

베인 선단부의 탄성 유체 윤활

정석훈* (전북대 대학원)

정제연 (전북대학교)

1. 서론

탄성 유체 윤활은 윤활 표면의 탄성변형이 중요하게 다뤄지는 윤활의 형태로, 주로 로울러 베어링이나 기어와 같이 선접촉 집중하중을 받는 기계요소와 관련이 많다고 할 수 있다. 역사적으로 볼때 탄성 유체 윤활은 20 세기에 들어서 윤활 분야에서 획기적인 발전을 해온 것 중의 하나라고 볼 수있으며, 윤활상태의 폭넓은 해석 뿐만아니라 전에는 고려하지 못했던 큰하중을 받는 기계요소들에 대한 윤활상태를 규명하는데 지대한 역할을 할수 있음을 시사하고 있다. 한편 오래전 부터 실험적으로 탄성유체윤활 상태가 짐작되어 왔으나 그 정확한 규명을 하기에는 여러가지 어려운 점들이 산적해 있었다. 탄성유체윤활을 해석함에 있어서 우선 고전적인 Reynolds 윤활 방정식에 윤활계의 유성특성인 고압하에서의 점성의 압력 의존성이 대단히 큰 피에조 점성효과를 고려하지 않으면 안된다. 나아가 등점도 조건하에서 재료의 탄성 변형을 함께 고려하여 연립 방정식의 형태로 구성해서 피에조 효과에서 발생하는 강한 비선형성을 갖는 대수 방정식의 해를 구하는 방안을 강구해야 한다. 윤활계의 점성-압력 특성에 대하여는 고압 물리학자인 Barus⁽¹⁾ 가 1893년에, 액체의 점도는 압력이 증대됨에 따라 증가한다(피에조 점성효과) 고 발표 하였으며, 그후 이에 관련된 많은 실험을 정리한 결과에 대해 Bridgman⁽²⁾ (1926), Hersey 와 Shore⁽³⁾ (1928) 등이 발표 하였다. 윤활에 있어서 탄성변형량을 계산하여 유막두께를 평가 하기 시작한 것은 Peppeler⁽⁴⁾ (1938), Ertel⁽⁵⁾ (1939), Meldahl⁽⁶⁾ (1941) 등 이었으며, 이의 결과 강제로 가정했던 Martin 의 해석결과는 유막 계산에 있어 과소평가 되었다는 사실이 밝혀졌다. 그러나 이경우 역시 유막두께가 표면 거칠기 정도보다 적게되어 아직 충분한 밀반침이 될 수 없었다. 이후 근사이론 이긴 하였으나 Reynolds의 고전 윤활이론에 탄성변형과 점도-압력관계를 동시에 고려한 해석에 최초로 성공한 것은 Russia사람 Grubin⁽⁷⁾ 의 논문(1949) 이었다. 이경우 Martin 이 해석한 유막 두께 보다도 약 50-100 배 정도가 큰 것이었으며 이로써 집중하중을 받는 점, 선접촉 하에서의 유체윤활이 가능하다는 것을 이론적으로 뒷받침 하게 되었다. EHL의 정밀한 해를 얻기 위해서는 Reynolds방정식, 탄성 방정식 및 점성-압력의 관계식을 연립시켜 풀어야하는 데, 유막의 발생압력은 간극에 대하여 강한 비선형의 관계로 되어 그리 간단하지가 않다. 특히 유막압력이 높게되는 조건에서는 유막

두께에 비하여 탄성변형량이 대단히 크게되며, 나아가 점도와 압력의 관계도 비선형성이 강해지기 때문에 반복계산을 수렴시키는 데 곤란하다. Petrusевич⁽⁸⁾ (1951)는 탄성변형과 압력에 의한 점도변화를 고려한 수치해석에서 발생압력중 Hertz 영역 끝부분에 압력 스파이크가 발생하는 것을 처음으로 발표하였으며, Weber 와 Saalfeld⁽⁹⁾ (1954)가 해석적으로 해를 얻었는데 탄성변형이 극히 작은 경우에 한정되었다. 이후 Dowson 과 Higginson⁽¹⁰⁾ (1959)은 Reynolds방정식에 점성-압력 관계식과 탄성변형식을 연립시키고 Hertz의 압력분포를 초기치로 주어 유막형상을 결정하는 방법을 이용하여 계산상 수렴성을 확보하는데 성공했다. 이것들은 Crook⁽¹¹⁾ (1958)이 정전용량법을 이용하여 실험적으로 측정된 값과 거의 일치함을 보여줬다. 이후 점접촉 및 선접촉등에 대한 EHL계산을 Archard, Cowking, Cheng 등이 계속하여 많은 보고를 해왔다. 그러나 Fig.1⁽¹⁶⁾에서 보인바와 같이 빗금친 부분의 일부 한정된 영역에 대하여 수치해가 얻어졌으며 아직도 EHL의 많은 영역이 희박, 내삽에 의

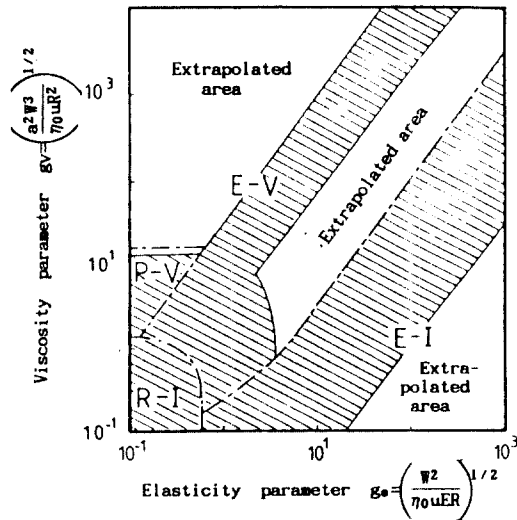


Fig.1 Johnson Chart에 의한 탄성유체윤활의 영역

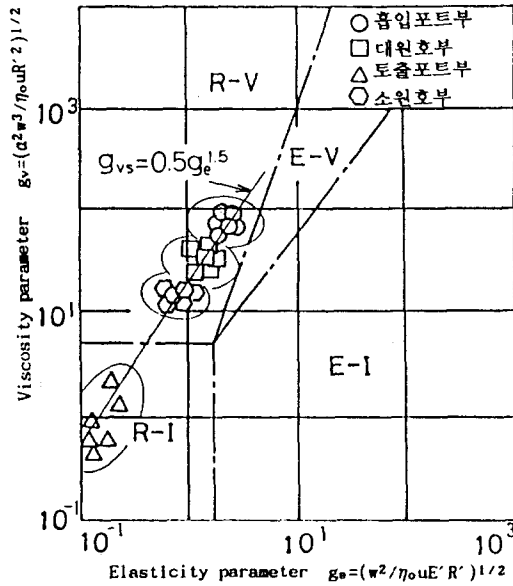


Fig. 2 베인펌프의 각 구간별 윤활모드
(인트라 베인식의 경우)

하여 추정되고 있는 실정이다. 본 연구에서 다루고자 하는 유압베인 펌프의 베인 선단에서 윤활영역의 탄성 파라미터값이 적고 점성 파라미터값이 비교적 큰 soft EHL 영역에 있어(Fig. 2⁽¹⁷⁾) 아직 계산이 거의 이루어 지지 않고 있는 탄성유체윤활 영역이라고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 이부근에서의 수치해를 통하여 윤활 특성을 해석하고자 한다. 탄성유체윤활 상태를 규명하는 데 경계값을 근거로한 수치적인 근사해를 구하는 방식의 수치적 해석이 이루어져 왔던 것이다. 탄성유체 윤활에 있어서 수치적인 해석 방법으로 일반적으로 널리 쓰여온 방법중 하나인 Inverse Method 는 Dowson 과 Higginson⁽¹⁰⁾ 에 의해 처음 사용 되었으며, 그후 Evans 와 Snidle⁽¹²⁾ 이 고하중시의 점접촉 윤활문제에 적용하였는 데, 그것은 Reynolds 방정식과 탄성 방정식의 각각에서 구한 유막의 차이값으로 수렴판정이 이루어지기 때문에 유막으로부터 구하는 압력에는 상당한 수정이 불가피하다는 단점이 있었다. 한편 Direct Method는 발생압력을 Reynolds 방정식을 풀어 직접 구하는 방식으로 Hamrock 과 Dowson 에 의해 처음 이용됐던 것으로 이때는 0.5 GPa 이하의 저하중시에만 수렴성을 가졌었다. Quasi-Inverse Method 는 압력이 낮은 구간에서는 Direct Method 를, 높은 구간에서는 Inverse Method 를 각각 혼용해서 사용하는 방식으로 압력범위가 1.5 GPa 까지의 수렴해를 얻을 수 있었으나 매우 작은 범위를 느리게 이동하므로 초기압력 설정이 다소 정도를 가져야 하는 애로점이 있었다. 한편

Okamura⁽¹³⁾, Hamrock⁽¹⁴⁾ 등이 이용한 Newton-Raphson Method 는 초기값의 설정에 따라 수렴성이 좌우될 수 있지만 일단 적절한 초기치가 주어지면 탄성변형시의 압력에 의한 점도변화가 극심한 고하중시의 비선형적인 문제를 푸는데 그 수렴성이 빠르다. 따라서 본 논문에서는 비선형성이 강한 EHL 의 고압력 영역에서 수렴성이 좋은 Newton - Raphson Method 를 사용하여 해를 구하였다. 아울러 종전의 연구들은 단순히 포괄적인 윤활의 개념적인 면에서의 윤활상태의 규명이 이루어진 데 반하여 본 연구에서는 구체적인 적용으로써 유압베인 펌프의 베인선단과 캠링간의 윤활 조건을 대상으로 수치적인 해석의 적용을 시도한 것이라 하겠다. 그리하여 베인 펌프의 베인 선단부의 윤활 상태가 정확히 규명됨에 따라 펌프의 설계에 있어서 고효율화의 실현을 위한 초석이 될수 있을 것으로 사료된다.

2. 지배방정식

Fig. 3 에서 보는 바와 같이 속도 U_1 을 가지고 있는 반무한체 캠링의 주위를 원주 속도 U_2 , 반경 R의 베인이 단위길이당 Φ 의 하중으로 운동하는 것과 같은 경우의 2차원 흐름을 해석의 대상으로 했다.

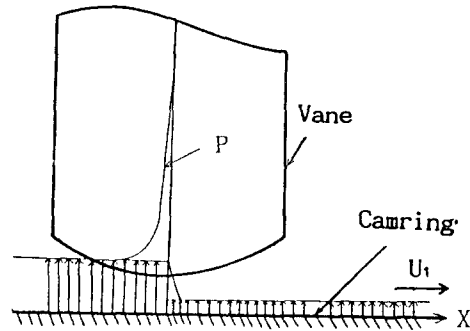


Fig. 3 베인과 캠링의 선접촉 모델

해석에 있어서 전제로 하는 가정은 다음과 같다.

- (1) 탄성체의 접촉폭은 미소하므로 윤활유체의 원동축방향으로의 흐름은 무시한다.
- (2) 탄성체의 변형은 반무한체의 평면 조건으로 한다.
- (3) 윤활유체는 비압축성이다.
- (4) 윤활유체의 점성 및 탄성체에 대한 온도의 영향은 무시한다.
- (5) 윤활유체의 점성은 압력의 지수 계수로써 표현된다.

윤활 유체층의 압력 P에 관한 기초식으로써 Reynolds 방정식은

$$h^3 \frac{dp}{dx} = 12 u \eta (h - h_m) \dots\dots\dots (1)$$

으로 나타낸다. 여기서 $u = (u_1 + u_2)/2$ 이고, η 는 윤활유체의 점성계수, h 는 윤활막 두께를 표시하며, h_m 은 적분상수이다. 점성계수 η 는 가정 (5)에 의해서

$$\eta = \eta_0 \exp (\alpha \cdot p) \dots\dots\dots (2)$$

로 표시되며, 윤활막 두께 h 및 탄성체의 변형량 v 는 다음 식과 같이 표시할 수 있다.

$$h = h_0 + \frac{x^2}{2R} + v \dots\dots\dots (3)$$

$$v = - \frac{2}{\pi E'} \int_{s_1}^{s_2} p (s) \ln (x - s)^2 ds + C_0 \dots\dots\dots (4)$$

여기서 h_0 는 $x=0$ 에서 윤활막 두께, C_0 는 적분상수, E' 는 탄성계수, s_1 과 s_2 는 압력이 발생하고 있는 범위이다. 식 (4)을 식 (3)식에 대입하면 식 (3)에는 $h_0 + C_0$ 라는 미지의 상수가 남게된다. 이 상수의 값을 결정하기 위하여 다른 부하력의 조건을 고려했다. 베인의 단위 길이당 부하력을 w 로 하면, w 는 다음식과 같다.

$$w = \int_{s_1}^{s_2} p(x) dx \dots\dots\dots (5)$$

미끄럼 속도 u 가 0이고 Wedge 효과가 없는 경우에는 베인과 캠링은 Hertz 접촉상태로 된다. Hertz 접촉상태에 있어서 압력분포 p 및 접촉폭 b 는 각각 식 (6) 및 (7)로 나타낼 수 있다.

$$p = \frac{2w}{\pi} \left[1 - (x/b)^2 \right]^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

$$b = \left[\frac{8wR}{\pi E'} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (7)$$

다음에 식 (2)를 풀기 위해서는 경계조건이 필요하므로 다음과 같은 경계조건을 고려했다.

경계조건 : $x = x_{L1}$ 에서 $p=0$, $x = x_{L2}$ 에서 $p = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

3. 수치해석

본 논문에서는 D.Dowson과 G.R. Higginson의 "Elastohydrodynamic Lubrication"에 따라 무차원 표시를 행했다. 변수 및 상태량을 각각

$$\left. \begin{aligned} X &= x/b, & H &= h/R, & H_m &= h_m/R \\ H_0 &= h_0/R, & V &= v/R, & P &= p/E' \end{aligned} \right\} (8)$$

로 무차원화 하고, 또 무차원 Parameter

$$U = \frac{\eta_0 u}{E' R}, \quad W = \frac{w}{E' R}, \quad G = \alpha E' \dots (9)$$

(속도Parameter) (하중Parameter) (재료Parameter)

을 이용하면, 식(2)~(5)은 각각 다음식으로 표현된다.

$$H^3 \frac{\partial P}{\partial X} = C_3 v (H - H_m) \dots\dots\dots (10)$$

$$v = \exp (- G P) \dots\dots\dots (11)$$

$$H = H_0 + C_1 X^2 + V \dots\dots\dots (12)$$

$$V = C_2 \int_{XL1}^{XL2} P(S) \ln(X - S)^2 dS + C_0 \dots\dots\dots (13)$$

$$C_5 = \int_{XL1}^{XL2} P dX \dots\dots\dots (14)$$

여기서 C_1, C_2, C_3 및 C_5 는 무차원화 하므로써 형성된 상수들이다. 연속적인 상태량을 유한개의 표본점을 선택한 상태량에서 근사적으로 표현할 경우, 그 표본점에 있어서 참값은 미분방정식을 차분화한 차분방정식을 푸는 것에 의해 근사적으로 구하여 얻을 수 있다. X방향을 윤활영역으로 할때, 탄성변형이 예상되는 유출단을 촘촘히 하고 그밖의 영역에서는 성기게 하는 방식의 M개의 부등분할을 행하고, 그 표준점의 좌표를 $X_i (i=1, 2, 3, \dots, M, M+1)$ 로 하였다. $X_1 = X_{L1}, X_{M+1} = X_{L2}$ 로 할때 X_{L2} 가 미지수이므로 $X_{L2} < X_{M+1}$ 로 되는것과 같이 설정해 놓았다. 표본점의 각 분할간극 및 중심위치를 각각 DX_i 및 XP_i 로 할때, Reynold's 방정식 (10)을 XP_i 의 위치에서 차분화하고 정리하면

$$f_i(P_j) = H_{i+1/2}^3 (P_{i+1} - P_i) - DX_i C_3 v_{i+1/2} (H_{i+1/2} - H_m) \dots (15)$$

으로 된다. 여기서 첨자 $i+1/2$ 은 XP_i 의 위치에 있어서 상태량을 의미한다. 식 (15)에서 i 값의 최대치는 유출단 위치에 상당하므로 경계조건에 의해서 다르게 된다. 다음에 식 (11)~(14)을 이산화 하면 각각 다음과 같이된다.

$$v_i = \exp (- G \cdot P_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \dots (16)$$

$$H_i = H_0 + C_1 X_i^2 + V_i \quad (i = 1, 2, \dots, M+1) \dots (17)$$

$$V_i = C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \cdot \ln(X_i - XP_j)^2 DX_j + C_0 \quad (i = 1, 2, \dots, M+1) \dots (18)$$

$$C_5 = \sum_{i=1}^N P_{i+1/2} \cdot DX_i \dots\dots\dots (19)$$

식 (18)을 식 (17)에 대입하면

$$H_1 = H_{c0} + C_1 X_{L2}^2 + C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \ln(X_1 - XP_j)^2 DX_j \dots (20)$$

로 된다. 여기서 $H_{c0} = H_0 + C_0$ 이다. 경계조건을 이용하면

$$H_m = H_{N+1/2} = H_{c0} + C_1 X_{L2}^2 + C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \ln(X_{L2} - XP_j)^2 DX_j \dots (21)$$

가 얻어진다. 여기에서 H_{c0} 을 구한식 (20)에 대입하면 H_1 는 미지수 $H_m, P_2, P_3, \dots, P_{N-1}$ 및 X_{L2} 의 계수로서 표시된다. 식 (22)은 식(16)과 Reynolds 방정식 (15)의 조건식이고, 한편 식 (19)의 미지수 보다 1개 적은 부하력의 조건식이다.

$$H_1 = (H_m - C_1 X_{L2}^2 - C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \ln(X_{L2} - XP_j)^2 DX_j) + C_1 X_1^2 + C_2 \sum_{j=1}^N P_{j+1/2} \ln(X_1 - XP_j)^2 DX_j \dots (22)$$

대수방정식에 변환된 EHL의 기초식을 경계조건에 대해서 정리하면 다음과 같다.

경계조건 ($X=X_{L1}$ 에서 $P=0$, $X=X_{L2}$ 에서 $P = \frac{\partial P}{\partial X} = 0$)

<미지수>

$H_m, P_2, P_3, \dots, P_{N-1}, X_{L2}$: N개

<방정식>

Reynolds 방정식(15) $f_i(H_m, P_j, X_{L2})=0$ ($i=1, 2, \dots, N-1$)

부하력 조건식(14)

<경계조건>

$X_1=X_{L1}$ 에서 $P=0, X_N \leq X_{L2} \leq X_{N+1}$ 일때 $P_i = 0$ ($i \geq N$)

<Reynolds 방정식의 조건식>

점성과 압력과의 관계식 (11)

윤활막 두께와 압력, H_m, X_{L2} 와의 관계식(22)

따라서 경계조건에 있어서 미지수와 방정식의 수는 서로 일치하고 있으므로 이것들의 연립대수방정식을 풀면된다. 한편 EHL에 있어서 차분화된 Reynolds 방정식 (15)은 윤활막 두께 H가 압력 P의 1차 계수이고, 또 점성 ν 가 압력 P의 지수계수로 되고 있으므로 비선형 대수 방정식이다. 특히 점성 ν 의 지수에 넣고 있는 G의 값이 일반적으로 크게 되므로 비선형성이 현저하다. 이와같은 강한 비선형을 표시한 윤활기구의 수치해석에 최근 이용하는 것들은 Newton-Raphson 축차근사법이다. Newton-Raphson 축차근사법에 의하면 일반적으로 미지수 P_j ($j=1, 2, \dots, N$)을 가지는 비선형 대수방정식 $f_i(P_j) = 0$ 을 축차근사법에서 풀 경우, K번째의 근사해를 $P_j^{(k)}$ 라 하면 K+1번째의 근사해 $P_j^{(k+1)}$ 은 다음식으로 고려된다.

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \{ P_j^{(k+1)} - P_j^{(k)} \} + f_i = 0 \dots (23)$$

식 (23)은 부하력의 조건식을 포함하여 다음과 같은 벡터와 행렬로 표시된다.

$$[E] \{ Y \} = \{ G \} \dots (24)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_m} & \frac{\partial f_1}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial P_{N-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial X_{L2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{N-1}}{\partial H_m} & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial P_{N-1}} & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial H_{c0}} \\ 0 & \frac{DX_1 + DX_2}{2} & \dots & \frac{DX_{M-1} + DX_M}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_m^{(k+1)} \\ P_2^{(k+1)} \\ \dots \\ P_{N-1}^{(k+1)} \\ X_{L2}^{(k+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial H_m} H_m + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{\partial f_1}{\partial P_j} P_j + \frac{\partial f_1}{\partial X_{L2}} X_{L2} - f_1 \\ \dots \\ \frac{\partial f_{N-1}}{\partial H_m} H_m + \sum_{j=2}^{N-1} \frac{\partial f_{N-1}}{\partial P_j} P_j + \frac{f_{N-1}}{\partial X_{L2}} X_{L2} - f_{N-1} \end{bmatrix} \quad C_5$$

축차근사법에서 초기조건의 선정이 얼마나 잘 되었는가에 따라 수속성여부기 달려있다는 것은 일반적으로 잘 알려져 있다. 따라서 본 프로그램에서는 초기압력을 Hertz 접촉상태에 있는 것으로 간주하고 다음과 같은 식으로 주었다.

$$P_i = \begin{cases} C_4 / (1 - X_1^2) & (X_1 \leq 1) \\ 0 & (X_1 > 1) \end{cases} \quad C_4 = (W/2\pi)^{1/2} \quad (25)$$

H_m 및 H_{c0} 의 초기치는 Grubin의 이론식을 이용해서

$$H_m, H_{c0} = \frac{1.95 (G \cdot U)^{8/11}}{W^{1/11}} \quad (26)$$

으로 주어졌다. 또한 X_{L2} 의 초기치는 Hertz 접촉에 있어서 후단 즉 $X_{L2} = 1.1$ 으로 설정하였으며, 수속성의 판정은 K 번째와 K+1 번째의 압력분포의 차

$$\text{ERROR} = \frac{\sum_{i=1}^N |P_i(k+1) - P_i(k)|}{\sum_{i=1}^N |P_i(k+1)|} \quad (27)$$

이 거의 0 에 가까운 값이 되는 $\text{ERROR} < 10^{-5}$ 을 수 속성의 판정조건으로 하였다. 이상 위에서 열거한 내용들을 프로그램화 하기위한 flow diagram 을 Fig.4 에서 간략히 보여주고 있다.

4. 해석결과

Fig.5 및 6은 $W = 3 \times 10^{-5}$, $G = 2500$ 의 경우 압력 및 윤활막 두께분포를 보여주고 있다. Fig.5에서 보면 속도 파라미터 U 가 작게 되면 D.Dowson 의 문헌에 나타나 있는 것과 같은 압력파형이 나타나고 있으며, 특히 유출단 부근에서 EHL 접촉상태임을 나타내는 특유의 현저한 압력 피크가 보여지고 있다. 아울러 $U = 10^{-9}$ 일때의 압력파형은 유체윤활상태의 전형적인 형태를 보여주고 있다. Fig.6 을 보면 속도 U 가 작게 되었을 때 마찬가지로 유출단에서 EHL 특유의 함몰 현상이 나타남을 알수있다. Fig.5 에서 압수있는 바와 같이 속도 U 가 적은값 일 때 EHL 상태의 압력분포가 정확히 형성되고 있으며, 또한 Fig.6 에서는 U 가 빠름에 따라 윤활막의 두께가 증가함을 알수있는데 이것은 속도가 어느이상 빨라지면 유체윤활의 상태로 됨이 추정된다. Fig.7 은 하중 파라미터

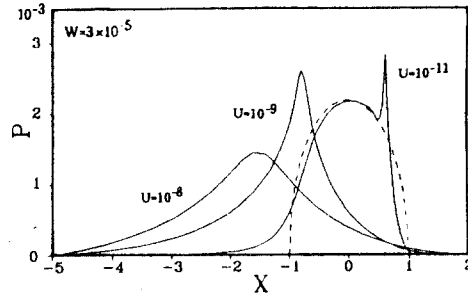


Fig.5 Pressure distribution($G=2500$)

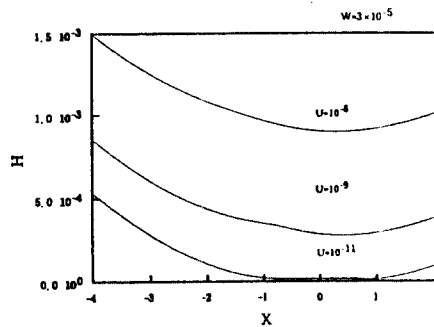


Fig.6 The oil film thickness ($G=2500$)

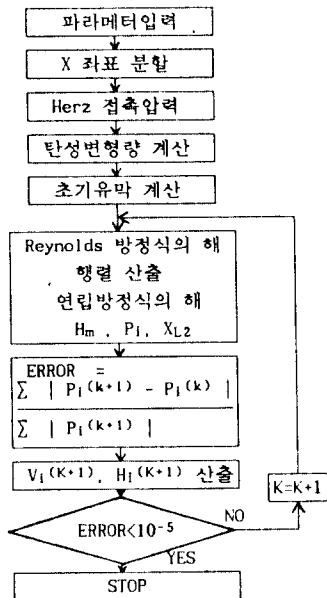


Fig.4 Flow diagram

W 가 증가함에 따라서 베인과 캠링 사이에 작용하는 압력변화는 점점 증가함을 보여주고 있으며, Fig. 8 에서는 하중이 증가해도 윤활막의 두께에는 변화가 거의 없음을 보여준다. 한편 Fig.9 은 재료 파라미터 W 를 5000 (Steel 의 경우) 으로 하였을때의 유막 압력형태를 보여주고 있는데, 유출단부근에서의 진동은 부동분할로 인한 분할간극의 부조화에서 오는 결과라고 생각된다. 따라서 X 방향의 등분할을 시도한 끝에 유출단의 진동을 상당히 줄인 Fig.10 와 같은 형태의 압력곡선을 얻을 수 있었다. 또한 Fig.11 은 그때의 윤활막의 형태를 보여 주고있는데, 아직도 X 방향의 분할 문제는 더욱 연구과제로 남겨 놓게되었다.

5. 결론

- 1) 로터와 함께 회전하는 베인의 속도가 증가함에 따른 윤활막의 두께의 증가가 현저하다.
- 2) 베인에 작용하는 단위폭당 하중이 증가할수록 유막 압력은 증가하지만 유막 두께의 증가는 극히 미미한 형태를 보여준다.
- 3) 캠링과 베인 사이에 작용하는 유막의 압력이 유출단 부근에서 순간적으로 급격히 상승함으로 인해 탄성 유체윤활 영역이 확인되었다.

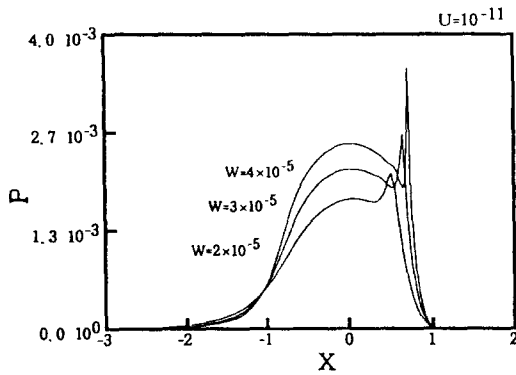


Fig. 7 Pressure distribution (G=2500)

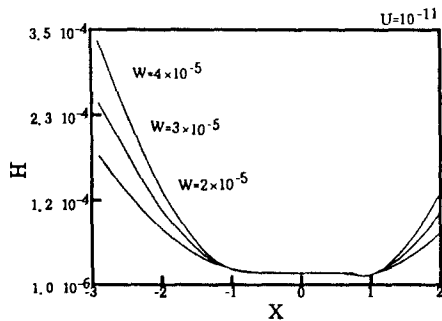


Fig. 8 The oil film thickness (G=2500)

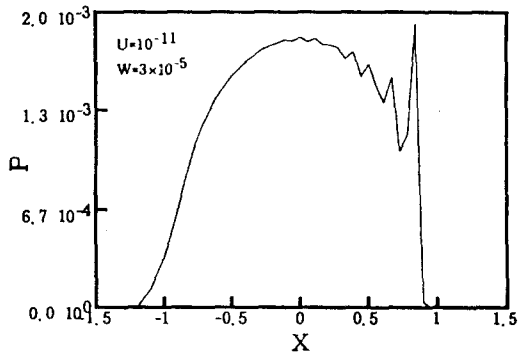


Fig. 9 Pressure distribution (G=5000)

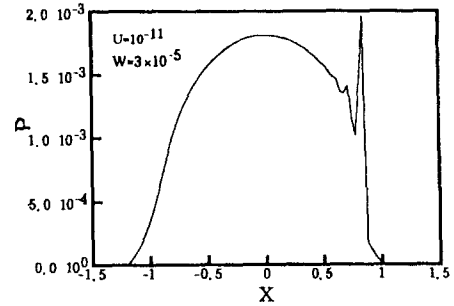


Fig. 10 Pressure distribution (G=5000)

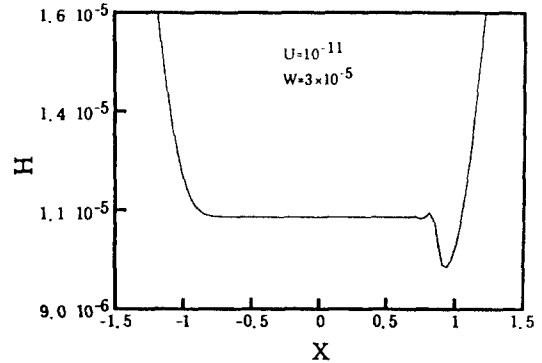


Fig. 11 The oil film thickness (G=5000)

참고문헌

- (1) C. Barus, Amer. J. Sci., (3), Vol 45 (1893) 87.
- (2) P. W. Bridgeman, Proc. Amer. Acad. Arts. Sci., Vol 61(1926) 57.
- (3) M. D. Hersey & H. Shore, Mech. Eng., Vol 50 (1928)
- (4) W. Peppeler, V. D. I. Forschungsheft, Vol 391 (1938)

- (5) A. M. Ertel, Academy of Sciences USSR, Deot. Tech. Inst., Appl. Math. & Mech., Vol 3, 2(1939)41.
- (6) A. Meldahl, Brown B. Veri Review, Vol 28, 11 (1941)
- (7) A. N. Grubin, Cent. Sci. Res. Inst. For Tech. and Mech. Eng. (Moscow), (in Russian), Book on 30.
- (8) A. I. Petrusevich, Iz. Akad. Nauk. SSSR (OTN), Vol 2 (1951) 209.
- (9) C. Weber & K. Saalfeld, Zeit. Anger. Math. & Mech., Vol 34 (1954) 54-64.
- (10) D. Dowson & G. R. Higginson, J. Mech. Eng. Sci., Vol 1, (1959) 6.
- (11) A. W. Crook, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol A250 (1958)
- (12) Evans, H. P. & Snidle, R. W., Proc. R. Soc. Lond., Vol A382(1982)
- (13) Okamura, H., Proc. 9th Leeds-Lyon Sympo. on Tribology, p313(1982).
- (14) B. J. Hamrock & D. Dowson, Trans. ASME, F, 98, 4 (1976)223.
- (15) D. Dowson & G. R. Higginson, Elasto-Hydrodynamic Lubrication, Pergamon(1966).
- (16) 정재연, 양정구, 이봉구, 제13회 한국윤활학회 강연 논문 초록집(1991)55.
- (17) 정재연, 박사학위 논문 (동경공업대학)