

# 임의 조건으로 성형되는 박판의 평면변형률 해석

금 영 탁, 이 승 열, R. H. Wagoner  
( 한국과학기술연구원 CAD/CAM실 ) ( O. S. U. )

Plane Strain Analysis of Thin Sheet Forming with Arbitrary Conditions

## ABSTRACT

The plane strain analysis for simulating the stretch/draw forming operation of arbitrarily-shaped tool profiles and arbitrarily draw-in conditions is introduced. An implicit, incremental, updated Lagrangian formulation is employed, introducing a rigid-viscoplastic constitutive equation. Contact and friction are considered through the mesh-normal, which compatibly describes arbitrary tool surfaces and FEM meshes without depending on the explicit spatial derivatives of tool surfaces. The FEM formulation is tested in the sections of automotive inner panel and two-side draw-in. Not only the excellent agreement between measured and computed strains in the stretched section is obtained, but also the numerical stability of current formulation is verified in the two-side draw-in section.

## 1. 서론

판재성형 공정은 오늘날 가장 널리 사용되는 소성가공 분야중의 하나이다. 판재성형의 성패를 좌우하는 요소는 금형형상, 프레스 작업조건(윤활, 펀치속도, binder wrap의 구속조건 등) 및 재료등급( $n$ ,  $r$ , LDR, CCV, FLD 등) 등으로 분류된다. 재료 생산자가 고등급의 재료를 생산하는데는 제한이 있으며, 성형품 생산자는 원가절감 측면에서 가능한 한 저등급의 재료를 요구하므로 재료등급의 조정에는 한계가 있다. 따라서 금형형상이나 프레스 작업조건을 최적화하는 것이 선행되어야 한다.

최근에 금형개발에서 소요되는 시간과 비용을 줄이기 위하여, 성형공정 유한 요소 해석에 근거를 두고 금형설계를 수정하는 컴퓨터를 이용한 금형개발 시스템이 자동차 회사들에 의하여 도입되고 있다. 유한요소법을 이용한 박판의 성형 공정 해석은 공정중 박판의 변형된 모양, 성형부하, 변형률, 응력분포 그리고 성형조건을 예측할 수 있다. 유한요소 해석은 금형의 도형정보, 박판의 물성치, 펀치운동, 마찰상태, 그리고 박판재료의 유한요소 정보를 입력 파라미터로 한다. 해석결과에 따라 금형도형을 수정하거나 작업조건을 변경하고 경우에 따라서 재료의 등급을 조정한다.

대부분의 박판 성형해석은 3차원적으로 이루어져야 한다. 그러나, 3차원 해석은 계산시간이 방대하고 경계조건을 정하기 어려울 뿐만 아니라 금형도형 데이터를 준비하기가 까다롭다(1-2). 한편, 평면변형률(plane strain) 상태의 단면 성형해석은 금형설계를 신속하고 안정되게 평가하며 해석결과를 쉽게 분석할 수 있는 장점이 있다. 금형설계의 평가에 단면 성형해석이 좋은 지침이 된다는 것을 Wagoner와 Keeler가 예증하였다(3-4).

임의의 성형조건으로 변형하는 박판재를 시뮬레이션하기 위하여 이용된 가정들을 열거하면 다음과 같다. 첫번째로, 탄성변형을 무시하고 성형속도를 감안하는 점 강소성(rigid-viscoplastic) 재료를 모델로 하였다. 둘째로, 박막이론(membrane theory)이 이용되고, 박판 면에 수직인 방향의 응력이 없는 평면응력(plane stress) 상태를 가정하였다. 셋째로, 수정된 쿨롬 마찰 법칙(modified Coulomb friction law)을 사용하여 박판과 금형간의 마찰현상을 기술하였다. 박판과 금형의 접촉점에서 접선변위가 작아짐에 따라 마찰력이 점진적으로 사라지도록 작은 접선변위 역에서 쌍곡선 함수가 이용되었다. 넷째로, 박판은 수직 이방성(normal anisotropy)을 갖는다. 이 성질은 항복면을 통하여 수직 이방성 계수( $r$ )와 Hill의 항복함수 파라미터( $M$ )로 반영된다. 다섯째, 박판이 소성변형을 하는 동안 항복함수는 등방성으로 변한다. 여섯째, 시간분할과 부합되는 소성증분이론(incremental deformation theory)이 사용되었다. 이 가정은 미소시간 동안 이루어진 소성일을 최소로 하는 소성경로를 지정하여 종래의 흐름이론(flow theory)을 수정한다. 이 소성변형 경로의 선정으로 유효변형률 증분은 변형률 증분만의 함수로 표현할 수 있다. 따라서, 응력은 변위증분량만의 함수가 된다. 끝으로, 평면변형률 상태가 가정되었다. 단위 폭의 강대(strip)가 폭 방향으로 변형을 하지 않고 길이 방향으로만 스트레칭 된다.

본 연구에서 임의의 조건으로 성형되는 박판의 성형공정을 신속히 시뮬레이션하기 위한 유한요소법을 개발하고 자동차 내부판넬의 성형단면을 수치해석하여 측정치와 비교한다. 또한, 개발된 프로그램의 수치해석 안정성을 점검하기 위하여 역 드로우잉이 발생하는 임의의 형상의 금형단면을 해석한다.

## 2. 소성구성 방정식

### 2.1 항복조건

수직 이방성을 고려한 재료의 거동을 예측하기 위하여 Hill의 새로운 항복이론(5)을 도입하면 응력장의 항복조건식은 다음과 같이 표시된다.

$$\bar{\sigma} = C_1 [ |\sigma_1 + \sigma_2|^M + C_2 |\sigma_1 - \sigma_2|^M ]^{\frac{1}{M}} \quad (1)$$

여기서,  $\bar{\sigma}$  는 유효응력,  $\sigma_1, \sigma_2$  는 주응력이고,  $C_1 = [2(1+r)]^{\frac{1}{M}}$ ,  $C_2 = 1 + 2r$  이다. 본 연구의 유한요소 방정식에 항복조건을 도입하기 위하여 응력장의 항복조건식을 변형률 속도장의 항복조건식으로 아래와 같이 변환시킨다. 식 (1)을 항복면의 수직성 원리(6)와 소성일의 등가법칙(7)을 이용하여 변형률 속도장의 항복조건식으로 변환시키면 다음과 같다.

$$\dot{\bar{\epsilon}} = D_1 \left\{ |\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2|^{\frac{1}{M-1}} + D_2 |\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2|^{\frac{M}{M-1}} \right\}^{\frac{M-1}{M}} \quad (2)$$

여기서,  $D_1 = \frac{1}{2} [2(1+r)]^{\frac{1}{M}}$  이고,  $D_2 = [1+2r]^{\frac{-1}{M-1}}$  이다.

평면변형률(  $\dot{\epsilon}_2 = 0$ ,  $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3$  )로 가정하면 식 (2)는 다음과 같이 표시된다.

$$\dot{\bar{\epsilon}} = D_1 (D_2 + 1)^{\frac{M-1}{M}} |\dot{\epsilon}_1| \quad (3)$$

## 2.2 변형경화

본 연구에서 사용된 변형경화 법칙은 등방성 경화로 가정되며, 실험치로부터 결정되는 대표적인 응력-변형률 관계식으로서 다음과 같다.

$$\bar{\sigma} = K (\bar{\epsilon} + \epsilon_0)^n (\dot{\bar{\epsilon}} / \gamma)^m \quad (4)$$

여기서,  $\bar{\sigma}$  와  $\bar{\epsilon}$  (  $= \int \dot{\bar{\epsilon}} dt$  )는 유효응력과 유효변형률이고,  $K$ ,  $n$ ,  $m$ 는 각각 강도계수, 가공경화 지수와 변형률속도 민감도 지수이다. 또한  $\gamma$ 는 기초 변형률속도(base strain rate)이고,  $\epsilon_0$ 는 이전 변형률(pre-strain)이다.

## 3. 유한요소 수식화

### 3.1 평형 방정식

평형 방정식은 가상일의 원리(virtual work principle)로부터 유도된다. 최소에너지 경로(2)를 따라 미소시간  $\Delta t$  동안 이루어진 소성일량  $\Delta W_p$ 는 다음과 같다.

$$\Delta W_p = \int_{V_0} \int_{\bar{\epsilon}_0}^{\bar{\epsilon}_0 + \Delta \bar{\epsilon}} \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}) d\bar{\epsilon} dV_0 \quad (5)$$

여기서,  $\bar{\epsilon}_0$ 는  $t_0$ 에서 유효변형률 이고,  $\Delta \bar{\epsilon}$  는 미소한 시간  $\Delta t$  동안 증가한 유효변형률 증분으로 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \bar{\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \dot{\varepsilon} dt \quad (6)$$

한편, 식 (3)을 사용하고 수직 이방성 박막이론에 Damamme 이론<sup>(8)</sup>을 일반화 하면<sup>(2)</sup> 유효변형률 증분은 식 (6)으로 부터 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta \bar{\varepsilon} = D_1 (D_2 + 1)^{\frac{M-1}{M}} \cdot |\Delta \varepsilon_1| \quad (7)$$

식 (5)를 가상일의 원리에 적용하고 절점의 가상 변위값은 공간좌표 파라메타의 함수가 아님을 고려할 때 평형 방정식이 다음과 같이 유도된다<sup>(9-14)</sup>.

$$F_i(\Delta u) = F_e(\Delta u) \quad (8)$$

여기서,  $F_i$ 는 소성변형에 대한 내부 저항력이고,  $F_e$ 는 금형과의 접촉에 의한 외부 접촉력이다.

### 3.2 유한요소 식

테일러(Taylor) 급수로 식 (8)을 전개하고 선형화를 위하여 2차 이상의 미분항들을 무시하면, 다음과 같은 뉴턴랩슨(Newton-Raphson) 방정식을 얻을 수 있다<sup>(9)</sup>.

$$K \cdot \delta u = F_e - F_i \quad (9)$$

여기서,  $K$ 는 시도변위 증분 ( $\Delta u^*$ )으로 표현되는 강성행렬로서 다음과 같이 표현된다.

$$K = K_i - K_e = \left( \frac{\partial F_i}{\partial \Delta u} - \frac{\partial F_e}{\partial \Delta u} \right) \Big|_{\Delta u^*} \quad (10)$$

식 (10)에서  $\delta u$ 는 평형상태에서 "0"인 값을 갖는 수정 변위증분 벡타이고,  $F_i$ 는 식 (5)로 부터 다음과 같이 유도된다.

$$F_i = \int_{V_0} \bar{\sigma} \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}}{\partial \Delta u} \Big|_{\Delta u = \Delta u^*} dV_0 \quad (11)$$

식 (11)을 변위증분  $\Delta u$ 에 관하여 미분하면  $K_i$ 는 다음과 같다.

$$K_i = \frac{\partial F_i}{\partial \Delta u} \Big|_{\Delta u = \Delta u^*}$$

$$= \int_{V_0} \left\{ \bar{\sigma} \frac{\partial^2 \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta u^2} + \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}} \right) \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta u} \cdot \frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta u} \right\} \Big|_{\Delta u = \Delta u^*} dV_0 \quad (12)$$

여기서,  $\bar{\sigma}$ ,  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\epsilon}}$  및  $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\bar{\epsilon}}}$ 는 항복조건, 유동법칙 및 경화법칙으로 부터 계산되고,  $\frac{\partial \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta u}$  와  $\frac{\partial^2 \Delta \bar{\epsilon}}{\partial \Delta u^2}$  는 식 (7)의  $\Delta \bar{\epsilon}$  를 유한 선요소의 절점좌표로 표시하고 변위 증분  $\Delta u$  에 관하여 미분함으로써 얻어진다<sup>(9)</sup>(13).

또한,  $F_e$ 는 금형과 접촉되는 절점에서 쿠름 마찰력에 의한 외력으로 다음과 같이 표현된다.

$$F_e = F_n (\mu \cdot \phi(\Delta u_t) \cdot t + n) \Big|_{\Delta u = \Delta u^*} \quad (13)$$

여기서,  $F_n$ 과  $\mu$ 는 각각 접촉력의 수직성분과 마찰계수이고,  $t$ 와  $n$ 은 금형과 박판이 접촉되는 절점에서 접선벡터 및 수직벡터이다. 식 (12)에서  $\phi$ 는 펀치(punch) 운동에 대한 절점의 상대변위 ( $\Delta u_t$ )로 기술되는 함수이다<sup>(9)</sup>.

따라서, 식 (10)의  $K_e$ 는 식 (13)을 사용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_e &= \frac{\partial F_e}{\partial \Delta u} \Big|_{\Delta u^*} \\ &= \left[ \mu \left( \frac{\partial \phi(\Delta u_t)}{\partial \Delta u} t + \phi(\Delta u_t) \frac{\partial t}{\partial \Delta u} \right) + \frac{\partial n}{\partial \Delta u} \right] F_n \Big|_{\Delta u^*} \\ &\quad + \left\{ \mu \phi(\Delta u_t) t + n \right\} \frac{\partial F_n}{\partial \Delta u} \Big|_{\Delta u^*} \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)과 식 (14)에서 단위 수직벡터  $n$  과 단위 접선벡터  $t$  는 유한 선요소의 절점위치로 부터 다음과 같이 정의된다<sup>(9)</sup>(13).

$$n = \frac{a}{ZN} \begin{Bmatrix} Z_x \\ -1 \end{Bmatrix}; \quad ZN = \sqrt{Z_x^2 + 1} \quad (15)$$

$$t = \frac{1}{ZN} \begin{Bmatrix} 1 \\ Z_x \end{Bmatrix} \quad (16)$$

여기서,  $a$ 는 다이에 대하여는 +1 이고 펀치에 대하여는 -1로 정의되며,  $Z_x$ 는 접촉절점에서 경사를 의미한다. 절점의 변위증분에 관한 수직벡터와 접선벡터의 미분치  $\frac{\partial n}{\partial \Delta u}$  와  $\frac{\partial t}{\partial \Delta u}$  는 식(15)와 식 (16)으로 부터 계산된다<sup>(9)</sup>(13).

### 3.3 마찰접촉 알고리즘

시도해로 부터 창출되는 절점들의 위치는 금형내부에 위치하기도 한다. 이러한 절점들은 수치해석 과정에서 금형표면에 위치하도록 투사되어야 한다. 금형내부에 침투된 절점들의 위치를 금형표면으로 투사시키기 위하여 박판 유한요소 수직벡타(mesh-normal vector)와 금형표면과의 교점을 구한다. 접촉절점에서 박판 유한요소에 수직인 단위벡타  $n_o=(n_x, n_z)$ 를 구하고 다음과 같은 비선형 방정식으로부터 길이 파라미터  $t$ 를 풀면 투사되는 점  $(t \cdot n_x, t \cdot n_z)$ 를 발견할 수 있다.

$$S(t \cdot n_x) - t \cdot n_z = 0 \quad (17)$$

여기서,  $S(x)$ 는 금형표면을 함수로 혹은 수치적으로 표시하는 방정식이다.

시간  $t+\Delta t$ 에서 펀치표면에 위치한 절점은 접선방향으로 움직이는 구속조건을 갖는다. 접선방향은 접촉절점에서 경사를 의미하는  $Z_x$ 와 관계된다. 따라서, 접촉절점에서 수정변위 증분  $\delta u=(\delta u_x, \delta u_z)$ 의 구속은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta u_z = Z_x \cdot \delta u_x \quad (18)$$

접촉력 방향  $\Gamma = \mu\phi t + n$ 의 단위벡타 성분을  $(\Gamma_1, \Gamma_3)$ 라 하면, 접촉절점에서 유한요소 평형 방정식은 다음과 같은 과정으로 부터 유도된다.  $a$ 가  $\Gamma$ 의 수직벡타 이라면

$$F_i \cdot a = 0 \quad (19)$$

$a$ 의 정의로 부터  $\Gamma \cdot a = 0$  이기 때문에  $a$ 는 가능한 모든  $x$ 에 대하여  $\Gamma$  성분으로 다음과 같이 표시된다.

$$a = x(1, -\Gamma_1/\Gamma_3) \quad (20)$$

$F_i = (F_x, F_z)$ 를 감안하면, 식 (19)와 식 (20)으로 부터 다음과 같은 스칼라 식이 구해진다.

$$\Gamma_3 \cdot F_x - \Gamma_1 \cdot F_z = 0 \quad (21)$$

따라서, 접촉 조건식인 식 (19)는 식 (21)로 재현된다.

### 3.4 드로우인 해석

드로우인을 시뮬레이션하기 위하여 다음과 같은 수치적 모델을 정의하였다.

$$\begin{aligned}
 F_i < F_d &\rightarrow \text{스트레치} \\
 F_i = F_d &\rightarrow \text{드로우인}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

드로우비드(drawbead) 위치에서 고정된 절점의 내부 저항력( $F_i$ )이 지정된 드로우비드 저항력( $F_d$ )에 도달되기 전에는 박판은 스트레치 상태로 소성변형되고, 내부 저항력이 지정된 드로우비드 저항력에 일단 도달하면 드로우비드 위치에 고정된 절점은 구속상태에서 자유조건으로 바뀌고 일정한 드로우비드 저항력이 계속 유지된다. 이로서, 박판재료는 일정한 드로우비드 저항력을 유지하면서 다이 공간으로 유입될 수 있고, 드로우비드에 위치한 유한요소 절점의 내부 저항력이 지정된 드로우비드 저항력 보다 작아지면 박판은 스트레칭 상태로 환원된다. 따라서, 드로우비드 저항력은  $F_i < F_d$ 일 때  $F_i$ 이고,  $F_i \geq F_d$ 일 때  $F_d$ 이다.

#### 4. 수치해석

##### 4.1 자동차 패널의 스트레치 단면

유한요소 수식화의 타당성을 검증하고 임의의 조건으로 성형되는 박판에 적용할 수 있는지를 검토하기 위하여 자동차 내부패널의 스트레치 단면을 채취하여 개발된 프로그램으로 시뮬레이션하였다. 성형단면의 수학적 표현을 위해 디지털 데이터를 조정점으로 한 미선법이 이용되었다. 해석된 변형률 분포도는 두께방향의 공칭 변형률의 백분률로 표시하였다. 또한, 유한요소 해석결과를 실제 측정치와 비교하기 위하여 성형된 패널의 두께가 측정되고 두께방향의 공칭 변형률이 계산되었다. 수치해석에서 사용된 박강판의 기계적 성질은 다음과 같다<sup>(15)</sup>.

수직이방성 계수 : $r = 1.46$	마찰계수 : $\mu = 0.09$
항복함수 파라미터 : $M = 2.0$	박판두께 : $t = 0.64 \text{ mm}$
응력-변형률 : $\bar{\sigma} = 503(\bar{\epsilon} + 0.004)^{0.2} \text{ (MPa)}$	

유한요소법으로 해석하기 위하여, 박판모델은 스트레칭이 발생하도록 양단을 고정하고 해석단면이 좌우 대칭이므로 우측 절반만 해석하였다. Fig. 1은 해석에 사용된 금형도형을 보여 준다. Fig. 2는 두께방향의 변형률(thinning)을 판재의 최초 위치에 따라 표시한 것이다. 측정된 변형률은 작은 원으로 표시하였다. 유한요소 해석결과와 측정치가 비교적 잘 일치하고 있다. 따라서 개발된 프로그램은 단면의 성형해석을 비교적 정확하게 시뮬레이션하므로 해석에 도입된 유한요소 수식화가 타당하다는 것을 알 수 있다.

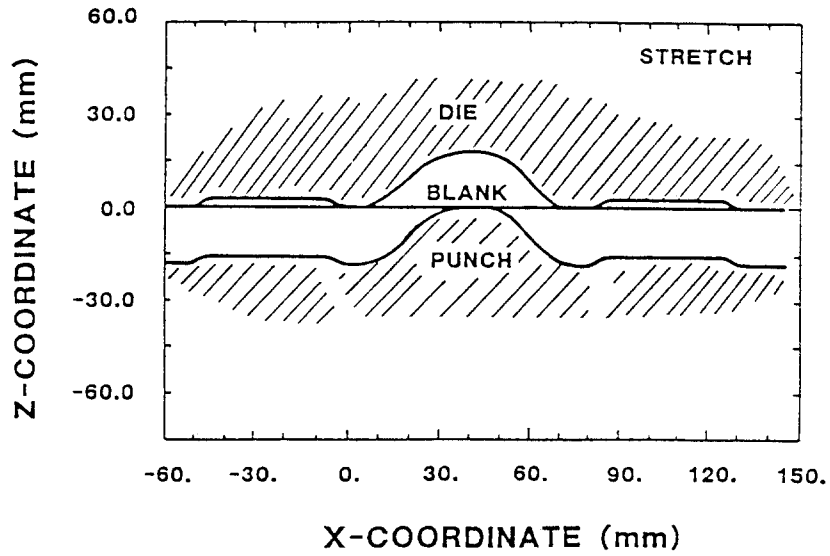


Fig. 1 Tooling geometry for analyzing the automotive inner panel section.

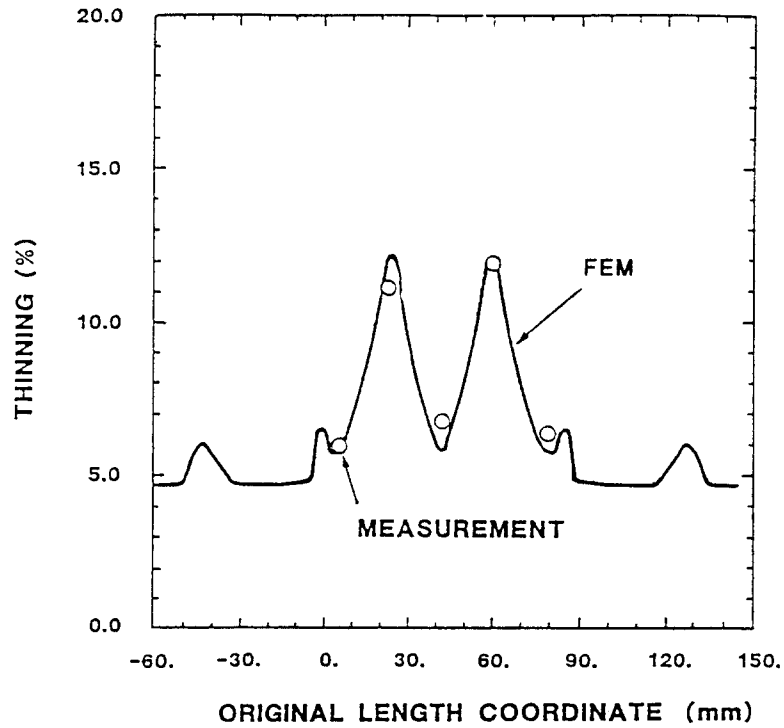


Fig. 2 Comparison of thinnings between FEM result and measurement of the section shown in Fig.1.



#### 4.2 역 드로우잉을 갖는 스트레치/드로우인 단면

성형 공정중에 역 드로우잉( reverse drawing )이 발생되고, 마찰조건이 불규칙한 임의의 형상을 갖는 단면을 시뮬레이션하기 위하여 Fig. 3과 같은 모델을 선정하였다. 드로우비드 저항력은 성형중에 드로우인이 발생되도록 좌우측에 각각 216 N/mm와 220 N/mm 로 하였다. 사용된 재료는 임의의 형상을 갖는 스트레치 단면 해석의 재료와 같다. Fig. 3은 펀치가 27mm 진행되었을 때 판재의 변형된 형상, 금형과 펀치의 접촉영역, 그리고 양단의 드로우인 양을 보여 준 것이다. 펀치가 25.4mm 진행되었을 때 판재가 다이 중심부에 접촉을 시작하고, 소성유동이 역전되는 역 드로우잉 현상이 발생된다.

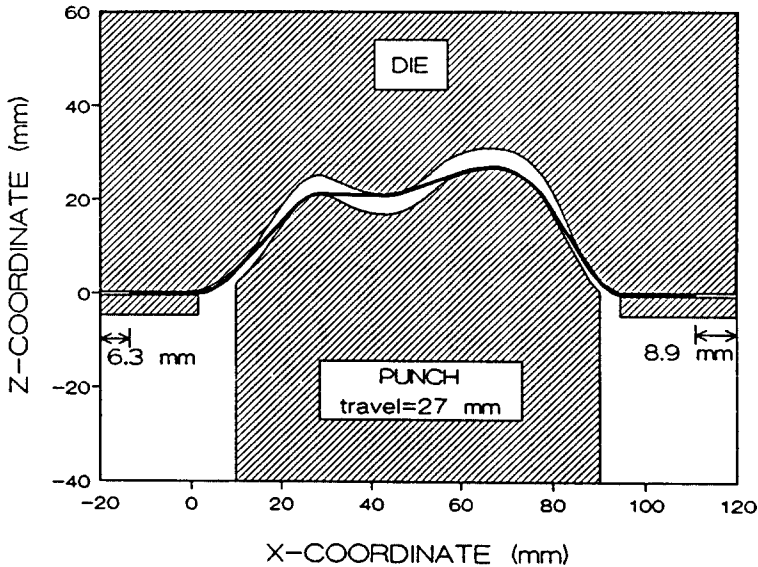


Fig. 3 Tooling and deformed geomtry at punch travel of 27mm for analyzing reserve drawing section.

Fig. 4는 펀치진행의 각 단계별로 해석되어진 판재의 초기 위치에 따른 변형률 분포를 나타낸 것이다. 여기서 표시된 변형률은 인장방향의 공칭 변형률이다. 펀치가 29mm 진행된 후에는 우측단이 완전히 구속되어 변형률은 급속히 증가하였다. 펀치진행이 30.6mm일 때 성형은 완료되었으며, 판재의 초기위치로 85mm인 지점 부근에서 최대 변형률( 29 % )을 보였다. 불규칙한 마찰조건을 갖는 성형은 수치해석이 어려운 것으로 알려져 있으나, 위에서 보는 바와 같이 개발된 유한요소 프로그램은 이러한 모델을 해석할 수 있었다.

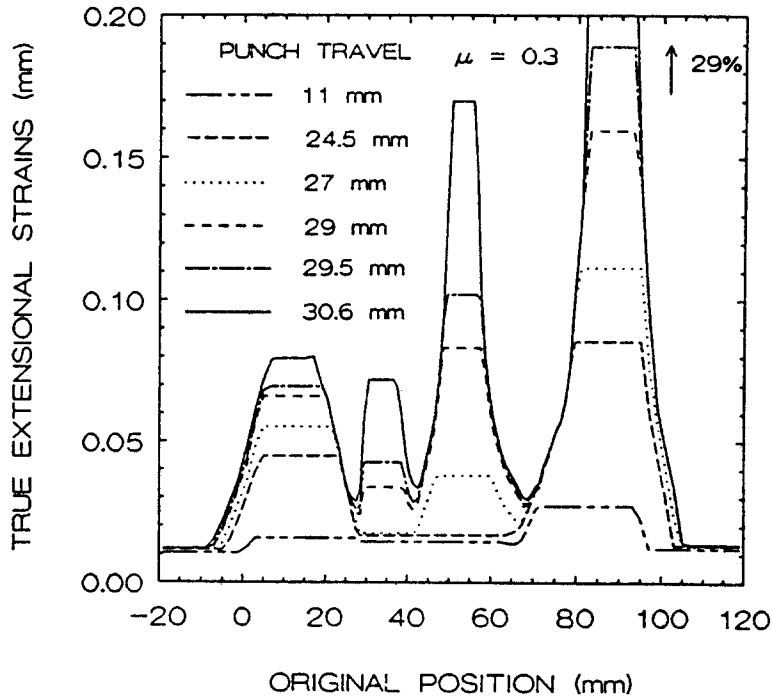


Fig. 4 Strain distributions in the forming processes shown in Fig. 3.

### 5. 결론

박막이론에 의한 평면변형 상태의 선요소를 사용하고 점 강소성 재료의 수직 이방성을 고려하여 개발된 유한요소 프로그램으로 임의의 성형조건을 갖는 자동 차 금형 단면의 스트레칭 해석과 성형 중에 역 드로우잉 현상을 보이는 임의의 스트레치/드로우인 해석이 수행되었다. 이들 해석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 해석결과와 측정치가 비교적 잘 일치하여 개발된 유한요소 수식화의 타당성이 검증되었다.
- (2) 불규칙한 마찰조건 때문에 해석이 힘든 역 드로우잉 현상을 성공적으로 시뮬레이션하였다.
- (3) 금형개발 과정에서 소요되는 시행착오를 줄이는데 개발된 유한요소 프로그램이 이용될 수 있다.

앞으로, 굽힘과 퍼짐의 영향을 고려할 수 있고 면내 이방성을 고려하여 각 방향별로 변형을 예측할 수 있는 수치해석 이론이 연구되어야 할 것이다.

## 참고문헌

- [1] N.-M. Wang, A Rigid-Plastic Rate-Sensitive Finite Element Method for Modeling Sheet Metal Forming Processes, *Proc. Numerical Analysis of Forming Processes*, J.F.T. Pittsman et al. eds., John Wiley & Sons, 117-164 (1984)
- [2] Y. Germain, K. Chung, and R.H. Wagoner, A Rigid-visco-plastic Finite Element Program for Sheet Metal Forming Analysis, *Int. J. Mech. Sci.*, 31-1, 1-24 (1989)
- [3] C.-T. Wang and R.H. Wagoner, *Finite Element Analysis and Experimental Investigation of Square Punch Stretching and Draw-in Processes*, Report No. ERC/NSM-90-05, Engineering Research Center for Net Shape Manufacturing, The Ohio State University, 1990.
- [4] P.A. Stine and S.P. Keeler, Sheet Metal Formability - Comparisons between Computer Modeling and Production Case Histories, *Recent Developments in Autobody Stamping Technology*, SAE/SP-90/825, SAE 900276, SAE inc., 1990.
- [5] R. Hill, 1979, "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 179-191.
- [6] D.C. Drucker, 1951, "A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations", *Proc. 1st U.S. Nat'l Congress of Appl. Mech.*, ASME.
- [7] W.F. Hosford and R.M. Caddell, 1983, "*Metal Forming: Mechanics and Metallurgy*", Prentice-Hall Inc..
- [8] G. Damamme, 1978, "Minimum de la Deformation Generalisee d'un Element de Matiere", Pour les Chemins de Deformation Passant d'un Etat Final Donne, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, 287a, 895.
- [9] Y.T. Keum, *Compatible Description of Tool Surfaces and FEM meshes for Analyzing Sheet Forming Operations in Two - and Three-Dimensions*, Ph.D. Dissertation, The Ohio State University, 1990.
- [10] Y.T. Keum, E. Nakamachi, R.H. Wagoner and J.K. Lee, Compatible Description of Tool Surfaces and FEM meshes for Analyzing Sheet Forming Operations, NUMIFORM '89: *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, submitted.
- [11] Y.T. Keum, C.-T. Wang, M.J. Saran and R.H. Wagoner, Practical Die Design Via Section Analysis, *Int. J. Mech. Sci.*, submitted.
- [12] Y.T. Keum, C.T. Wang and R.H. Wagoner, SHEET-S (Ver.2.0): *Industrial Trials and User's Guide*, Report No. ERC/NSM-90-09, Engineering Research Center for Net Shape Manufacturing, The Ohio State University, 1990.

- [13] 금영탁, R.H. Wagoner, "프레스금형 단면의 성형성 평가를 위한 유한요소법", 대한기계학회논문집, 제 15권 제 4호, pp.1108-1122, 1991.
- [14] 금영탁·왕노만, 1990, "단면성형해석에 의한 자동차 내부판넬의 설계", 한국자동차공학회, 12권 6호.
- [15] N.-M. Wang and N. Somaratna, Numerical Simulation of Industrial Sheet Forming Processes, *Proc. NUMIFORM '89*, E. G. Thompson et. al. eds, Fort Collins, Colorado, 75-84 (1989)
- [16] S.C. Tang, J. Gress and P. Ling, Sheet Metal Forming Modeling of Automotive Body Panels, *Proc. 15th IDDRG Cong.*, 185-194 (1988).