

유한요소법을 이용한 내부 및 외부 음향장 해석

(An Analysis of Internal & External Acoustic Fields by Using FEM)

이 덕 주*(KAIST), 이 재 규**(KAIST)
D. J. Lee(KAIST), J. G. Lee (KAIST)

1. 서론

소음의 발생 원인은 공기역학적 측면과 구조적 측면으로 나누어지는데, 실제로는 유동장에서 발생하는 음원과 구조물에서 발생하는 진동과의 상호 간섭에 의해 보다 복잡한 형태로 발생된다. 음장 문제를 두가지 범주로 구분하면 첫째는 음원과 구조물과의 상호교란에 의한 산란문제(Scattering)와 둘째로 구조물의 자체 진동에 의한 음의 전파현상과 구조물내부에 회전체와 같은 음원이 존재하는 경우에 음의 전파를 관측하는 방사문제(Radiation)가 있다.

실제로 산업용 터빈이나 비행기 엔진 흡입구에서 발생하는 소음, 또는 자동차의 배기구를 통해 발생하는 소음 그리고 엔진의 진동에 의한 구조적 소음, 기타 가전제품의 회전체(Fan & Motor)에 의한 소음은 방사(Radiation)의 문제로서 중요 관심 과제이다. (1),(2),(3),(4)

수치적 기법으로 근래에 많이 사용하는 방법으로 BEM(경계요소법), FEM(유한요소법), FDM(유한차분법)이 있는데 본 연구에서는 유한요소법을 이용하기로 한다. 지금까지는 주로 BEM을 통해서 Far-Field의 음향장을 해석하였지만 복잡한 형상을 갖는 구조물내부에서의 음향장 변화나 구조물 내부에 음원이 존재하는 경우 또는 구조물 자체가 갖는 물리적 특성치 변화 즉 물체표면에서 투과율이 부분적으로 다른 경우 또는 물체 표면에서의 부분 진동문제의 음향장 해석에 있어서 가장 잘 대체해 나갈 수 있는 방법이 유한요소법이라고 여겨진다.

본 연구에서는 2차원 또는 기하학적으로 축대칭인 3차원 Duct내부에 음원이 존재하는 경우 음원전파에 따른 Near-field와 Far-Field에서 음의 방향성을 예측하기 위해 먼저 기본적인 유한요소법에 의한 Robin 경계조건을 사용하여 계산된 결과와 Infinite Element(5),(6),(7)를 도입하여 계산한 결과를 비교하여, Infinite Element가 보다 효율적이며 타당한 결과를 얻음을 확인해 보기로 한다.

2. 이론적 배경

2.1 지배방정식의 기본적 이론과 가정

외부의 아음속 평균 흐름을 갖는 파동방정식의 기본가정은 압축성 흐름과 비점성, 비정상 유동이라는 전제하에 유도된 Full Potential Eq에서 출발하여 외부흐름이나 음원의 가진에 의한 미소변화량의 발생에 따른 음향학적 물리량을 파생시킨다. 여기서 파생된 물리량들은 속도 포텐셜 ϕ 와 속도 \vec{V} , 압력 P가 되며 유동의 지배방정식은 연속방정식과 운동량방정식, 그리고 에너지방정식에 대입하여 상대적으로 크기가 작은 미소량들을 제외하면 다음과 같은 선형 파동방정식과 속도 \vec{V} , 압력 P를 얻는다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2\vec{U} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \vec{U} \cdot \nabla (\nabla \phi \cdot \vec{U}) = c_0^2 \nabla^2 \phi \quad (1)$$

$$\vec{V} = \nabla \phi \quad (2)$$

$$p = -\rho_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{U}_0 \cdot \nabla \phi \right) \quad (3)$$

Fourier 정리에 의해 모든 선형계는 주기함수들의 합으로 표현을 할 수 있으므로 시간에 관한 항도 마찬가지로 표현하기로 한다.

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}) \cdot e^{-i\omega t}$$

둘째로, 본연구에서 고려하는 좌표계는 원통좌표계 (r, θ, z) 를 사용하였다. 이유는 기하학적으로 3차원 형상이 축대칭인 경우의 문제와 2차원 평면인 경우의 문제를 적용하는데 있어서 θ 방향으로는 물리량들을 주기함수의 합으로서 나타낼 수 있기때문에 실제로는 2차원의 좌표계 (r, z) 로서 계산 영역을 표현하게 된다.

$$\phi(r, \theta, z, t) = \phi'(r, z) \cdot e^{-i(\omega t - m\theta)} \quad (4)$$

두가지의 조건을 고려해보면 속도 포텐셜 ϕ 와 압력, 속도는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\nabla^2 \phi - M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2i\omega M \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \phi = 0 \quad (5)$$

$$p = i\omega \phi - M \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{p}{Z_n} = \frac{i\omega \phi}{Z_n} - \frac{M}{Z_n} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (7)$$

$$Z_n = \frac{\rho}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \quad Z_n : \text{Acoustic Impedance}$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (8)$$

(r, θ , z) 좌표계의 Laplacian

3. 유한요소법을 이용한 내부 음향장 수식 이산화 과정

3.1. 적분방정식의 형성

Galerkin 방법에 의한 Residual을 구해 보면 다음과 같다.

$$R = \nabla^2 \phi - M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + 2i\omega M \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\omega^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \phi$$

* 정회원, 한국과학기술원

**한국과학기술원

$$w = \psi_i(r, z)$$

$$\int R \cdot w_i \, dV = 0$$

3.2. Element Matrix 구성

포텐셜 ϕ 를 형상함수의 interpolation의 선형조합으로 나타내어 적분방정식을 구성하면 다음과 같다.

$$\phi^* = \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \psi_j^*(r, z)$$

보다 간단한 형태로 나타내기 위하여 Element Stiffness Matrix K_{ij}^e 와 Force Vector f_i^e 를 구성하면 다음과 같다.

$$K_{ij}^e = -2\pi \int \left[(1-M^2) \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_j}{\partial z} + \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \frac{\partial \psi_j}{\partial r} - 2\omega M \psi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial z} - \left(\omega^2 \frac{r^2}{r} \right) \psi_i \psi_j \right] r \, dr \, dz$$

$$f_i^e = -2\pi \int \left[(1-M^2) \psi_i \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \cos(n, z) \, r \, dr - 2\pi \int \psi_i \frac{\partial \phi^*}{\partial r} \cos(n, r) \, rdz \right]$$

3.3. 경계조건

음향학 문제에서 경계조건은 Essential B.C 이나 Neumann B.C의 형태로 ϕ 나 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 을 직접 사용할수 도 있지만 실제 내부와 외부음장의 해석시 구조물의 성질에 따른 투과율의 변화나 Far-Field 경계에서의 Non-Reflecting 조건을 고려할 때는 일반적으로 Robin B.C이 적용된다.

즉 Impedance 를 매개로 속도와 압력의 관계식을 이용하면 (7) 식이 되며 경계면에서 적용하게되면 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 와 ϕ 의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{iZ_n \omega}{1-M} \phi$$

Z_n : 경계에 수직인 Impedance 성분

구조물이 강체라면 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ 이 되며 투과의 성질을 갖는 매질인 경우 Z_n 을 조절해 주면 경계면에서 ϕ 와 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 을 구할 수 있게 된다.

외부 음장의 해석시에는 Far-Field 조건으로 평면파의 조건인 $Z_n = \rho_0 C_0$ 를 이용하였지만 거리에 따라 오차의 크기가 증가함을 알 수 있다.

4. Infinite Element의 도입

본 연구에서는 Infinite Element의 새로운 모델로써 Wave Envelope Element를 도입하기로 한다. 특징은 초기에 사용된 Infinite Element의 수치적분시 무한경계의 적분계산에 이용되던 Gauss-Laguarre 방법이 아닌 일반적으로 FEM에서 사용되는 Gauss-Legendre방법을 이용함으로써 수치적분시 소요되는 계산시간을 효율적으로 줄여 쓸 수 있는 장점을 갖는다.

5. Infinite Element를 이용한 외부음향장 수식 이산화 과정

Jean-Pierre가 제안한 Wave Envelope Element의 형상함수와 가중함수는 다음과 같이 정의한다.⁽⁷⁾

$$\text{형상함수 : } \psi_j = N_j(R, \theta) \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{-i\omega(R-R_j)}$$

$$\text{가중함수 : } w_i = N_i(R, \theta) \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{i\omega(R-R_i)}$$

외부음향장 영역의 Element Stiffness Matrix 와 Force Vector 는 내부음향장에서 해석된 절차와 같은 방식으로 구한다.

6. 내부 및 외부음향장의 Assemble 과정

내부 및 외부 음향장에서 구성된 Element Matrix를 전체 영역에서 Assemble하면 다음과 같은 Global Stiffness Matrix와 Global Force Vector를 구할 수 있다.

$$K_{ij}^G = \sum_{e=1}^N [K_{ij}^e + K_{-ij}^e]$$

$$f_i^G = \sum_{e=1}^N [f_i^e + f_{-i}^e]$$

$\sum_{e=1}^N$: Element의 Assemble 기호

7. 결과 및 고찰

7.1 Annular Duct 내부의 음향장 해석에 대한 고찰

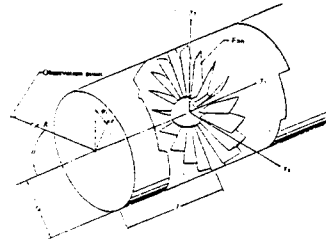
외부의 아음속($M < 1$) 흐름이 존재하는 경우에 축대칭 Annular Duct의 내부음향장 문제에서 경계조건은 Duct 입구(inlet)부분에서는 Robin B.C (Non-Reflecting Condition)이 주어지며 출구(exit)부분에서는 Propeller의 속도분포로써 실제 해석해와 비교하기 위해서 Bessel 제1종과 2종의 선형 combination으로 표현하였다. 또한 엄밀해를 나타낸 수식은 다음과 같다.

$$\phi = \frac{-f(r)}{k} \cdot \{ \sin[k(z-L)] + i \cdot \cos[k(z-L)] \}$$

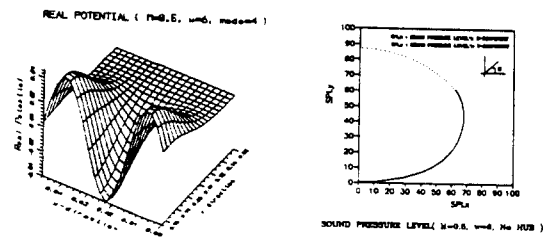
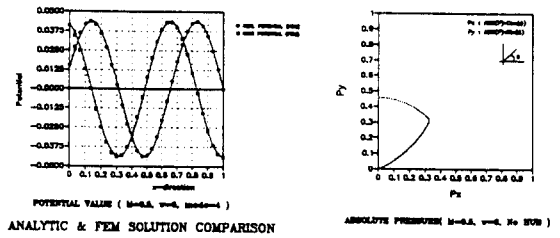
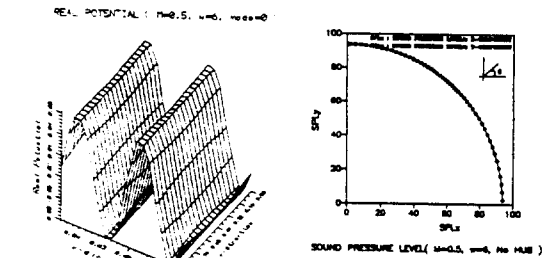
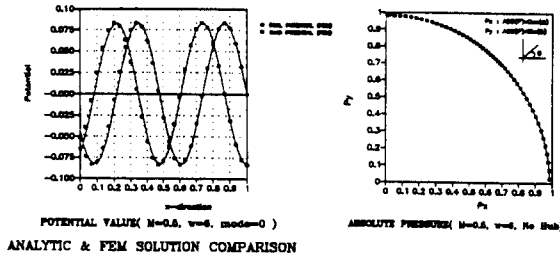
$$f(r) = J_\mu(\beta^{(\omega)} r) + Q_{\mu\mu} Y_\mu(\beta^{(\omega)} r)$$

$$k = \frac{M\omega \sqrt{\omega^2 - \beta^2(1-M^2)}}{1-M^2}$$

$$Z_n = \frac{\omega + M \sqrt{\omega^2 - \beta^2(1-M^2)}}{\omega M + \sqrt{\omega^2 - \beta^2(1-M^2)}} \quad k = \frac{\omega}{(1-M)}$$

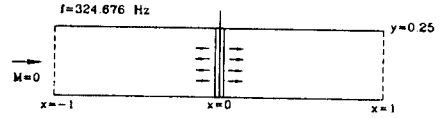


수치실험한 결과는 $M=0.5$ 이고 무차원 각주파수 $\omega = 6$, solidity가 0인 경우에 대하여 mode가 0일때와 mode가 4일때 한하여 계산해 본다. mode가 0인 경우에는 반경방향(r)과 축방향(z)에 대하여 Potential ϕ 와 압력 P 의 Amplitude가 같은 주기형태가 됨을 알 수 있다. 즉 흐름방향(z)에 대해서 평면파의 성질을 띠며 실제 압력 P 이나 속도 \vec{V} , 음압 SPL를 구해보면 방향에 따라 Amplitude가 일정함을 알 수 있다. mode가 4인 경우에는 반경방향으로 r 이 증가함에 따라 Amplitude가 증가하며 z 방향으로는 주기함수의 형태를 취하며 고차 mode가 되면 r, z 방향으로 복잡한 형태의 형상을 나타낸다. 또한 출구부분에서는 r 방향으로 증가함에 따라 SPL이 증가하여 $r=1$ 인 경계에서 최대 크기를 가짐을 알 수 있다.

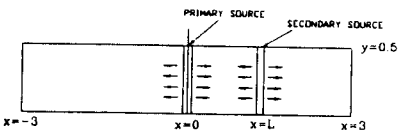
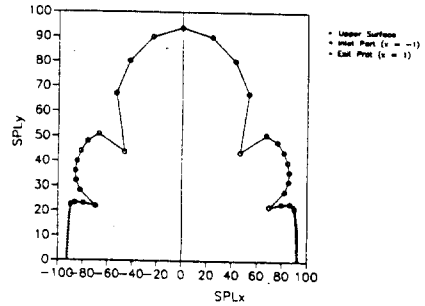


7.2 Monopole Source의 분포시 Near-Field의 해석

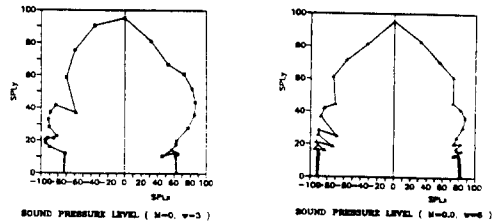
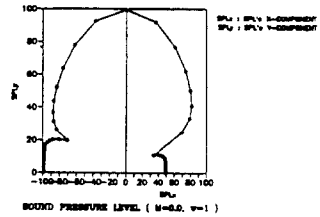
내부에 음원이 존재하는 경우, 음원이 소음의 원인이 될 때 그러한 음원의 감쇄를 위한 방법을 제시하기 위해서 다음과 같은 수치 실험을 해본다. 원점에 Primary Source가 분포하는 경우와 임의의 거리 $z=L$ 에 Secondary Source가 분포하는 경우에 양쪽 출구조건은 평면파의 Robin 경계조건을 만족하게 하였다. 계산된 결과를 검토해 보면 Monopole Source가 $z=0$ 에 존재하는 경우에 비해서 $z=L$ 에 Secondary Source가 존재하는 경우에 양쪽 출구부분에서 음압 SPL이 줄어들음을 알 수 있다.



Radiation by Monopole Source in Duct



Cancellation of Downstream by using SECONDARY SOURCE

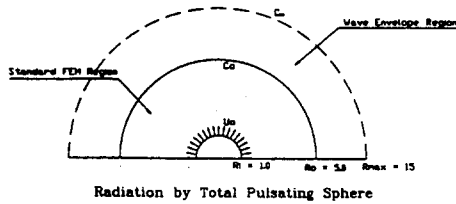


7.3 Total Pulsating Sphere의 외부음향장 해석에 대한 고찰

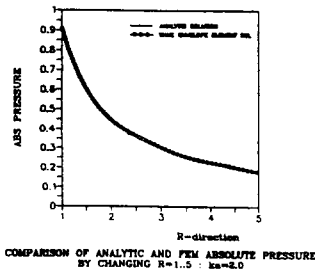
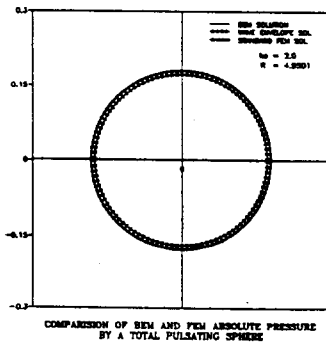
구조건재가 맥동하는 경우의 수치해를 구해 봄으로써 외부 음향장 해석에 있어서 기존의 Robin 경계조건에 의해 계산된 Standard FEM 방식과 Infinite Element의 일종인 Wave Envelope Element를 도입하여 계산한 결과를 실제 엄밀해와 비교하여 Wave Envelope Element 도입의 타당성 및 효용성을 검증하기로 한다.

경계조건 : $R_1 = 1.0 \quad 0 \leq \phi \leq \pi$ 인 경우

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = U_0 e^{-i\omega t}$$

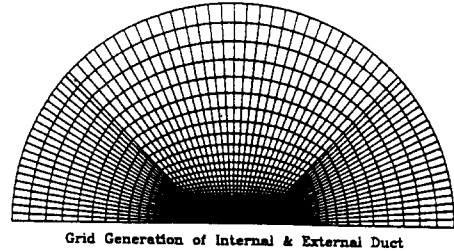


$ka=2$ 인 경우 Robin B.C이 주어진 Standard FEM과 Wave Envelope Element를 이용했을 때 일정한 거리($R=4.95$)에서 계산된 절대 압력 P 를 엄밀해와 BEM을 통해 비교해 보면 Wave Envelope Element가 더 좋은 결과를 얻음을 알 수 있다. 이것은 거리 $R=5$ 까지의 Standard FEM에 의한 계산 영역에서 파생되는 Reflection Wave의 파급영향이 Non-Reflecting 조건을 만족시키지 못하지만 Wave Envelope Element를 도입함으로써 Wave Envelope 영역의 계산결과에 의해 오차가 소멸되어 보다 엄밀해에 근접한 결과를 나타냄을 알 수 있다.



7.4 내부 및 외부 음향장 해석을 위한 격자구성

축대칭형상을 갖는 물체 내부에 음원이 존재하는 경우, 내부 및 외부 음향장의 변화를 계산하기 위한 격자를 구성하면 다음과 같다.



8. 결론

유한요소법을 이용한 내부음향장의 문제로 외부의 흐름이 존재하는 경우와 Wave Envelope Element를 도입하여 계산한 외부음향장 문제의 수치결과를 통해 타당한 결과를 얻을 수 있었으며 이를 통해 추후 과제로서 복잡한 형상을 갖는 물체 내부에 음원이 존재하거나 또는 물체 표면의 투과율이 다른 구조물의 내부 및 외부음향장 해석이 가능하게 되었다.

참고 문헌

- (1) R. K. Sigman, R. K. Majjigi, and B.T.Zinn, "Determination of Turbofan Inlet Acoustics Using Finite Elements", AIAA, Vol.16, No.11, 1978, pp.1139-1145
- (2) Astley, R.J. and Eversman, W., "Finite Element Formulations for Acoustical Radiation", Journal of Sound and Vibration, Vol.88, No.1, pp47-64
- (3) Walter Eversman, "Radiated Noise of Ducted Fans", DGLR/AIAA 92-02-139, pp.836-845
- (4) C. Golia, F.Scaramuzzino, "F.E.M. Analysis of Acoustic Propagation in Duct Compressible Flows", DGLR/AIAA 92-02-056, pp.356-3605.
- (5) P. Bettess and O.C. Zienkiewicz, "Diffraction and Refraction of surface waves using finite and infinite element". Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.11, 1977, pp.1271-1290
- (6) Paul P. Lynn, and Hassoun A. Hadid, "Infinite Elements With $1/r^n$ Type Decay", Int. J. Num. Meth. Engng, Vol.17 1981, pp.347-355
- (7) Jean-Pierre G. Coyette, "Validation of a New Envelope Formulation for Handling Exterior Acoustic and Elasto-Acoustic Problems in the Frequency Domain" DGLR/AIAA 92-02-073, pp 421-427