복합재료내의 탄성파 전파의 해석에 의한 탄성계수와 감쇠계수의 예측

김 진연°, 이 정권

한국과학기술원 기계공학과

Prediction of Elastic Constants and Attenuation Coefficients by the Analysis of Elastic Wave Propagation in Composite Material.

J. Y. Kim, J. G. Ih

Korea Advanced Institute of Science and Technology, Dept. of Mechanical Engr.

요 약

섬유강화 복합재료의 동탄성계수와 감쇠특성을 규명하기 위하여 랜덤하게 분포된 무한 실린더 형상의 산란체를 가진 매질내에서, 조화운동을 하는 압축 및 SV 탄성파의 전파에 관하여 연구하였다. 단일 실린더에 대한 산란계수로부터 Lax의 준결정근사법을 이용하여 다중산란에 관한 이론을 유도하였고, 매질내에서의 파동전파 특성을 내포하는 분산관계식을 얻었다. 수치적으로 분산관계식의 해를 구함으로써 2 차원 유효체적강성, 횡방향 유효전단강성 및 각 파동의 전파에 따른 감쇠계수를 주파수와 체적비의 함수로서 제시하였다.

I. 서 론

재료가 복합재료와 같이 discrete random 매질의 경우에는 산란이론을 통하여 물성을 파악한다.[2-3,5]

본 논문에서는 압축 및 SV 탄성파가 원형 실린더에 입사되는 경우를 고려하기로 한다. 따라서 얻을 수 있는 물성은 이차원 체적강성, 횡전단강성 및 각파동의 감쇠계수들이다.섬유가 불규칙으로 분포하여 횡등방성의 복합재료를 이룬다고 가정한다.

II. 이 론

2.1 다중산란

무한매질과 반경이 a인 원형단면의 실린더의 라메 상수와 밀도를 각각 λ, μ, ρ 및 λ', μ', ρ' 하고, N개의 무한 실린더는 서로 평행하며, 랜덤하게 분포한다고 가정한다. Fig. 1과 같이, (R_j, θ_j)는 j-번째 실린더에 고정된 극좌표를, (r_i, ϕ_i)는 기준좌표계에서의 i-번째 실린더 중심의 위치를, (r_{ij}, θ_{ij})는 두 실린더의 상대적 거리와 각도를 각각 나타낸다.

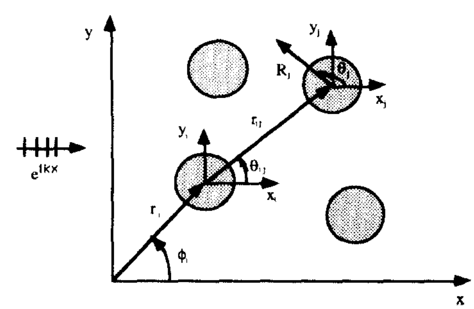

Fig. 1. Coordinate systems associated with multiple scattering.

수직 입사파와 N개의 실린더에 의한 산란파를 j-번째 실린더에 고정된 좌표계에서 기술하면, 포텐샬들은

$$\Phi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\, A_{jm}H_m(k_L R_j) + J_m(k_L R_j)\alpha_{jm} \,]\, e^{im\theta_j} \quad (1.1)$$

$$\Psi_z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\, B_{jm}H_m(k_T R_j) + J_m(k_T R_j)\beta_{jm} \,]\, e^{im\theta_j} \quad (1.2)$$

그리고

$$\alpha_{jm} = i^m e^{ik_L x_j} + \sum_{i=1}^{N}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{in}H_{n-m}(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}}$$

$$\beta_{jm} = i^m e^{ik_T x_j} + \sum_{i=1}^{N}{}' \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{in} H_{n-m}(k_T r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}}$$

로 된다. 여기서 $k_L = \omega/c_L$, $k_T = \omega/c_T$, $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$, A_m, B_{in}은 i-번째 실린더의 n 차 파동함수의 계수, $\sum_{i=1}^{N}{}'$ 는 j-번째 실린더를 제외한 합을 의미한다. 실린더의 표면에서의 경계조건에 의하면

$$\begin{Bmatrix} A_{jm} \\ B_{jm} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_m^{LL} & T_m^{LS} \\ T_m^{SL} & T_m^{SS} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{jm} \\ \beta_{jm} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

를 얻게 된다. 식 (2)에서 $\mathbf{T}_m$ 은 산란연산자 행렬이다.

2.2 통계적 평균파동

산란체의 분포가 랜덤할 경우에는, 다음과 같이 산란체의 분포에 대한 조건부확률을 이용하여, 다중산란 계수의 앙상블 평균을 얻는다[1].

i-번째 산란체의 중심의 위치벡터를 r_i 라 하고, 모든 산란체를 포함하는 면적 S 가 무한하다면, 하나의 실린더가 면적내에 있을 확률밀도와 r_i에 하나가 존재하고 r_j에 다른 하나가 존재할 조건부 확률밀도는

$$p(r_i) = \frac{1}{S} \qquad r_i \in S \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} p(r_i|r_j) &= \frac{g(r_{ij}/2a)}{S} & r_{ij} > 2a, \qquad (4) \\ &= 0 & r_{ij} < 2a \end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서 g(x)는 통계역학에서의 radial distribution function 이다. 식 (4)에 의하여 한 개의 산란체가 고정되었을 때의 다중산란계수의 기대값이

$$\begin{Bmatrix} \langle A_{jm} \rangle_j \\ \langle B_{jm} \rangle_j \end{Bmatrix} = T_m \begin{Bmatrix} i^m e^{ik_L x_j} + \frac{N-1}{S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|r_{ij}| \geq 2a} \langle A_{in} \rangle_{ij} H_{n-m}(k_L r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a)\, dr_i \\ i^m e^{ik_T x_j} + \frac{N-1}{S} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|r_{ij}| \geq 2a} \langle B_{in} \rangle_{ij} H_{n-m}(k_T r_{ij}) e^{i(n-m)\theta_{ij}} g(r_{ij}/2a)\, dr_i \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

이 되는데, 이와같이 하면 실제로는 무한개의 조건부 기대값을 알아야 한다. 이러한 무한구조 (infinite hierarchy) 를 간단화하기 위하여 Lax[1]는 다음과 같이 준결정근사법을 제안하였다. 즉,

$$\langle A_{in} \rangle_{ij} \equiv \langle A_{in} \rangle_i, \ \langle B_{in} \rangle_{ij} \equiv \langle B_{in} \rangle_i \qquad (6)$$

2.3 분산관계식

이제 평균파동을 입사파와 같은 방향으로 진행하는 평면파로 가정하면,

$$\begin{aligned} \langle A_{jm} \rangle_j &= i^m X_m \exp[iK^L(\omega) x_j], \\ \langle B_{jm} \rangle_j &= i^m Y_m \exp[iK^{SV}(\omega) x_j] \end{aligned} \qquad (7)$$

이고, $K = (K_1 + iK_2)$는 평균파동의 복소파수를 나타낸다. 식 (7)를 식 (5)에 대입하면 다음과 같은 선형 제차 연립방정식을 얻을 수 있다. 즉.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta_{mn} - 8cT_m^{LL} F_{n-m} \right] X_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[8cT_m^{LS} G_{n-m} \right] Y_n \qquad (8.1)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\delta_{mn} - 8cT_m^{SS} G_{n-m} \right] Y_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[8cT_m^{SL} F_{n-m} \right] X_n \qquad (8.2)$$

여기서,

$$F_n = \frac{[(2k_L a) J_n(2Ka) H_n'(2k_L a) - (2Ka) J_n'(2Ka) H_n(2k_L a)}{(2k_L a)^2 - (2Ka)^2} + \int_1^{\infty} [g(x) - 1] H_n(2k_L ax) J_n(2K ax) x dx \qquad (9)$$

이다. G_n 은 식 (9)에서 k_L 대신 k_T 를 대입하면 된다. 식 (8)의 의미있는 해는 계수행렬의 determinant가 영이 될 때이므로 고유치 문제로 귀결된다.

III. 수치계산의 결과 및 고찰

계산의 예로 채용된 복합재료의 물성은 Table 1 과 같다. Fig. 2 에서는 무차원화 된 비감쇠계수 (specific attenuation coefficient ; $4\pi(K_2/K_1)$) 의 변화를 주파수와 체적비의 함수로 제시하였다. 복합재료를 구성하는 재료자체에 특정한 감쇠기구가 존재하지 않더라도, 발생되는 다중산란에 의 하여 상당한 감쇠효과를 나타내고 있음을 보여주고 있다. 체적비가 약 50% 까지는 일정 주파수에서 체적비가 증가함에 따라 감쇠량은 증가함을 보여주고 있으나, 체적비가 50% 이상에서는 체적비가 증가함에 따라 오히려 감소하는 경향이 있다. 이는 산란에 의한 감쇠효과가 재료의 비균질성에 비례한다고 볼 수 있는데, 50% 이상에서는 기지와 비균질재료 (보강재) 를 서로 바꾸어 생각하면 50% 이하의 비균질성으로 볼 수 있으므로, 체적비가 50% 이상에서 오히려 감쇠효과가 감소하게 된다. 즉 이 현상은 높은 체적비에서 쌍분포함수를 포함시킴으로써 나타나는 결과이다.

에서의 값을 비교하였는데, 두 결과가 정확하게 일치함을 볼 수가 있다.

VI. 결 론

본 연구에서는 다중산란을 해석함으로써, 복합재료의 유효전단강성, 감쇠특성 등을 기지에 대한 섬유의 체적비와 주파수의 함수로 표현하였다.

얻어진 결과로 부터 다음과 같은 결론을 내릴수 있다 : 첫째, 주파수의 변화에는 비교적 둔감하다. 둘째, 체적비가 높은 범위에서는 산란파들의 간섭에 의한 공명효과에 의하여 전파속도비의 크기 변화가 많아진다. 셋째, 저주파수에서의 (ka < 1) 감쇠는 체적비가 커질수록 커진다. 넷째, 고주파수에서 체적비가 50% 이내에서는 비감쇠계수가 체적비가 증가함에 따라 증가하나, 50% 이상에서는 체적비가의 증가에 따라 오히려 감소하는 경향을 보인

Table 1. Material Properties Comprising Boron/Aluminium Composites

Material	Density(kg/m^3)	Lame Constants(GPa)		Wave Speed(m/sec)	
		λ	μ	c_L	c_T
Aluminium	2720	68.6	38.7	7526	3772
Boron	2530	166.7	250	16233	9940

Fig. 3 에서는 평면변형율 체적강성비(plane strain bulk modulus ratio;$<\lambda+\mu>/(\lambda+\mu)$)를 보여주고 있다. Table 1 에서 볼 수 있듯이 섬유의 강성이 기지보다 상대적으로 크므로, 체적비가 높아짐에 따라 강성이 커짐을 볼 수 있다. 약 40% 이상의 체적비에서는 오르내림이 많아지는데, 이는 실린더 간의 거리가 가까와짐으로 인한 산란파들의 공명효과에 의한 것이다. Kinra[5]등은 입자 복합재료 (particulate composite) 에 대한 실험을 통하여 이와 같은 현상을 관찰한 바 있다.

Fig. 4 에서는 횡방향 유효전단강성비(transverse effective shear modulus ratio;$<\mu>/\mu$)를 보여주고 있다. Fig. 5. 에서는 Hashin 등[4]이 구한 정적하중 상태에서의 평면 변형율 체적강성, 횡방향 전단강성 등의 하계(lower bound)와 본 논문에서 얻은 유효 강성의 Rayleigh 극한(저주파 극한)

다. 여섯째, 고주파수에서와 높은 체적비에서는 실린더간의 쌍분포함수가 복합재료의 감쇠효과에 매우 큰 영향을 준다.

참 고 문 헌

1. M. Lax,1952, "Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense system, " Phys. Rev. 85, 621-629.

2. S.K. Bose and A.K. Mal,1974, "Elastic waves fiber-reinforced composite, "J.Mech.Phys.Solids 22,217-229.

3. V.K. Varadan, Y. Ma, and V.V. Varadan, 1986, "Multiple scattering of compressional and shear waves by fiber-reinforced composite materials, "J. Acoust. Soc. Am. 80, 333-339.

4. Z. Hashin and B.W. Rosen, 1964,"The elastic moduli of fiber-reinforced materials, "J. Appl. Mech. 31,223-232.

5. V.K. Kinra and A. Anand,1982,"Wave propagation in a random

particulate composite at long and short wavelength," Int. J. Solids Structures 18,367-380.

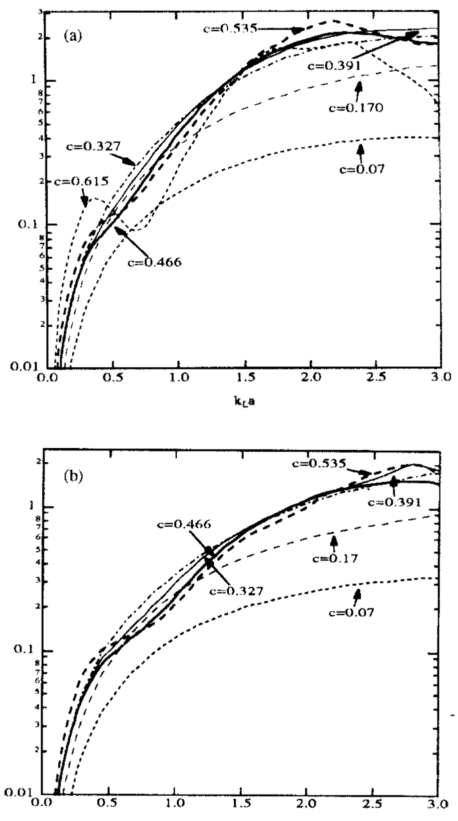

Fig. 2. Specific attenuation coefficient vs. frequency varying the volume fraction ,c . (a) L wave, (b) SV wave.

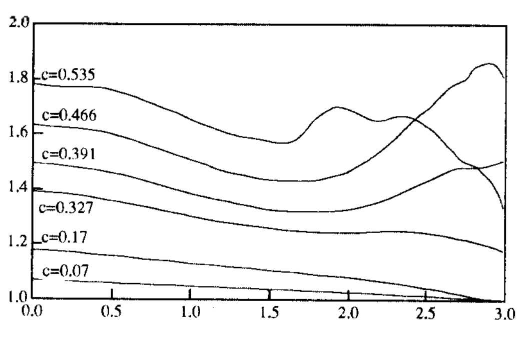

Fig. 3. Effective two-dimensional-bulk modulus vs. frequency varying the volume fraction, c.

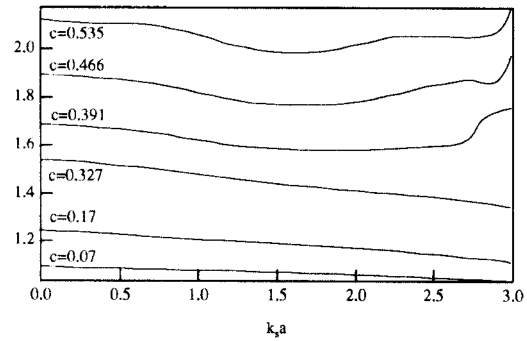

Fig. 4. Effective transverse shear modulus vs. frequency varying the volume fraction,c

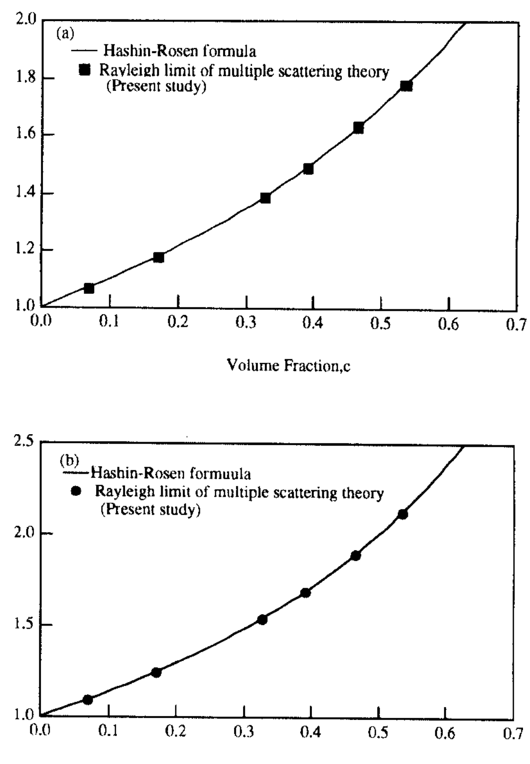

Fig. 5. Effective elastic moduli at low frequency limit.
(a) Two-dimensional-bulk modulus., (b) transverse shear modulus.