

# 2개의 원형구멍을 지닌 4변 고정, 등방성 정사각형판의 진동해석

○ 이 윤복\*      이 영신\*\*

( Vibration Analysis of 4 Edges Clamped, Isotropic Square Plates with 2 Collinear Circular Holes )

(Youn-Bok Lee and Young-Shin Lee)

## 1. 서 론

많은 공학자들은 기계구조물의 기본요소인 판의 정적 및 동적해석을 수행해 왔다. 이러한 공학적 문제의 접근방법은 초기에 가장 단순한 경우의 해를 구하고 그 후 복잡한 실제 설계에 있어서 단순한 해를 기초로 하여 발전시켜 나가는 것이다. 실제 설계는 불연속부를 포함하는 구조물을 대상으로 하기 때문에 개구부(Cutout)를 지닌 판의 정적 및 동적거동을 이해하는 것은 중요하다. 개구부를 지닌 판은 자동차, 항공기, 건축구조물, 운반차량, 선박, 우주선 등에 구조물의 기본요소로 광범위하게 사용되고 있다. 개구부는 장비결합부, 창문, 환기구멍, 정비용 구멍과 같은 기능적 요구, 구조물의 중량감소, 다른 부품으로의 접근 용이성 및 방진설계를 위해 적용되고 있다.

원형구멍이 있는 판의 동적해석에 대한 지금까지의 연구동향은 다음과 같다.

1952년 Kumai<sup>(1)</sup>는 1개 원형구멍이 있는 고정지지 정사각형판을 Point matching 방법으로 고유진동수와 노우드형태를 해석하였으며, 1958년 Takahashi<sup>(2)</sup>는 1개 원형구멍이 있는 고정지지 정사각형판 및 직사각형판을 보의 처짐함수와 Rayleigh-Ritz법으로 무차원진동수 매개변수를 구하였다. 1961년 Joga Rao 등<sup>(3)</sup>은 대수다항식과 Biharmonic singular함수를 사용하여 Rayleigh-Ritz법으로 1개 원형구멍이 있는 단순지지 정사각형판의 무차원진동수 매개변수를 구하였으며, 1968년 Zienkiewicz등<sup>(4)</sup>은 1개 원형구멍이 있는 고정지지 정사각형판을 유한요소해석으로 1차, 4차 무차원진동수 매개변수를 구하였다.

1975년 Hegarty등<sup>(5)</sup>은 중앙에 1개 원형구멍을 갖는 고정지지 및 단순지지 정사각형판의 자유진동문제를 Least square point matching 방법으로 연구하였으며 1976년 Rooke등<sup>(6)</sup>은 2개의 원형구멍이 있는 판에 균열이 있는 경우에 있어서 판의 기하학적 형상과 균열크기의 변화에 대한 응력강도계수를 정리하였고, 1987년 Laura등<sup>(7)</sup>은 특성다항식의 처짐함수를 사용한 이론해석과 실험을 통하여 중앙에 1개 원형구멍이 있고 탄성구속된 직사각형판의 고차 진동해석을 수행하였다. 1989년 Bicos등<sup>(8)</sup>은 중앙에 1개 원형구멍이 있는 이방성 정사각형판에서 전단변형이론을 고려한 유한요소해석과 실험을 통하여 감쇠가 있는 진동특성을 연구하였다. 지금까지의 연구는 대부분이 중앙에 1개 원형구멍을 지닌 정사각형판에 대해서 이루어졌으나 국내에서는 원형구멍이 있는 사각형판의 동적해석에 관한 연구는 거의 없는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 4변고정, 등방성 정사각형판의 자유진동특성을 충격진동실험과 유한요소 해석방법으로 원형구멍직경의 변화에 따른 고유진동수와 무차원진동수 매개변수를 구하고자 한다.

## 2. 실험

### 2.1 시편

충격진동실험<sup>(9)</sup>을 위한 시편은 원형구멍이 없는 정사각형판, 중앙에 1개 원형구멍이 있는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 정사각형판의 3종류로 하였다. Fig.1 은 실험에 사용된 대표적인 시편의 형상을 나타내고 있다.

\* 충남대학교 대학원 기계설계공학과

\*\* 충남대학교 기계설계공학과, 정회원

얇은 판의 두께비와 고정지지용 지그를 고려하여 판의 크기는 두께가 4.8 mm이고, 길이가 300 mm 인 정사각형으로 하고 판 내부의 원형구멍직경을 5-150 mm 범위로 하였다. 그리고 4번의 고정지지를 위한 보울트 체결부위를 적용하여 시편의 길이를 400 mm로 가공하였으며 시편의 갯수는 15개이다. 시편의 재질은 등방성인 Al5083 의 알루미늄으로 하였으며 탄성계수 E가 72.3 GPa, 밀도  $\rho$ 가 2744 Kg/m<sup>3</sup>, Poisson 비  $\nu$ 가 0.33 이다.

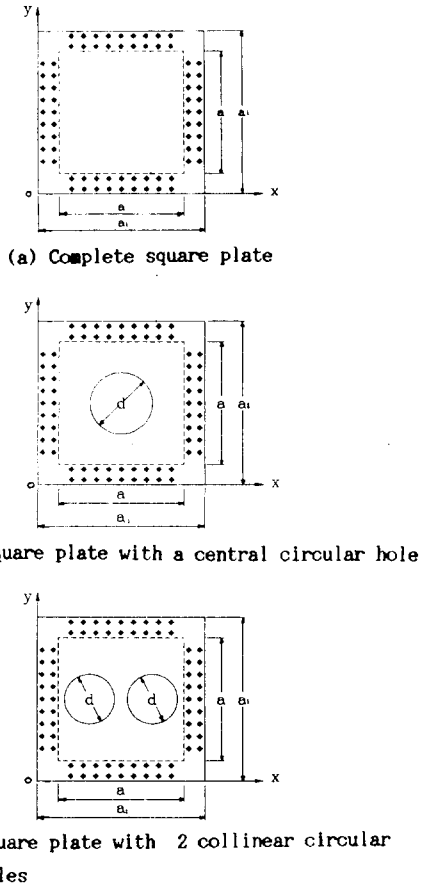


Fig.1 Typical configurations of specimens

## 2.2 실험장치

실험장치는 고정지지용 지그와 진동분석장치로 구성되어 있다. 시편을 4번 고정지지로 유지하기 위한 지그는 지지판(가로×세로×높이 ; 400 mm × 400 mm × 20 mm)과 블록(가로×세로×높이 ; 300 mm × 50 mm × 70 mm) 4개 및 고정판(가로×세로×높이 ; 300 mm × 50 mm × 20 mm) 4개로 제작되어 있다. 블록의 밑면에는 8개의 압나사가 가공되어 지지판에 고정될 수 있도록 하였으며, 블록의 윗면에는 시편을 고정시키도록 18개의 압나사가 가공되어 있다.

경계조건을 결정하기 위하여 보울트 체결위치와 체결 보울트수를 변화시키면서 실험하였다. 그 결과 시편의 한번에 18개씩 보울트 체결한 경우와 5개씩 체결한 경우에 고유진동수의 변화가 거의 없었다. 따라서 본 충격진동실험은 시편의 한번에 5개씩의 보울트를 체결하여 4번 고정지지의 경계조건으로 실시하였다.

진동분석장치는 주파수분석기, 충격해머, 신호증폭기, 가속도계, 플로터로 되어있다. 실험에 사용된 주파수분석기는 ONO SOKKI사의 CF-920 F.F.T.ANALYSIS SYSTEM으로 주파수 분석범위가 1Hz-100KHz이다. 입력 신호로서 충격가진을 주기 위하여 PCB사의 086B03 SN1893 하중 트랜스듀서가 장착된 충격해머를 사용하였고, 출력신호인 판의 진동응답신호를 측정하기 위하여 PCB사의 303A03 SN10287 가속도계를 적용하였다. 입, 출력신호의 진폭은 ONO SOKKI사의 PS-002B와 PCB사의 Model 480D06 증폭기로 하였으며, 실험결과와의 가시화를 위하여 ONO SOKKI사의 CX-337 플로터를 사용하였다. Fig.2는 실험준비가 완료된 상태를 나타내고 있다.

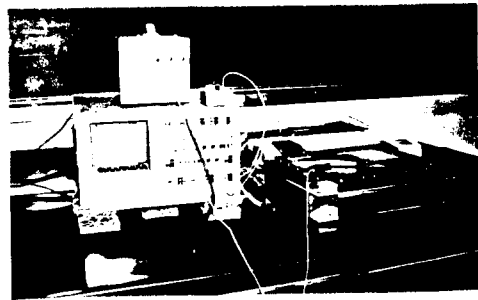


Fig.2 Photo of experimental apparatus

## 2.3 실험방법

실험상의 고유진동수는 충격가진에 응답하는 시편의 가속도를 주파수분석하여 구한다. 충격가진이 입력 신호로 되고 시편의 응답가속도가 출력신호로 되어 주파수분석된 전달함수의 피크점이 고유진동수이다. 충격진동실험시 불규칙한 잡음으로 인한 오차를 줄이기 위하여 4회의 충격가진을 평균하였고 측정주파수 분석범위를 1000 Hz이하로 결정하였다.

본 실험에서는 고정지지된 시편에 충격가진을 주어 1차, 2차 고유진동수를 측정하였다.

## 3. 유한요소해석

### 3.1 지배방정식

완전한 평판의 동적특성에 대한 지배방정식은 식 (1)과 같이 표현된다. (10, 11)

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad ; \text{ 판의 강성계수}$$

E ; 판의 탄성계수

h ; 판의 두께

$\nu$  ; Poisson 비

t ; 시간

w ; 판의 처짐

이다.

식 (1)은 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$D \nabla^4 w - \lambda_i^4 w = 0 \quad (2)$$

여기서

$$\lambda_i^2 = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D}$$

; i 번째 차수의 무차원진동수 매개변수

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$$

; i 번째 차수의 고유진동수

a ; 판의 길이

$\rho$  ; 판의 밀도

이다.

원형구멍이 있는 판의 고유진동수를 해석적으로 구하기 위해서는 판내부의 자유 경계조건과 판외부의 고정지지 경계조건을 만족하는 처짐식의 가정이 필요하나 내부와 외부의 기하학적 형상차이로 용이하지 않다. 따라서 이론적 해석방법은 유한요소해석으로 결정하였으며 판의 자유진동해석을 위하여 Swanson Analysis Systems사의 ANSYS 소프트웨어내의 Modal Analysis(KAN = 2)를 사용하였다.

유한요소 해석과정에서의 가정은 판에 곡률이 없고 두께가 일정하며 선형탄성 등방성재료의 두께비가 0.1 보다 충분히 작다. 또한 판의 처짐은 두께에 비해 충분히 작으며 회전 관성력과 감쇠효과를 무시하고 질량행렬과 강성행렬이 변하지 않는다.

따라서 감쇠가 없는 자유진동의 유한요소 지배방정식은 식(3)과 같다.

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K] \{u\} = \{0\} \quad (3)$$

선형탄성 등방성판에 대한 변위를 조화함수로 가정하여 식(3)에 대입하면

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{u_0\} = \{0\} \quad (4)$$

이 되고  $\{u_0\} \neq \{0\}$  이므로

$$|[K] - \omega_i^2 [M]| = 0 \quad (5)$$

이다.

식(5)의 행렬식으로부터 각 차수의 고유치 및 고유진동수를 구한다.

### 3.2 유한요소

유한요소는 Fig.3과 같이 요소당 8개의 절점을 지닌 등계수 (Isoparametric) 쉘요소인 STIF93이다. 이 요소는 한 절점당 6자유도를 지니고 있으며 절점좌표계에서 병진운동과 회전운동으로 나타난다. 등계수 요소는 요소의 기하학적 형상을 정의하는데 필요한 절점수와 영역변수를 정의하는데 필요한 절점수가 같으므로 영역변수와 요소의 기하학적 형상을 정의하는 형상함수가 서로 같다. 따라서 이 요소는 극좌표계, 절점좌표계 및 전체 직교좌표계 사이의 좌표변환에 관한 Jacobian행렬을 용이하게 구할 수 있다.

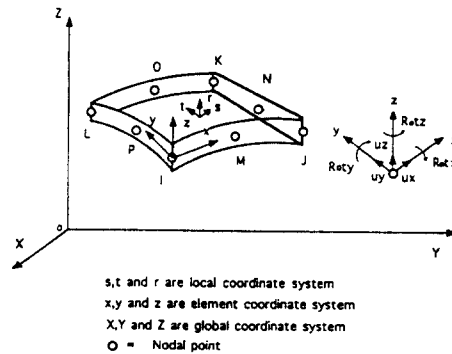
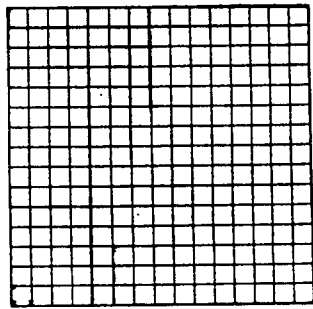


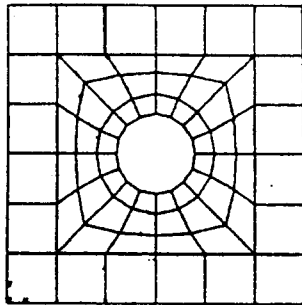
Fig.3 Isoparametric shell element ( STIF93 )

### 3.3 모델링

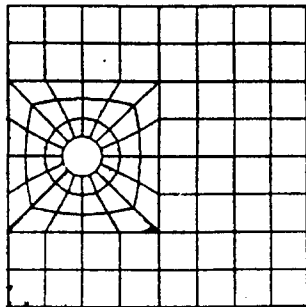
본 연구의 유한요소 모델링은 원형구멍이 없는 정사각형판, 중앙에 1개 원형구멍이 있는 정사각형판, 편심된 1개의 원형구멍이 있는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 정사각형판의 4종류이다. 유한요소로 분할된 모델은 Fig.4에 나타나 있으며 원형구멍이 없는 판의 경우에는 정사각형 유한요소로 균일하게 분할되어 있다. 원형구멍이 있는 경우에는 원형구멍의 주위를 커다란 정사각형으로 분할한 후 그 내부를 등심원과 곡률반경이 큰 폐곡선으로 다시 분할하였다. 따라서 원형구멍의 주위 즉, 물리량의 변화가 심한 곳에서는 그렇지 않은 곳에 비해서 많은 개수의 작은 요소로 나타나 있으며 전체적인 모델링된 상태가 자연스러움을 보이고 있다.



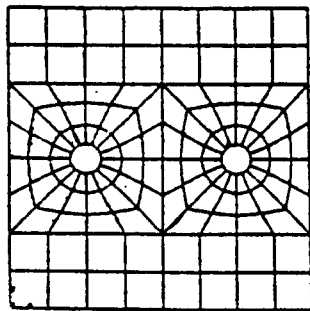
(a) Complete square plate



(b) Square plate with a central circular hole



(c) Square plate with an eccentric circular hole



(d) Square plate with 2 collinear circular holes

Fig.4 Finite element model

Table 1은 판의 종류에 따라 모델링된 유한요소 수, 절점수, 총자유도수 및 마스터 자유도(Master degree of freedom)수를 나타내고 있다. 여기서 마스터 자유도는 컴퓨터 수행시간 및 용량문제로 질량행렬 및 강성행렬을 축소시킬때<sup>(12)</sup> 사용되는 자유도이다.

Table 1 Finite element modelling data

| Type of plate                                | No. of element | No. of node | Total degree of freedom | Master degree of freedom |
|--|----------------|-------------|-------------------------|--------------------------|
| Complete square plate                        | 225            | 705         | 3510                    | 120                      |
| Square plate with a central circular hole    | 58             | 238         | 1140                    | 120                      |
| Square plate with an eccentric circular hole | 96             | 326         | 1572                    | 120                      |
| Square plate with 2 collinear circular holes | 128            | 379         | 1890                    | 120                      |

## 4. 결과 및 고찰

### 4.1 실험결과

원형구멍이 없는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 정사각형판에 대해서 충격 진동실험을 통하여 1차, 2차 고유진동수를 측정하여 Fig.5에 나타내었다.

원형구멍이 없는 정사각형판의 실험치는 1차 고유진동수가 470 Hz이고 2차 고유진동수가 945 Hz이다. Leissa의 이론치<sup>(13)</sup>는 1차 고유진동수가 479.8 Hz이고 2차 고유진동수가 978.6 Hz이다. 따라서 실험치와 이론치의 오차는 4%이하로 실험치가 이론치보다 낮게 나타나고 있다. 그 이유는 일반적으로 Ritz법에 기초를 둔 이론치가 상한치로 평가되기 때문이다.

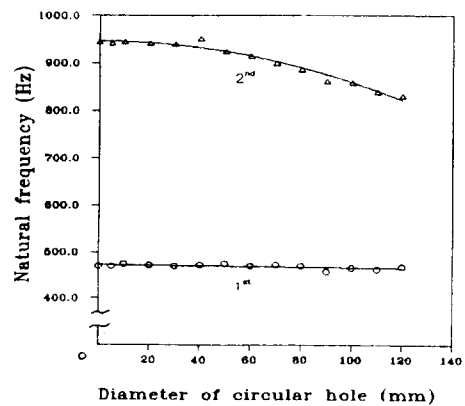


Fig.5 Experimental results for square plates with 2 collinear circular holes

그리고 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 정사각형판의 경우에 있어서 1차 고유진동수의 변화는 원형구멍 직경의 증가에 따라 선형적으로 미소하게 감소하는 경향을 보이고 있다. 2차 고유진동수의 변화는 원형구멍 직경의 증가에 따라 2차 함수형태로 감소하는 경향을 나타내고 있다.

또한 중앙에 직경이 150 mm인 1개 원형구멍을 지닌 정사각형판의 실험치는 1차 고유진동수가 715 Hz이고 2차 고유진동수가 915 Hz이다[Fig.6]. Zienkiewicz의 해석결과<sup>(4)</sup>는 1차 고유진동수가 771 Hz로 제시되었으며 실험치가 해석결과보다 낮게 나타나고 있다.

#### 4.2 유한요소 해석결과

유한요소해석은 원형구멍이 없는 정사각형판, 중앙에 1개 원형구멍이 있는 정사각형판, 편심된 1개 원형구멍이 있는 정사각형판 및 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 정사각형판의 4종류에 대하여 원형구멍 직경의 변화에 따른 1차, 2차 무차원진동수 매개변수를 구하였다.

중앙에 1개 원형구멍이 있는 정사각형판의 유한요소 해석결과를 Fig.6에 나타나 있다. 무차원진동수 매개변수는 형상비가 0.23 이하에서 감소하고, 형상비 0.23이상에서 증가하는 경향을 보이고 있다. 이는 Kumai<sup>(1)</sup>, Zienkiewicz<sup>(4)</sup> 및 Hegarty<sup>(5)</sup>의 결과와 잘 일치하고 있다. 이로부터 유한요소 해석방법은 적합하다고 판단된다.

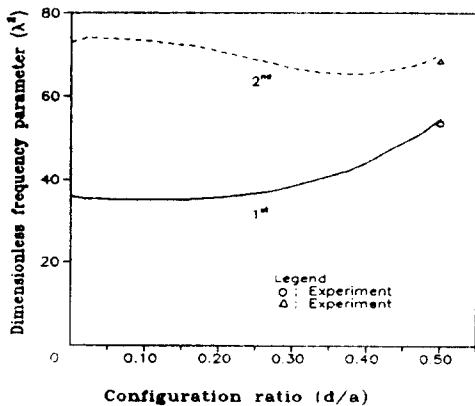


Fig.6 Results of finite element analysis for square plates with a central circular hole

또한 편심된 1개 원형구멍이 있는 정사각형판의 유한요소 해석결과는 Fig.7에 나타나 있다. 여기서 1차 무차원진동수 매개변수는 형상비가 0.2 이하에서 거의 변화가 없으며, 형상비 0.2 이상에서 미소하게 감소하는 경향을 보이고 있다. 2차 무차원진동수 매개변수는 형상비가 증가함에 따라 점차 감소함을 나타내고 있다. 이는 원형구멍이 고정지단쪽으로 편심되기 때문에 나타나는 고정단의 효과때문이라고 판단된다.

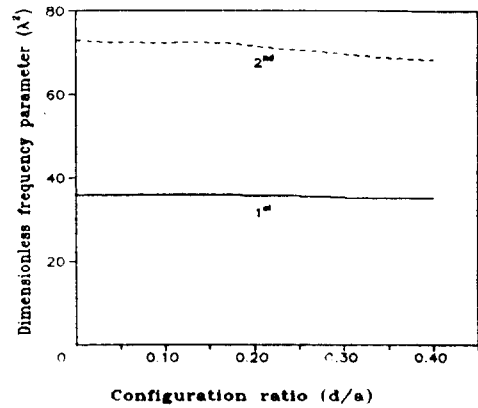


Fig.7 Results of finite element analysis for square plates with an eccentric circular hole

다음에, 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 정사각형판의 유한요소 해석결과가 Fig.8에 나타나 있다. 여기서 형상비의 변화에 따른 1차, 2차의 무차원진동수 매개변수의 변화는 편심된 1개 원형구멍이 있는 정사각형판의 결과와 유사하게 보이고 있다.

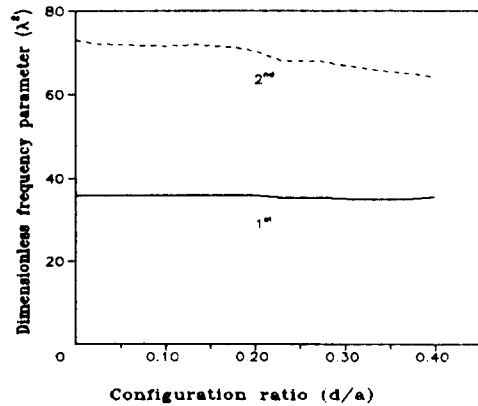


Fig.8 Results of finite element analysis for square plates with 2 collinear circular holes

## 5. 결 론

본 논문에서는 2개의 원형구멍을 지닌 4변고정, 등방성 정사각형판의 진동을 해석하기 위하여 충격진동 실험과 유한요소해석으로 형상비의 변화에 따른 1차, 2차 고유진동수를 구하였다. 진동해석의 타당성을 확인하기 위하여 구멍이 없는 정사각형판과 중앙에 1개 원형구멍이 있는 정사각형판의 고유진동수를 충격진동 실험과 유한요소해석으로 구하였고 이미 발표된 논문의 결과와 비교하였다. 본 논문의 결론은 다음과 같다.

(1) 같은 직경의 2개 원형구멍이 동축상에 있는 4변고정, 등방성 정사각형판에서 형상비의 변화에 따른 1차, 2차 고유진동수는 실험치와 유한요소 해석치의 오차가 4% 이내로 잘 일치하였다.

(2) 1차 고유진동수의 변화는 형상비가 증가함에 따라 선형적으로 미소하게 감소하는 경향이 있으며, 2차 고유진동수의 변화는 형상비의 증가에 따라 2차 함수형태로 감소함을 알았다.

## 참고문헌

- (1) Kumai, T., 1952, "Flexural Vibration of the Square Plates with a Central Circular Hole," Proceedings of the Second Japan National Congress for Applied Mechanics, pp. 339-342.
- (2) Takahashi, S., 1958, "Vibration of Rectangular Plates with Circular Holes," Bulletin of JSME, vol. 1, No. 4, pp. 380-385.
- (3) Joga Rao, C.V., and Pickett, G., 1961, "Vibration of Plates of Irregular Shapes and Plates with Holes," Journal of The Aeronautical Society of India, Vol. 13, No. 3, pp. 83-88.
- (4) Zienkiewicz, O.C., and Anderson, R.G., 1968, "Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements," International Journal of Solids and Structures, Vol. 4, pp. 1031-1055.
- (5) Hegarty, R.F., and Ariman, T., 1975, "Elasto - Dynamic Analysis of Rectangular Plates with Circular Holes," International Journal of Solids and Structures, Vol. 11, pp. 895-906.

(6) Rooke, D.P., and Cartwright, D.J., 1976, Compendium of Stress Intensity Factors, London Her Majesty's Stationery Office, pp. 116-183.

(7) Laura, P.A.A., Gutierrez, R.H., and Pombo, J.L., 1987, "Higher Frequencies of Transverse Vibration of Rectangular Plates Elastically Restrained Against Rotation at the Edges and with a Central Free Hole," Journal of Sound and Vibration, Vol. 117, No. 1, pp. 202-206.

(8) Bicos, A.S., and Springer, G.S., 1989, "Vibration Characteristics of Composite Panels with Cutouts," AIAA Journal, Vol. 27, No. 8, pp. 1116-1122.

(9) Halvorson, W.G., and Brown, D.L., 1977, "Impulse Technique for Structural Frequency Response Testing," Sound and Vibration, November, pp. 8-21.

(10) Blevins, R.D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, pp. 223-274.

(11) Gorman, D.J., 1982, Free Vibration Analysis of Rectangular Plates, Elsevier, pp. 1-16.

(12) Guyan, R.J., 1965, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," AIAA Journal, Vol. 3, No. 2, p. 380.

(13) Leissa, A.W., 1973, "The Free Vibration of Rectangular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257-293.