소에 대한 근사해를 구하기 위한 계방정식을 구성한다. 경계적분방정식을 행렬 형태로 표현하기 위해 전체좌표계에 대한 변위 $\{u\}$ 와 표면력 $\{t\}$ 를 형상함수로 나타낸다. 변위와 표면력을 선형요소로 이산화하면 다음과 같다.

$$\{u\} = [\phi] \{u^n\} \quad (7)$$

$$\{t\} = [\phi] \{t^n\} \quad (8)$$

여기서 $[\phi]$ 는 형상함수행렬이며 $\{u^n\}$ 과 $\{t^n\}$ 은 각각 절점에서의 변위와 표면력벡터이다. 경계적분방정식 (6) 에 식 (7) 과 (8) 을 대입하고 물체력항을 무시하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} [c] \{u\} + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [t^*] [\phi] d\Gamma \{u^n\} \\ = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [u^*] [\phi] d\Gamma \{t^n\} \quad (9) \end{aligned}$$

여기서 N 은 경계상의 절점수를 나타낸다. 식 (9) 를 수치적분의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [c] \{u\} + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L |J|_q w_q ([t^*] [\phi]_q) \right] \{u^n\} \\ = \sum_{j=1}^N \left[\sum_{q=1}^L |J|_q w_q ([u^*] [\phi]_q) \right] \{t^n\} \quad (10) \end{aligned}$$

여기서 $|J|$ 는 Jacobian 행렬, w 는 Gauss 적분의 가중치, L 은 경계요소의 수이다. 따라서 계방정식은 다음과 같은 행렬식으로 표시된다.

$$[H] \{u\} = [G] \{t\} \quad (11)$$

여기서 행렬 $[H]$ 와 $[G]$ 는 기본해로부터 계산되는 계수행렬이다.

2.3 부영역 (Subregion)

다층지반을 고려한 기본해의 유도는 반무한영역의 문제에 대한 기본해의 유도에 사용되는 image point 를 도입하여 무한탄성영역에 대한 Kelvin 의 기본해에 층과 층 사이의 평형조건과 적합조건을 만족시켜주는 보충항을 추가하여 구성할 수 있다^[5]. 이 때 층들이 평행하게 놓여 있지 않은 경우에는 보충항을 추가해야 하며 source point 는 고정된 하나의 층에 존재하므로 굴착부가 여러 층에 존재하는 경우에 적용이 어렵다. 반면에 다층구조를 구성하는 각각의 층이 등방성 균질체라는 가정 하에 대상영역을 분할하여 각각의 균질한 (piecewise homogeneous) 층을 부영역으로 모형화하면, 위의 문제는 해결이 쉽지만 그림 1 에 보인 바와 같이 부영역과 부영역 사이의 접합면을 적절한 수의 요소로 이산화 (discretization) 해야만 한다. 그림 1 에서 전체 영역 Ω 는 부영역 Ω^1 과 Ω^2 로 구성되며 Ω^1 과 Ω^2 는 접합면을 공유한다. 부영역 Ω^1 의 경계는 외부경계 Γ^1 과 접합면 상의 경계 Γ_1 로 구성되고 부영역 Ω^2 의 경계는 외부경계 Γ^2 와 접합면 상의 경계 Γ_1 로 구성된다. 따라서 개개의 부영역에 대해 독립적으로 식 (11) 과 같은 계방정식을 구성한 후, 이 식들을 조합하고 접합면 Γ_1 에서의 평형조건과 적합조건을 고려하여 전체 영역에 대한 계방정식을 얻는다.

그림 1 에서 부영역 Ω^1 에 대해 계방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$[H^1][H^1_1] \begin{Bmatrix} \{u^1\} \\ \{u^1_1\} \end{Bmatrix} = [G^1][G^1_1] \begin{Bmatrix} \{t^1\} \\ \{t^1_1\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

여기서 $\{u^1\}$ 과 $\{t^1\}$ 은 외부경계 Γ^1 에서의 절점 변위와 표면력이고, $\{u^1_1\}$ 와 $\{t^1_1\}$ 는 Ω^1 에 속한 접합면 Γ_1 에서의 절점 변위와 표면력이다. 마찬가지로 부영역 Ω^2 에 대해 계방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$[H^2][H^2_1] \begin{Bmatrix} \{u^2\} \\ \{u^2_1\} \end{Bmatrix} = [G^2][G^2_1] \begin{Bmatrix} \{t^2\} \\ \{t^2_1\} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서 $\{u^2\}$ 와 $\{t^2\}$ 는 외부경계 Γ^2 에서의 절점 변위와 표면력이고 $\{u^2_1\}$ 와 $\{t^2_1\}$ 는 Ω^2 에 속한 접합면 Γ_1 에서의 절점 변위와 표면력이다.

Ω^1 과 Ω^2 사이의 접합면 Γ_1 에서 적합조건과 평형조건은 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{u^1_1\} &= \{u^2_1\} = \{u_1\} \\ \{t^1_1\} &= -\{t^2_1\} = \{t_1\} \quad (14) \end{aligned}$$

식 (14) 를 식 (12) 와 (13) 에 대입하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [H^1][H^1_1][0] \\ [0] [H^2_1][H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^1\} \\ \{u_1\} \\ \{u^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1] [G^1_1][0] \\ [0] -[G^2_1][G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t^1\} \\ \{t_1\} \\ \{t^2\} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (15) 는 행렬 $[H]$ 와 $[G]$ 가 banded 형태인 점을 제외하면 식 (11) 의 계방정식과 형태가 같다.

접합면에서 변위와 표면력은 모두 미지값이므로 문제의 경계조건을 Neumann type 이라고 가정하면 식 (15)

는 다음과 같이 미지값을 좌변에, 기지값을 우변에 구분하여 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [H^1][H^1_1] & -[G^1_1][0] \\ [0] & [H^2_1] & [G^2_1][H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^1\} \\ \{u_1\} \\ \{u^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G^1][0] \\ [0] & [G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t^1\} \\ \{t^2\} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

또는 문제의 경계조건을 Dirichlet type 이라고 가정하면 식 (15) 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} [G^1] & [G^1_1] & -[H^1_1][0] \\ [0] & -[G^2_1] & -[H^2_1][G^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t^1\} \\ \{u_1\} \\ \{t^2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H^1][0] \\ [0] & [H^2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u^1\} \\ \{u^2\} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

식 (16) 또는 (17) 을 식 (2) 의 경계조건에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$[A] \{x\} = \{f\} \quad (18)$$

여기서 $\{x\}$ 는 미지의 표면력과 변위를 의미하고 $\{f\}$ 는 지정된 변위와 표면력 값들의 영향을 고려한 기지의 벡터이며, $[A]$ 는 $\{x\}$ 에 따라 $[H]$ 또는 $[G]$ 로 구성된 계수행렬이다. 그림 1 에서 대상영역의 전체 경계를 N 개의 절점으로 구성한 경우, 식 (18) 의 $[A]$ 는 $2N \times 2N$ 의 크기를 가지며 계방정식 (18) 의 해를 구함으로써 접합면의 표면력과 변위를 포함한 $2N$ 개의 미지값들을 구할 수 있다.

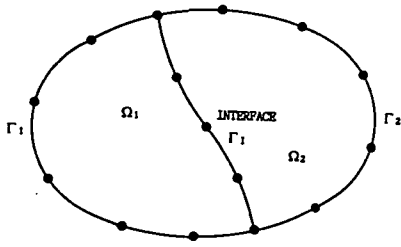


그림 1 영역의 분할

2.4 접합면의 처리

다중구조체를 선형경계요소로 모형화할 때, smooth 한 경계를 갖지 않는 곳에는 표면력 불연속조건 (traction discontinuity condition) 을 위해 동일한 좌표에 복절점 (double node) 을 사용해야만 한다^[4]. 즉, 이웃한 요소에서 각각 취해진 단위 수직벡터 (unit normal vector) 가 서로 이루는 각이 크면 요소와 요소가 만나는 절점에서 단위 수직벡터를 정의할 수 없으므로, 하중과 변위의 관계가 아닌 표면력과 변위의 관계로 구성되는 경계요소법에서는 이러한 경우 복절점이 사용되며 복절점을 이루는 두 절점은 동일한 변위를 갖는다. 특히, 이웃한 부영역에서 복절점이 사용된 모서리가 만나는 경우 다음과 같이 경계조건을 부여하여 해를 구한다.

그림 1 에서 Ω^1 에 속한 외부경계 Γ_1 과 Ω^2 에 속한 외부경계 Γ_2 와 접합면 Γ_1 가 동시에 만나는 부분을 복절점을 포함하여 나타내면 그림 2 와 같다. 설명을 위하여 두 부영역이 공유하는 접합면을 분리하였다. 그림 2 에서 n 번째 요소와 $n+1$ 번째 요소는 각각 Ω^1 에 속한 외부경계 Γ_1 과 Ω^1 에 속한 접합면 Γ_1 상에 있고,

$m+1$ 번째 요소와 m 번째 요소는 Ω^2 에 속한 외부경계 Γ_2 와 Ω^2 에 속한 접합면 Γ_1 상에 있다. Ω^1 에서 n 번째 요소의 2 번 절점과 $n+1$ 번째 요소의 1 번 절점은 동일한 좌표를 갖는 복절점이며 Ω^2 에서 $m+1$ 번째 요소의 1 번 절점과 m 번째 요소의 2 번 절점 또한 동일한 좌표를 갖는 복절점이다. 그림에서 외부경계에 작용하는 표면력 $t_i^{j,k}$ 는 j 번째 요소의 k 절점에 작용하는 극부좌표계의 i 방향 표면력성분을 의미한다. 그림 2 의 복절점에서 미지값은 외부경계에 작용하는 표면력 성분 4 개, 접합면에 작용하는 표면력 성분 4 개, Ω^1 의 복절점에서의 변위 성분 2 개, Ω^2 의 복절점에서의 변위 성분 2 개를 합하여 모두 12 개이다. 접합면에서 Ω^1 에 속한 $n+1$ 번째 요소의 1 번 절점과 Ω^2 에 속한 m 번째 요소의 2 번 절점에 대해 식 (12) 와 같이 적합조건과 평형조건을 적용하면 미지값은 4 개의 외부경계 표면력 성분, 2 개의 접합면 표면력 성분, 2 개의 변위 성분으로 각각 줄며 만약, 외부경계에 작용하는 표면력 성분 4 개 모두가 기지값이거나 3 개의 외부경계 표면력 성분과 1 개의 변위 성분이 기지값이라면 Hooke 의 법칙으로부터 주어지는 4 개의 연립방정식의 해를 구함으로써 나머지 4 개의 미지값들을 구할 수 있다^[6]. 그러므로 본 연구에서 층과 층사이의 접합면이 외부경계와 만나는 경우, 모서리에서 2 개의 복절점이 각각 1 개의 절점을 접합면 상에서 공유하므로 3 개의 절점이 사용되며 외부경계에 있는 2 개의 절점에 대해 경계조건을 적용하여 문제의 해를 구한다.

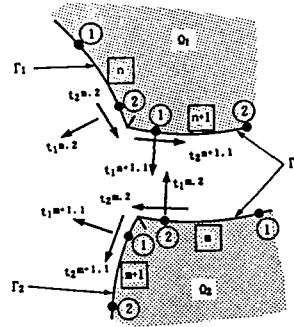


그림 2 접합면의 처리

3. 유한요소-경계요소의 조합

유한요소와 경계요소의 조합은 경계요소의 계방정식을 유한요소형 계방정식으로 변환시키는 유한요소형 접근 방법을 사용하며, 경계요소의 계방정식을 변환하는 방법으로는 최소위치에너지의 원리에 의한 에너지이론을 이용한다.

3.1 에너지이론에 의한 경계요소 계방정식의 변형

전체 대상영역을 유한요소영역과 경계요소영역으로 구성하면, 경계요소영역의 전체경계 Γ 는 유한요소영역과 접합면을 공유하는 경계 Γ_2 와 접합면을 제외한 경계 Γ_1 으로 구성된다. 경계요소 계방정식 (11) 을 Γ_1 과 Γ_2 에 따라 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [H_1][H_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_1][G_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t_1\} \\ \{t_2\} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

여기서 $\{u_1\}$ 과 $\{t_1\}$ 은 Γ_1 에서의 변위와 표면력을 의미하고 $\{u_2\}$ 와 $\{t_2\}$ 는 Γ_2 에서의 변위와 표면력을 나타낸다. Γ_1 에서 표면력 성분 $\{t_1\}$ 이 기지의 값이라

고 가정하고[7.8.9] 식 (19) 를 재구성하면 다음과 같다.

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (20)$$

$$[H_1][G_2] \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ -\{t_2\} \end{Bmatrix} = [G_1][H_2] \begin{Bmatrix} \{t_1\} \\ -\{u_2\} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

식 (21) 에서 좌변의 계수행렬의 역행렬을 양변에 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ -\{t_2\} \end{Bmatrix} = [H_1][G_2]^{-1} [G_1][H_2] \begin{Bmatrix} \{t_1\} \\ -\{u_2\} \end{Bmatrix} \\ = \begin{Bmatrix} [E_{11}][E_{12}] \\ [E_{21}][E_{22}] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{t_1\} \\ -\{u_2\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

따라서 접합면 상의 경계 Γ_2 에서의 미지의 표면력 성분 $\{t_2\}$ 는 식 (22) 로부터 다음과 같이 경계 Γ_2 에서의 미지의 변위 성분 $\{u_2\}$ 로 표현된다.

$$\{t_2\} = [E]_{22} \{u_2\} - [E]_{21} \{t_1\} \quad (23)$$

위의 경계요소영역과 유한요소영역이 만나는 접합면 상의 경계 Γ_2 에서는 적합조건과 평형조건이 만족되어야 한다. 적합조건은 두 영역이 접합면에서 동일한 절점과 자유도를 공유하고, 요소에서 동일한 형상함수를 사용함으로 만족될 수 있으며, 평형조건은 접합면에서의 전체위치에너지 (total potential energy) 를 최소화함으로 만족시킬 수 있다. 즉, 접합면에서의 전체위치 에너지를 Π_p 라고 하면 다음과 같다.

$$\delta \Pi_p = \delta \Pi_{BE} + \delta \Pi_{FE} = 0 \quad (24)$$

식 (24) 가 성립하기 위해서는 각 항이 0 이어야 하므로

$$\delta \Pi_{BE} = \frac{\partial \Pi_{BE}}{\partial \{u_2\}} \delta \{u_2\} = 0 \quad (25)$$

의 조건을 만족해야 한다.

경계요소영역에서의 전체위치에너지 Π_{BE} 는 물체력을 무시하고 식 (20) 의 조건을 고려하면 다음과 같이 표현된다.

$$\Pi_{BE} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{t}_i u_i d\Gamma \quad (26)$$

윗 식에서 변형에너지항의 영역적분을 경계적분화하고 형상함수를 이용하여 행렬형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\Pi_{BE} = \frac{1}{2} \{u\}^T [N] \{t\} - \{u\}^T [F] \quad (27)$$

여기서 $\{u\}$ 와 $\{t\}$ 는 절점에서의 변위와 표면력이며 $[N]$ 은 형상함수의 적분으로 얻어진다.

접합면 상의 경계 Γ_2 에서 평형조건을 만족시키기 위해 식 (27) 에 식 (23) 을 대입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi_{BE} = \frac{1}{2} \{u\}^T [N'] \left\{ [E]_{22} \{u_2\} - [E]_{21} \{t_1\} \right\} \quad (28)$$

여기서 $[N']$ 은 접합면 상의 경계 Γ_2 에 있는 절점만을 포함한다.

이제 Π_{BE} 의 변분을 취하고 식 (25) 를 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{2} \left\{ [N'] [E]_{22} + [E]_{22}^T [N']^T \right\} \{u_2\} - [N'] [E]_{21} \{t_1\} = 0 \quad (29)$$

따라서 식 (29) 는 다음과 같이 유한요소의 증분형태로 쓸 수 있다.

$$[K]_{BE} \{du\}_{BE} = \{dF\}_{BE} \quad (30)$$

여기서 $[K]_{BE}$ 는 대칭행렬이며 다음과 같다.

$$[K]_{BE} = \frac{1}{2} \left\{ [N'] [E]_{22} + [E]_{22}^T [N']^T \right\} \quad (31)$$

그리고 $\{dF\}_{BE}$ 는 다음과 같다.

$$\{dF\}_{BE} = [N'] [E]_{21} \{t_1\} \quad (32)$$

경계요소의 계방정식은 하중-변위의 관계를 갖게 되었으므로, 경계요소의 강성도행렬, 하중벡터를 유한요소와 경계요소의 접합부분에서 공유하는 절점에 대하여 탄소성 유한요소에 대한 강성도행렬, 하중벡터와 각각 조합하면, 유한요소 형태의 전체 강성도행렬과 하중벡터를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$([K^*]_{FE} + [K]_{BE}) (\{du\}_{FE} + \{du\}_{BE}) = \{dF\}_{FE} + \{dF\}_{BE} \quad (33)$$

이로부터 전체 강성도행렬과 전체 하중의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$[K]_G \{du\}_G = \{dF\}_G \quad (34)$$

여기서 $[K]_G$ 는 조합된 전체 강성도행렬, $\{du\}_G$ 는 조합된 전체 변위의 증분, $\{dF\}_G$ 는 조합된 전체 외부하중의 증분을 나타낸다. 조합된 전체 강성도행렬과 조합된 전체 외부하중의 증분 및 변위의 증분을 이용하여 비선형 유한요소해석 알고리즘에 따라 조합해석을 실시한다.

3.2 다중경계요소영역의 강성행렬 증점

다중구조계의 한 예로서 그림 3 과 같이 반무한 평면에 있는 2 개 층의 구조계를 생각한다. 원공의 중심으로부터 지표까지의 높이를 $ref1$, 지표로부터 첫번째층의 두께를 h 라고 하고 첫번째층과 두번째층의 접합면을 가상의 지표로 보면 원공의 중심으로부터 가상의 지표까지의 높이 $ref2$ 는 다음과 같다.

$$ref2 = ref1 - h \quad (35)$$

$Ref1$ 에 대한 반무한 기본해[10]에 단위탄성계수를 대입하여 구한 경계요소 계방정식으로부터 단위강성행렬 $[K]_1$ 을 구한다. 반무한 영역의 조합해석시 일반적으로 경계요소영역의 모든 경계는 유한요소영역의 경계와 접합면 상의 경계 Γ_2 를 공유한다. 따라서 Γ_1 은

존재하지 않으므로 식 (21) 은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[G_2] \{t_2\} = [H_2] \{u_2\} \quad (36)$$

식 (36) 을 $\{t_2\}$ 에 대한 식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\{t_2\} = [G_2]^{-1} [H_2] \{u_2\} = [C] \{u_2\} \quad (37)$$

식 (37) 을 식 (27) 에 대입하고 변분을 취한 뒤에, 식 (25) 를 적용하여 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{2} \left([N']^T [C] + [C]^T [N']^T \right) \{u_2\} - \{F\} = 0 \quad (38)$$

따라서 식 (38) 은 유한요소의 형태로 쓸 수 있으며 단위강성행렬 $[K]_1$ 은 다음과 같다.

$$[K]_1 = \frac{1}{2} \left([N']^T [C] + [C]^T [N']^T \right) \quad (39)$$

여기서 $[C]$ 는 ref1 에 대한 반무한 기본해에 단위탄성계수를 대입하여 구한 경계요소 계방정식으로부터 산정한 계수행렬로 구성된다. 마찬가지로 ref2 에 대한 반무한 기본해에 단위탄성계수를 대입하여 구한 경계요소 계방정식으로부터 위의 방법에 따라 단위강성행렬 $[K]_2$ 를 구한다.

첫번째층과 두번째층의 탄성계수를 각각 E_1 과 E_2 라고 하면 경계요소영역의 전체 강성행렬 $[K]_{BE}$ 는 다음과 같이 중첩의 원리에 의해 구할 수 있다.

$$[K]_{BE} = ([K]_1 - [K]_2) E_1 + [K]_2 E_2 \quad (40)$$

식 (40) 에서 구한 경계요소영역의 강성행렬을 유한요소영역의 강성행렬과 조합하여 전체 강성행렬을 구성한다. 식 (34) 의 조합된 전체 강성도행렬과 조합된 전체 외부하중의 증분 및 변위의 증분을 이용하여 비선형 유한요소해석 알고리즘에 따라 조합해석을 실시한다. 단, 이 때 각 층의 포아손 비는 균일하다고 보며 경계요소영역의 표면력과 변위는 선형관계에 있다고 가정한다. 이 방법은 층의 수에 제한이 없으며 반무한 기본해인 Melan 해를 이용하는 외부영역문제이므로 층과 층 사이의 접합면을 이산화할 필요가 없고 입력자료의 양이 적어 해석의 수행이 신속한 장점이 있다.

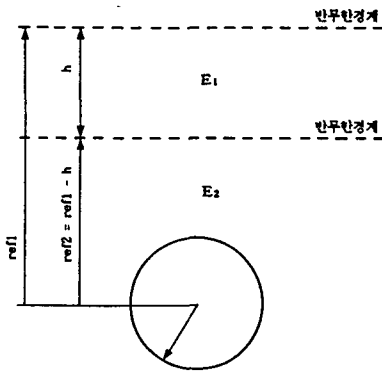


그림 3 반무한영역의 중첩

4. 수치해석 및 검증

선형해석의 경우, 내부영역문제의 다층구조를 부영역에 의한 경계요소법으로 해석하고 선형 유한요소해석결과와 비교하였다. 검증된 부영역에 의한 경계요소프로그램을 내부영역문제의 다층구조에 대해 조합해석을 실시하는 경우와 반무한영역문제의 다층구조에 대해 강성행렬의 중첩을 이용하여 조합해석을 실시하는 경우로 나누어 각각 비선형해석을 실시하고 비선형 유한요소해석결과와 비교하였다.

4.1 부영역에 의한 경계요소법의 검증

해석모형은 깊이 40 m 에 지름 10 m 의 원공이 있는 평면변형률 상태의 2 층 구조이다. 하중조건은 원공에 30 MPa 의 내압을 받는 경우이며, 물체력의 영향은 무시하였다. 물성은 표 1 과 같다.

표 1 해석대상의 물성 (2 층)

층	탄성계수 (MPa)	포아손 비	항복응력 (MPa)	변형률경화 계수 (MPa)	내부마찰 각 (°)
①	1,000	0.20	10.0*	10,000*	10.0*
②	2,000	0.20	10.0*	10,000*	10.0*

(*: 조합해석시)

그림 4 는 121 개의 요소와, 149 개의 절점을 사용한 유한요소해석모형을 도시했으며, 그림 5 는 46 개의 선형요소와 복절점을 포함하여 52 개의 절점을 사용한 경계요소해석모형을 도시하였다. 해석결과, 그림 6 과 그림 7 에 원공의 수평방향변위와 수직방향변위를 각각 도시하였다. 경계요소법에 의한 결과와 유한요소법에 의한 결과 사이의 차이는 경계요소영역의 접합면에서 하중이 집중되는 증압부에 더 조밀하게 요소망을 구성함으로써 줄일 수 있을 것이라고 판단된다.

4.2 유한요소-경계요소 조합해석에 대한 검증

조합해석의 검증을 위해 지표로부터 40 m 의 깊이에 지름이 10 m 이고 30 MPa 의 내압을 받는 평면변형률 상태의 원공에 대하여 탄소성 해석을 실시하였다. 해석모형의 지반은 2 개 층으로 구성하였고 물성은 표 1 과 같다. 조합해석은 비선형 유한요소를 부영역에 의한 내부영역문제의 경계요소와 조합하는 경우 1 과 반무한영역에 대한 경계요소와 조합하는 경우 2 로 나누어 실시하였으며, 항복조건은 Mohr-Coulomb 파괴조건을 사용하였다. 비선형 유한요소해석모형은 그림 4 와 같고, 그림 8 에 경계요소영역에 46 개의 요소와 복절점을 포함하여 52 개의 절점, 유한요소영역에 48 개의 요소와 72 개의 절점을 사용한 경우 1의 조합해석모형을 도시하였으며, 그림 9 에는 경계요소영역에 24 개의 요소와 24 개의 절점, 유한요소영역에 48 개의 요소와 72 개의 절점을 사용한 경우 2의 조합해석모형을 도시하였다. 유한요소해석에서 요소망의 범위는 반무한영역을 충분히 고려하기 위하여 지표로부터 수직으로 300 m, 수평방향으로 200 m 로 하였다. 조합해석 및 유한요소해석을 수행한 결과, 원공에서의 절점변위를 수평방향과 수직방향으로 나누어 각각 그림 10 과 그림 11 에 도시하였다. 경우 1 의 해석결과와 유한요소의 해석결과와 큰 차이를 보였다. 이는 조합해석시 경계요소영역의 지지조건을 고려하지 못한 점과 복절점 사용의 영향, 그리고 역행렬의 연산에서 생기는 수치오차의 누적 때문인 것으로 판단된다. 경우 2 의 해석결과, 원공천

단부의 수직변위는 유한요소해석결과와 잘 일치하나 원공저면으로 갈수록 차이가 나타났다. 이는 조합해석시 첫번째 층에 대해 구한 강성행렬에서 두번째 층의 영향을 제거할 때, 완전히 제거되지 않고 잔류하는 강성이 중첩됨으로 인해 원공저면의 강성이 실제보다 크게 산정된 것으로 판단된다. 지표로부터 원공의 중심까지의 거리가 짧고 첫번째 층의 두께가 크지 않은 문제에 적용하면 잔류하는 강성의 영향이 감소할 것으로 예측된다. 그림 12 에는 원공중심으로부터 수평거리 및 수직 거리에 따른 최대 및 최소주응력을 유한요소해석결과와 비교하여 나타냈으며 이로부터 반무한영역에 중첩의 원리를 적용한 경우 2 의 조합방법이 내부영역문제의 조합방법보다 효율적임을 알 수 있었다.

5. 결론

부영역으로 층을 이산화한 내부영역문제의 경계요소 해석결과는 유한요소법에 의한 결과와 비교하여 좋은 결과를 나타냈다. 그러나 조합해석에 적용할 경우 인위적인 경계의 설정으로 인하여 경계요소의 장점을 살리지 못하는 단점이 있으며, 경계요소영역의 자유지지 조건으로 인하여 조합해석의 오차가 커짐을 알 수 있었다. 반무한영역에 대해 중첩의 원리를 적용한 조합해석을 실시한 결과, 원공저면부에서 잔류하는 강성의 누적으로 인한 오차를 제외하면 유한요소해석의 결과와 잘 일치하는 변위와 응력을 얻을 수 있었다. 따라서 굴착부 주변의 응력집중부에는 비선형유한요소를 사용하고, 비선형의 영향이 미소한 주변의 다층지반에 대해서는 반무한기본해로 구성한 강성행렬에 중첩의 원리를 적용한 조합해석방법이 타 방법에 비해 상대적으로 효율적이고 합리적임을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

1. 황학주, 김문겸, 임윤목, "유한요소와 경계요소의

조합에 의한 반무한영역 문제의 비선형해석", 한국 전산구조공학회지, 제 2 권, 제 1 호, 1988, pp.55-64.

2. 황학주, 김문겸, 허택녕, 나경웅, "물체력이 작용되는 반무한영역 문제의 비선형유한요소-경계요소 조합해석", 대한토목학회논문집, 제 11권, 제 1 호, 1991, pp.45-53.
3. Beskos, D.E., "Introduction to Boundary Element Methods", Boundary Element Methods in Mechanics, 1987, pp.12-14.
4. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, 1984, pp.79-81.
5. Brebbia, C.A. and Walker, S., Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, 1980, pp.102-111.
6. Rudolphi, T.J., "An Implementation of the Boundary Element Method for Zoned Media with Stress Discontinuities", Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 19, 1983, pp.1-15.
7. Beer, G. and Meek, J.L., "The Coupling of Finite Element Methods for Infinite Domain Problems in Elasto - Plasticity", Boundary Element Method, Springer-Verlag, 1981, pp.575-591.
8. Beer, G., "Implementation of Combined Boundary Element - Finite Element Analysis with Applications in Geomechanics", Developments in Boundary Element Methods, vol. 4, Elsevier, 1986, pp.191-225.
9. Beer, G. and Meek, J.L., "Applications in Mining", Topics in Boundary Element Research, vol. 1, Springer-Verlag, 1984, pp.170-203.
10. Telles, J.C.F. and Brebbia, C.A., "Boundary Element Solution for Half-plane Problems", Int. J. Solids Structures, vol. 17, 1981, pp.1149-1158.

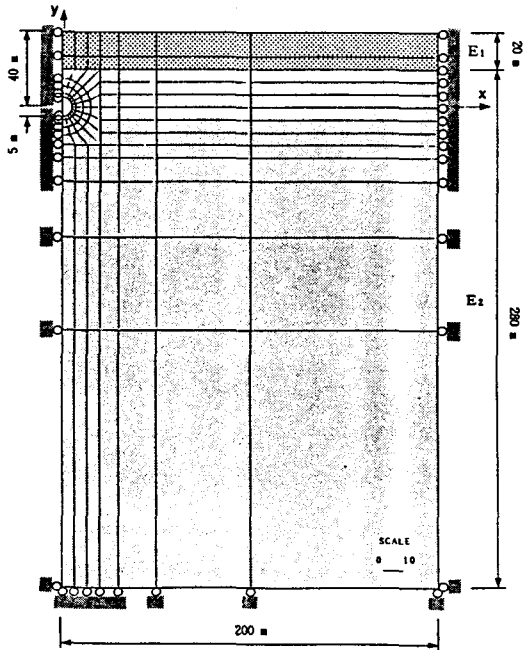


그림 4 유한요소해석모형

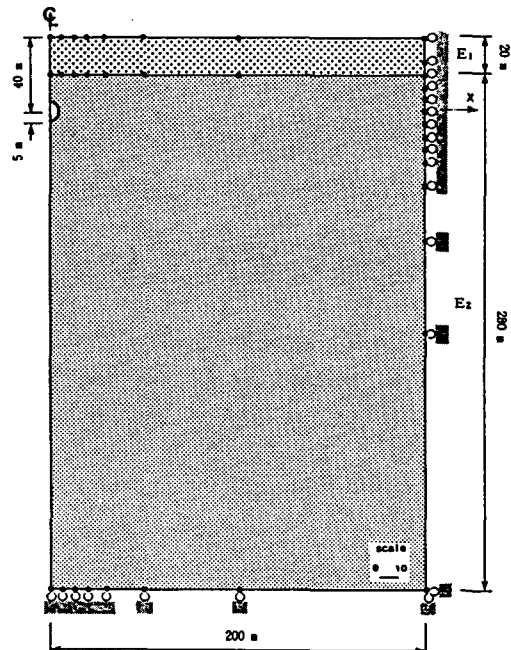


그림 5 내부영역문제의 경계요소해석모형

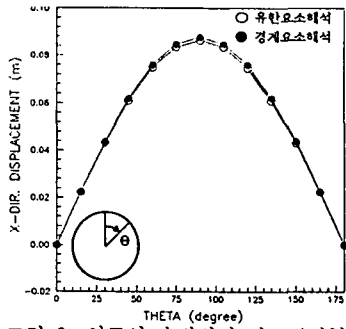


그림 6 원공의 수평변위 비교 (선형해석)

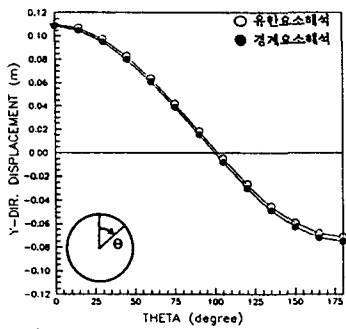


그림 7 원공의 수직변위 비교 (선형해석)

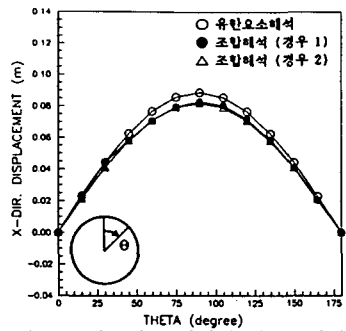


그림 10 원공의 수평변위 비교 (비선형해석)

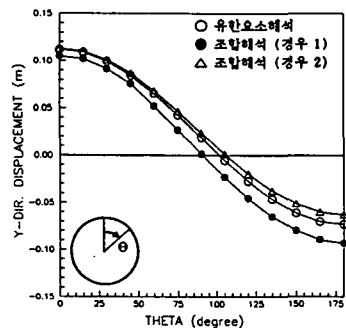


그림 11 원공의 수직변위 비교 (비선형해석)

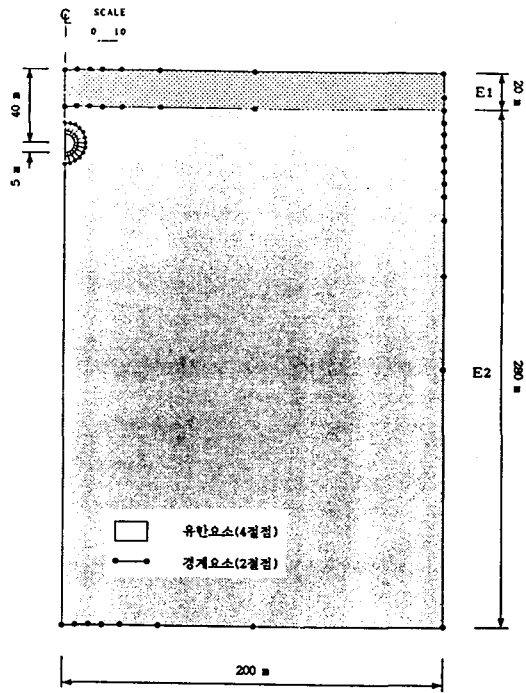


그림 8 내부영역문제의 조합해석모형

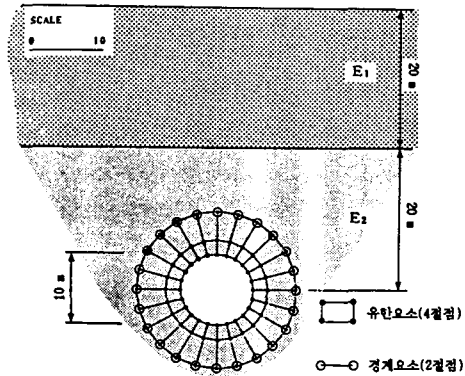
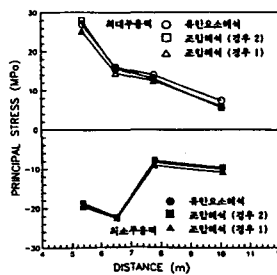
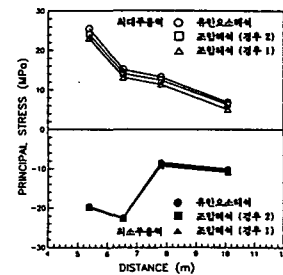


그림 9 반무한영역문제의 조합해석모형



(a) 수평거리에 따른 주응력의 비교



(b) 수직거리(하향)에 따른 주응력의 비교

그림 12 원공주위 주응력의 비교