

# 회전하는 외팔 사각판의 굽힘진동 해석

## Analysis of the Flexural Vibrations for the Rotating Cantilevered Rectangular Plates

0 이 종민\*      이 영신\*\*  
 Jong-Min Lee    Young-Shin Lee

### 1. 서    론

#### 1.1 연구의 필요성 및 목적

터빈 블레이드와 같이 회전하는 구조물의 파단은 공진 근처에서 진동이 발생할 때에 이에 기인하는 피로에 의하여 발생한다. 그러므로 이와 같은 파단을 피하기 위해서는 설계 단계에서 이론적인 계산에 의하여 구조물의 고유진동수를 결정하는 것이 상당히 중요하다. 판이 회전을 받게되면 원심력에 의하여 판의 강성이 증가하므로 고유진동수가 회전하지 않는 판의 고유진동수보다는 상당히 증가하게 된다. 이에 대한 연구가 국내외에서 상당수 행하여졌지만, 연구의 대부분이 회전의 영향을 고려하지 않은 정지판(stationary plate)에 대한 것이며 회전을 고려한 연구는 극히 제한되어 있다. 또한 회전의 영향을 고려한 연구의 대부분이 해석 대상을 보로서 단순화시켰고 해법으로는 유한요소법과 Ritz 법등을 사용하였다. 이는 블레이드가 지니고 있는 기하학적인 형상과 진동 특성이 해석적인 방법으로 해결하는 데에는 상당한 어려움이 있기 때문이다. 실제적으로는 터빈 블레이드와 같은 회전체의 진동 특성이 설 치각이나 비틀림각, 판의 형상비, 회전속도 등의 변화에 의하여 영향을 받기때문에 보와 같은 진동 거동을 보이기보다는 판이나 셸과 같은 진동 거동을 보이므로 보다 정확한 해석을 수행하기 위해서는 해석 대상을 판이나 셸로서 취급하는 것이 타당하다.

따라서 본 연구에서는 위와 같은 이유때문에 해석 대상을 등방성 사각판과 직교이방성 복합재료 사각판으로 선택하였으며, 구조물의 고유진동수에 영향을 미치는 다음과 같은 인자들을 해석에 고려하였다.

1. 회전 속도(rotational speed)
2. 설치각(setting angle)
3. 허브의 반경(hub radius)
4. 판의 형상비(aspect ratio)
5. 적층순서(stacking sequence)

#### 1.2 국내외 연구 동향

많은 연구자들이 판이 회전을 수행할때에 회전이 판의 고유진동수에 미치는 영향을 연구했다.

Leissa<sup>(1)</sup>는 사각판과 원판 등과 같이 다양한 형

상을 지니고 있는 판들에 대하여 경계조건들이 변화 할때에 판의 진동에 대한 해석 결과들을 제시한 논문들을 체계적으로 정리하였다. Wang<sup>(2)</sup> 등은 회전하는 사각판의 자유진동 해석에 회전 속도와 설치각, 허브의 크기, 형상비 등을 고려하고 확장된 Galerkin 해법을 사용하여 등방성 판과 직교이방성 판에 대한 해석을 수행하였다.

Wang<sup>(3)</sup>은 회전관성과 전단변형효과를 설명하기 위하여 비틀림을 가지고 있는 블레이드의 운동 미분 방정식을 전개하였으며, 회전하는 외팔 사각판에서 원심력에 의한 내평면 합응력을 구하기 위하여 판의 평형방정식에 Airy 응력 함수를 도입하였다.

Wang<sup>(4)</sup> 등은 직교이방성 재질로 만들어진 판의 한 단이 허브의 림에 고정되어 있고 다른 세 단은 자유단일때에 대하여 예응력 상태에서의 내평면 변위 지배방정식을 유한차분법을 사용하여 해결하였고, 고유진동수를 결정하는데 사용되는 행렬을 생성하기 위해서는 확장된 Galerkin 법을 적용하여 해석을 수행하였다.

Crawley<sup>(5,6)</sup> 등은 Partial Ritz 법과 유한요소법 등의 해석 기법을 사용하여 알루미늄으로 구성된 등방성 외팔판과 복합재료 외팔판, 그리고 알루미늄과 복합재료가 혼합적층된 외팔판의 고유진동수를 결정하였다.

이영신<sup>(7)</sup> 등은 단면이 지수함수적으로 변하는 회전 외팔보에서 온도구배와 형상비의 변화가 굽힘진동에 미치는 영향을 고려하여 해석을 수행하였다.

### 2. 해    석

#### 2.1 해석 모델

회전하는 사각판의 고유진동수를 결정하는데 고려된 대상의 기하학적 형상과 기호들이 Fig.1 에 보여져 있다.

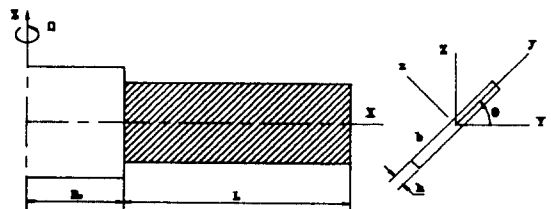


Fig.1 Geometry and coordinate system

Fig.1 에서  $\Omega$ 는 회전속도를 표시하고, L은 판의

\* 충남대학교 기계설계공학과 대학원

\*\* 충남대학교 기계설계공학과 교수, 정회원

길이,  $R_0$ 는 허브의 반경,  $2b$ 는 판의 폭,  $h$ 는 판의 두께,  $\theta$ 는 설치각을 나타낸다. 판은 한 단이 허브의 틈에 완전 구속되어 있으며 다른 세 단은 자유단이다. 판의 길이 방향을 X-축, 폭의 방향을 Y-축으로 취하였고, X-Y 평면에 수직한 축을 Z-축으로 설정하였다. 해석을 단순화하기 위하여 판은 X-축과 Y-축에 대하여 대칭이고, Z-축에 대하여 속도  $\Omega$ 로 회전한다고 가정하였다. 해석에 사용된 판은 등방성 판과 대칭으로 6 층이 적층된 복합재로 판이다.

## 2.2 관련 이론

해석에서는 원심가속도의 영향에 의하여 발생하는 예응력 평형상태에 대한 미소진동을 고려하였다. 진동이 발생하기 이전에 회전에 의하여 횡변형이 존재하지만, 해석에서는 진동 이전의 상태에 대해서는 단지 내평면 상태의 응력만을 고려한다. 본 연구에서는 등방성 판과 대칭적으로 적층된 직교이방성 복합재료 판의 굽힘 진동만이 연구되었고, 비틀림과 굽힘의 연성 효과가 포함되었다.

판의 회전에 기인하는 내평면 응력을 결정하기 위한 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -\rho h \Omega^2 (x + R_0) \quad (1)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -\rho h \Omega^2 y \cos^2 \theta \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

식 (1)과 식 (2)는 판의 평형방정식을 나타내며 식 (3)은 적합방정식을 나타낸다. 그리고 식 (4)와 식 (5)는 이방성 판의 내평면 응력-변형률 관계식을 나타낸다.  $N_x$ ,  $N_y$  와  $N_{xy}$ 는 합응력이고,  $\varepsilon_x$  와  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ 는 중앙면에서 각 방향의 변형률을 나타내며  $\rho$ 는 재료의 밀도이다. 식 (4)와 식 (5)에 있는  $A_{ij}$  와  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ )에 대한 계수 행렬들은 재료의 물성 상수들이다.

내평면 합응력을 결정하기 위하여 다음과 같은 Airy 응력 함수  $f$ 를 도입한다.

$$N_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \rho h \Omega^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 + R_0 x \right] \quad (6)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \rho h \Omega^2 y^2 \cos^2 \theta \quad (7)$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (8)$$

식 (6~8)은 평형방정식 (1)과 (2)를 만족시킨다. Airy 응력함수를 다항식의 합으로 가정하고 식 (6~8)을 식 (5)에 대입하여 얻은 관계식을 식 (3)에 대입하여 순환관계식을 적용하면 다음과 같은 Airy 응력함수  $f$ 와 내평면 합응력  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ 를 구할 수 있다.

$$f = \rho h \Omega^2 \left[ \frac{a_{21}}{24a_{11}} (1 + \cos^2 \theta) y^4 + \frac{1}{4} b^2 x^2 \cos^2 \theta + \left[ \frac{1}{2} (-L^2 + R_0 L) y^2 - \frac{a_{21}}{6a_{11}} b^2 (1 + \cos^2 \theta) y^2 \right] \right] \quad (9)$$

$$N_x = \frac{1}{2} \rho h \Omega^2 \left\{ \left[ (L^2 - x^2) + 2R_0 (L - x) \right] + \frac{a_{21}}{a_{11}} \left[ 1 + \cos^2 \theta \right] \left[ y^2 - \frac{b^2}{3} \right] \right\} \quad (10)$$

$$N_y = \frac{1}{2} \rho h \Omega^2 \cos^2 \theta (b^2 - y^2) \quad (11)$$

$$N_{xy} = 0 \quad (12)$$

다음과 같은 무차원 양들을 도입하면

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \Delta = \frac{L}{b}, \quad R = \frac{R_0}{L},$$

$$r = \frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad C = \sin^2 \theta, \quad k^2 = \frac{\rho h L^4 \Omega^2}{D_{11}},$$

$$N_1 = \frac{N_x L^2}{D_{11}}, \quad N_2 = \frac{N_y L^2}{D_{11} b^2} \quad (13.a \sim i)$$

위에서 유도된  $N_x$  와  $N_y$ ,  $N_{xy}$ 의 예응력 상태에 대하여 판의 조화 운동에 근거한 굽힘 진동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 4\bar{D}_{16} \Delta \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + 2(\bar{D}_{12} + 2\bar{D}_{66}) \Delta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + 4\bar{D}_{26} \Delta^3 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} + \bar{D}_{22} \Delta^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \left[ \lambda^2 + Ck^2 \right] w = 0 \quad (14)$$

여기에서,  $\bar{D}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ )는  $D_{11}$ 으로 무차원화시킨 굽힘강성을 나타내며  $\lambda^2$ 는 무차원화시킨 판의 고유진동수를 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda^2 = \frac{\rho h L^4 \omega^2}{D_{11}} \quad (15)$$

고정단에서의 경계조건은

$$w = \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad \text{along } \xi = 0 \quad (16)$$

이다. 한편 자유단( $\xi=1$ )에서의 경계조건은

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \bar{D}_{12} \Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2\bar{D}_{16} \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (\bar{D}_{12} + 4\bar{D}_{66}) \Delta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} - N_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ + 4\bar{D}_{16} \Delta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + 2\bar{D}_{26} \Delta^3 \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

이며, 회전판의 상하면( $\eta=\pm 1$ )에서는

$$\bar{D}_{22} \Delta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \bar{D}_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 2\bar{D}_{26} \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{22} \Delta^3 \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (\bar{D}_{12} + 4\bar{D}_{66}) \Delta \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} - N_2 \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ + 4\bar{D}_{26} \Delta^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + 2\bar{D}_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

이다. 또한 자유단의 상하면( $\xi=1, \eta=\pm 1$ )에서는

$$2\bar{D}_{66} \Delta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (21)$$

이다.

### 2.3 유한요소법에 의한 해석

본 연구에서의 해석은 상용 유한요소 프로그램인 ANSYS 를 사용하여 수행하였다. ANSYS의 전처리 과정(preprocessing stage)에서는 회전하는 등방성 외팔 사각판과 복합재료 외팔 사각판을 모델링하였으며, 모델링시에 사용된 요소의 종류는 등방성 판인 경우에는 4 node quadrilateral shell element (STIF 63)이고 복합재료 판에서는 8 node layered shell element (STIF 91)를 사용하였다. 각각의 요소에 대한 형태를 Fig.2와 3에 제시했다.

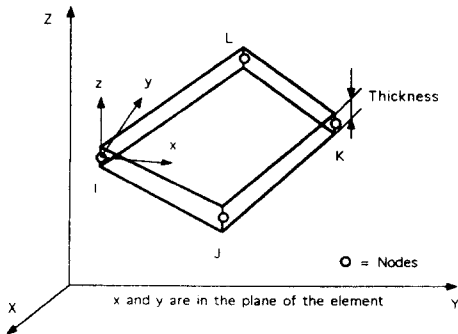


Fig.2 4 node quadrilateral shell element (STIF 63)

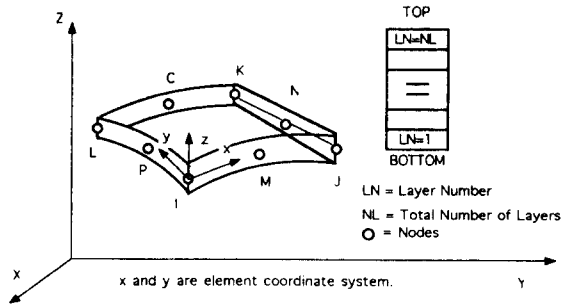


Fig.3 8 node layered shell element (STIF 91)

모델링시에 변수로 설정한 요소는 등방성 판에서는 회전 속도와 형상비, 설치각, 허브의 반경이며, 복합재료의 경우에는 형상비 L/b를 8로 고정하고 적층순서를 변수로 선택하여 해석 과정(solving stage)에서 계산을 수행하였다. 해석에서 계산된 결과들을 토대로 하여 후처리 과정(postprocessing stage)에서는 고유진동수와 모드 형상을 구하였다.

해석에서 고려한 등방성 재료는 알루미늄이며 복합재료는 Glass/epoxy 이다. 각각의 재료에 대한 물성치를 Table 1.과 2.에 제시하였다. 해석에 사용된 요소의 수는 판의 형상비에 의하여 결정이 되며 등방성 판에 대해서는 약 50 개 정도이고, 복합재료의 경우에는 64 개이다. 총 자유도의 수는 등방성 판에 대해서는 약 400 정도이고, 복합재료의 경우에는 798 이다.

### 3. 결과 및 토의

해석에서는 형상비와 설치각, 허브의 반경, 회전 속도, 적층 순서등을 변수로 하여 고유진동수를 산출하였다. 해석 순서는 회전하지 않는 판에 대한 해석을 수행하여 해석의 수렴성을 검증한 후에 회전하는 판에 대하여 해석을 수행하였다.

#### 3.1 회전하지 않는 외팔 사각판

회전하지 않는 등방성 외팔 사각판에 대한 본 연구의 해석 결과를 Fig.4에 제시하였다. 결과는 R을 1, 설치각은 0°로 하여 형상비 L/b를 2부터 10까지 변화시켰을때 고유진동수의 변화를 도시한 것이며 형상비가 증가할수록 각 모드에 대한 진동수가 감소함을 알 수 있다. 모드형상들을 관찰해보면 형상비가 작은 경우에는 익힌방향의 굽힘이 발생함을 볼 수 있었고, 형상비가 높아짐에 따라 각 모드의 형상이 변화하는 것을 볼 수 있었다.

Fig.5는 7 가지의 적층순서로 적층된 복합재료 외팔판에 대한 각 모드의 고유진동수를 도시하고 있다. 그림에서 보여주고 있는 바와 같이 적층이 [0<sub>2</sub>/90]<sub>n</sub>일때가 가장 높은 값들을 나타내고 있다. 하지만 적층 순서에 따라 굽힘강성계수가 다르므로 식 (21)에 의하여 고유진동수를 무차원화 시키면 거의 유사한 값들을 갖는다. 복합재료에 대한 모드형상 역시 적층각의 각도가 증가함에 따라 모드의 형상이 변화함을 볼 수 있었다.

### 3.2 회전하는 외팔 사각판

등방성 판이 회전을 하는 경우에 대한 결과들을 Table 3. 과 4. 그리고 Fig.6~8에 제시하였다. Table 3.은 정사각형 판에 대하여 회전속도와 허브의 반경이 변화할때에 대한 결과이며 무차원화시킨 진동수 매개변수로 표시하였다. 회전속도가 낮은 경우에 대해서는 진동수가 허브 크기의 증가에 거의 영향을 받지 않지만 회전속도가 높아짐에 따라 허브의 크기에 대하여 1차 모드에 대한 진동수는 크게 영향을 받고 고차로 갈수록 거의 영향을 받지 않는 경향을 볼 수 있다. Fig.6은 위에서 언급한 결과를 실제 고유진동수로서 도시한 것이다. Table 4.는 형상비와 회전속도의 변화에 의하여 고유진동수가 어떠한 경향을 보이는가를 제시한 것으로 같은 회전속도에 대해서 형상비가 증가할수록 무차원화시킨 진동수가 크게 증가함을 보이고 있다. Fig.7은 회전속도가 3000 rpm일때 형상비의 변화에 대한 실제 고유진동수의 경향을 도시한 것으로 형상비가 2일때에 고유진동수가 크게 증가하며 형상비의 증가에 따라 고유진동수의 증가폭이 급격히 저하됨을 나타내고 있다. Fig.8은 정사각형 외팔판에서 허브의 크기가 일정할 때 회전속도와 설치각의 변화에 대한 1차 고유진동수의 경향을 도시한 것으로 회전속도가 낮을 때에는 고유진동수가 설치각의 각도 증가에 의한 영향을 전혀 받지 않고, 회전속도가 증가할 때에는 설치각이 증가함에 따라 고유진동수가 미소하나마 저하되는 경향을 보여주고 있다.

회전하는 복합재료 판에 대한 결과들을 Table 5.와 6. 그리고 Fig.9 와 10에 제시하였다. Table 5.는 판이 [0<sub>2</sub>/90]<sub>s</sub>으로 적층되어 있을때 회전속도와 허브 크기의 변화에 대하여 무차원화시킨 진동수의 경향을 보이고 있다. 일반적으로 허브의 크기와 회전속도의 증가에 의하여 무차원화시킨 진동수가 증가하는 경향을 보이고 있다. Table 6.은 동일 결과들을 [90<sub>2</sub>/0]<sub>s</sub> 적층에 대하여 제시한 것이며, 같은 경향을 보이고 있다. Table 5.와 6.으로부터 허브의 크기가 증가함에 따라 인접한 2 개의 모드의 진동수들이 거의 같은 값으로 되는 것을 볼 수 있다. Fig.9는 회전속도가 3000 rpm이고 허브의 크기가 일정할때 7가지 경우의 적층에 대한 무차원화시킨 진동수의 경향을 도시한 것으로 적층각의 증가에 따라 진동수가 증가하는 경향을 보이고 있다. 그림에서 볼 수 있듯이 [0<sub>2</sub>/90]<sub>s</sub> 적층과 [15<sub>2</sub>/0]<sub>s</sub> 적층의 진동수가 거의 같은 값을 갖고, [75<sub>2</sub>/0]<sub>s</sub> 적층과 [90<sub>2</sub>/0]<sub>s</sub> 적층 역시 거의 일치함을 볼 수 있다. 또한 각각의 적층에 대하여 1차와 2차 모드, 3차와 4차 모드의 값들이 거의 유사함을 볼 수도 있었다. Fig.10은 3가지 적층에 대하여 회전속도와 허브의 크기가 증가할때 무차원화시킨 1차 진동수에 대한 결과들을 도시한 것이며 허브의 크기보다는 회전속도의 증가에 따라 진동수가 증가함을 보여주고 있다.

### 4. 결 론

회전하는 외팔 사각판의 진동에 형상비와 설치각, 허브 반경의 크기, 적층 순서 등을 고려하여 상용

유한 요소 프로그램인 ANSYS 로 해석을 수행함으로써 다음과 같은 결론들을 얻을 수 있다.

- (1) 회전의 영향을 받는 등방성 외팔 사각판의 경우, 고유진동수는 주로 회전속도와 형상비의 변화에 의하여 영향을 받으며 허브의 크기에는 약간의 영향을 받고 설치각에는 거의 영향을 받지 않는다.
- (2) 적층된 복합재료 외팔 사각판의 진동 거동에 회전의 영향이 포함될 경우 형상비가 높은 대상을 해석 모델로 선정하였기 때문에 회전 속도의 증가에 의하여 진동수가 증가한다. 따라서 허브 반경에 의한 진동수의 증가 역시 회전속도가 높은 경우에 더욱 뚜렷하다.
- (3) 적층된 복합재료 외팔 사각판은 형상비와 설치각, 회전속도가 일정할 경우 적층각이 증가함에 따라 고유진동수가 약간씩 감소한다.

### 참고문헌

1. A.W. Leissa, 1969, " Vibration of Plates ", NASA SP-160
2. J.T.S.Wang, D.Shaw, and O.Mahrenholtz, 1987, " Vibration of Rotating Rectangular Plates ", Journal of Sound and Vibration, Vol.112, No.3, pp.455~468
3. J.T.S. Wang, 1974, " Equations for the Vibration of a Rotating Blade ", Mechanical Research for Communication, Vol.1, pp.341~346, Pergamon Press
4. D. Shaw, K.Y. Shen, and J.T.S. Wang, 1988, " Flexural Vibration of Rotating Rectangular Plates of Variable Thickness ", Journal of Sound and Vibration, Vol.126, No.3, pp.373~385
5. E.F.Crawley and J.Dugdndji, 1980, " Frequency Determination and Nondimensionalization for Composite Cantilever Plates ", Journal of Sound and Vibration, Vol.72, No.1, pp.1~10
6. D.W.Jensen, and E.F.Crawley, 1984, " Frequency Determination Techniques for Cantilevered Plates with Bending-Torsion Coupling ", AIAA Journal, Vol.22, No.3, pp.415~420
7. 이영신, 이명준, 1991, "단면이 지수 함수적으로 변하는 회전 외팔보의 굽힘 진동 해석", 대한기계학회 춘계학술대회 논문집 1, pp.479~482

Table 1. Material properties for the isotropic(A1) plates

Property	Value
Young's Modulus( E )	68.9 GPa
Poisson's Ratio( $\nu$ )	0.3
Density( $\rho$ )	2770 kg/m <sup>3</sup>
Thickness( h )	1.06 mm

Table 2. Material properties for the laminated composite plates

Property		Value
Young's Modulus	E <sub>1</sub>	98.0 GPa
	E <sub>2</sub>	7.9 GPa
Poisson's Ratio( $\nu_{12}$ )		0.28
Shear Modulus ( G <sub>12</sub> )		5.6 GPa
Density( $\rho$ )		1520 kg/m <sup>3</sup>
Ply thickness		0.134 mm

Table 5. Nondimensional frequency parameter  $\lambda$  for the rotating [0<sub>2</sub>/90]<sub>s</sub> laminated composite plates with L/b = 8 and  $\theta = 0^\circ$

$\Omega$	R	mode 1	mode 2	mode 3
1000 rpm	0	6.709	13.723	25.506
	2	11.427	16.266	33.429
	5	16.018	19.401	42.427
3000 rpm	0	17.016	24.882	45.396
	2	32.170	35.680	77.271
	5	46.261	47.231	103.43
5000 rpm	0	27.560	38.351	69.227
	2	53.046	57.055	112.05
	5	76.555	76.714	118.29

Table 3. Nondimensional frequency parameter  $\lambda$  for the rotating square isotropic plates with  $\theta = 0^\circ$

$\Omega$	R	mode 1	mode 2	mode 3
1000 rpm	0	3.508	8.598	21.467
	2	3.573	8.624	21.522
	5	3.668	8.662	21.604
3000 rpm	0	3.701	8.736	21.637
	2	4.223	8.958	22.119
	5	4.901	9.281	22.813
5000 rpm	0	4.060	9.005	21.973
	2	5.283	9.591	23.248
	5	6.704	10.406	24.918

Table 6. Nondimensionalized frequency parameter  $\lambda$  for the rotating [90<sub>2</sub>/0]<sub>s</sub> laminated composite plate with L/b = 8 and  $\theta = 0^\circ$

$\Omega$	R	mode 1	mode 2	mode 3
1000 rpm	0	9.617	21.375	25.874
	2	18.162	26.060	44.051
	5	26.122	31.614	61.546
3000 rpm	0	27.494	40.942	67.701
	2	53.555	59.516	124.56
	5	77.509	79.153	177.81
5000 rpm	0	45.398	63.935	110.78
	2	88.967	95.805	205.67
	5	128.90	129.16	288.89

Table 4. Nondimensional frequency parameter  $\lambda$  for the rotating isotropic plates with R = 1 and  $\theta = 0^\circ$

L/b	$\Omega$	mode 1	mode 2	mode 3
2	1000 rpm	3.530	8.584	21.427
	3000 rpm	3.961	8.821	21.814
	5000 rpm	4.703	9.269	22.536
6	1000 rpm	6.632	22.249	25.243
	3000 rpm	10.061	28.955	45.149
	5000 rpm	27.794	38.865	69.099
10	1000 rpm	15.865	38.691	42.529
	3000 rpm	45.732	63.948	110.45
	5000 rpm	75.701	95.564	180.76

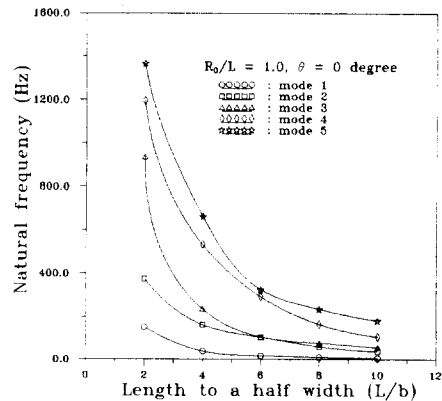


Fig.4 First five natural frequencies for the nonrotating isotropic plates with the varying aspect ratios

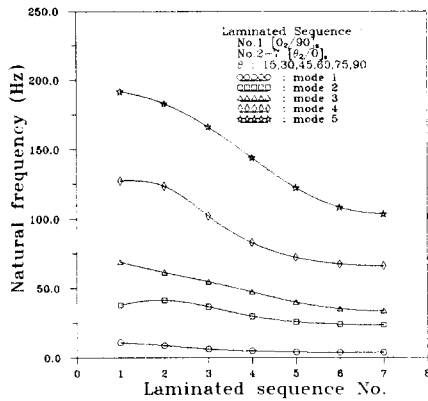


Fig.5 First five natural frequencies for the nonrotating composite plates according to the laminated sequences

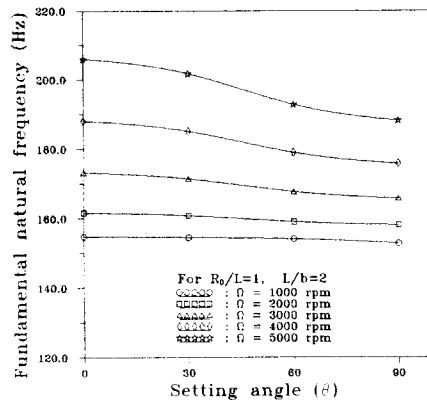


Fig.8 First five fundamental natural frequencies for the rotating isotropic plates with the varying setting angles

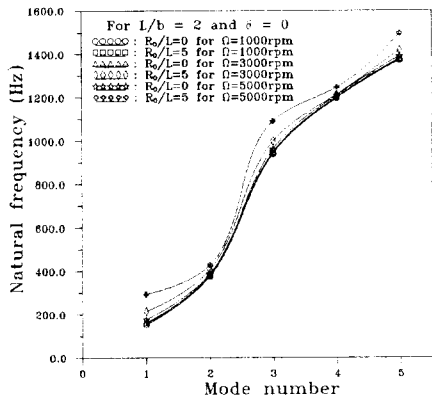


Fig.6 First five natural frequencies for the rotating isotropic plates with the varying hub radius and rotational speeds

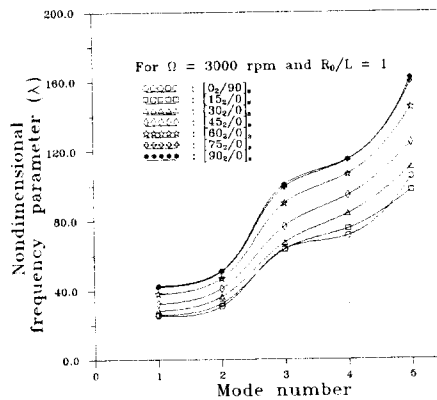


Fig.9 First five nondimensional natural frequency parameters for the rotating composite plates according to the laminated sequences

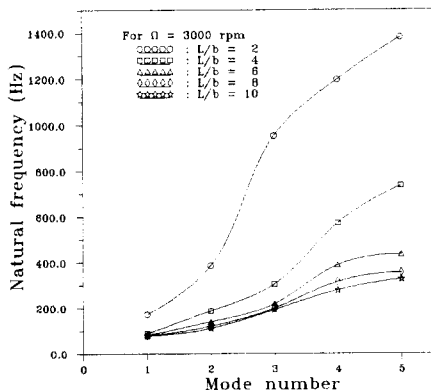


Fig.7 First five natural frequencies for the rotating isotropic plates with the varying aspect ratios

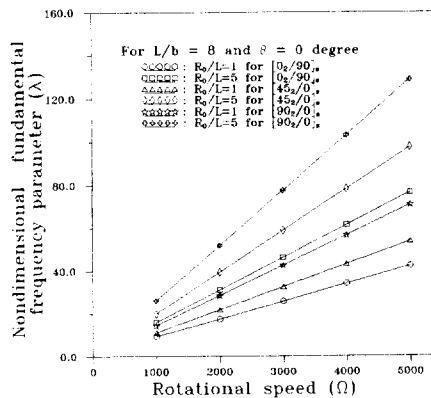


Fig.10 First five nondimensional fundamental natural frequency parameters for the rotating composite plates with the varying hub radius and laminated sequences