

다공질 금속의 소성 항복 거동

김형섭, 이 등녕
서울대학교 금속공학과

Abstract Appropriate yield criteria are necessary to perform computer simulation for densification processes of powder compacts and sintered metals. Various yield functions have been reviewed and a new form for yield criterion has been advanced. The yield criterion satisfies experimental results from combined tension and torsion tests of sintered porous iron specimens.

1. 서론

분말야금법은 금속 분말을 생산하고 이를 이용하여 형상을 가진 제품을 만드는 기술이다. 이 방법은 복잡한 제품의 대량 생산에 경제적이므로 널리 적용되고 있다. 분말의 압축과 소결체의 단조 공정에서 균일하고 강도 높은 제품을 얻기 위해서는 밀도 및 밀도 분포의 조절이 매우 중요하다. 분말 압분체의 불균일한 밀도 분포는 소결 시 제품의 뒤틀림을 유발시키고, 소결체의 잔류 기공은 기계적 성질을 저해한다. 압분체의 밀도 분포는 분말 입자 간의 상호 작용으로 인하여 모사하기가 매우 어렵다. 그래서 압분체를 분말의 모임으로 보지 않고 다공질 금속으로 생각하여 비다공질 금속의 변형 거동에 널리 쓰이는 해석법인 슬립선장이론¹⁾, 상계해석법²⁾, 유한요소법^{3),4)} 등을 이용한 해석이 시도되고 있다. 다공질 금속의 변형 거동은 내부 기공의 영향으로 인하여 비다공질 금속과는 다르다. 그러므로 다공질 금속의 탄소성 거동을 해석하기 위해서는 기공의 효과를 고려할 수 있는 새로운 항복조건이 필요하다. 이 연구의 목적은 새로운 항복조건을 제시하고 이의 적용 예를 보고자 한다.

2. 다공질 재료의 항복조건

비다공질 재료와는 달리 정수압은 다공질 재료의 항복에 영향을 미치므로, 항복함수는 보다 일반적인 아래의 꼴을 가지게 된다.

$$F = AJ_2 + BJ_1^2 - \eta Y_0^2 \quad (1)$$

여기서

$$\eta = Y_R^2 / Y_0^2 \quad (2)$$

$$J_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (3)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \quad (4)$$

위에서 σ'_{ij} 는 편차응력, Y_R 는 다공질 금속의 겉보기 항복응력, Y_0 는 기지 금속의 항복응력이다. A와 B는 상대밀도의 함수이다. 일반 금속에서는 A=3, B=0, $\eta=1$ 이므로, 항복함수 F는 von Mises 항복함수가 된다. 항복이 일어나면 F는 0이 된다.

A, B, η 를 상대밀도 R를 이용하여 표시하려는 제안이 많이 되고있다. Gurson⁵⁾은 완전강소성 재료 내에 하나의 구형 공극이 존재한 경우를 상계해석을 이용하여 아래의 항복식을 유도하였다. (중공구 모델)

$$F = J_2 + \frac{2Y_0^2}{3}(1-R) \cosh\left(\frac{J_1}{2Y_0}\right) - \frac{Y_0^2}{3}[1+(1-R)^2] \quad (5)$$

그러나 R=1 이 아니면 F는 0이 되지 않는다. 설명의 편의를 위해서 일축 응력 상태를 생각하면

$$F = \frac{2\sigma_{11}^2(1-R)}{3[1+(1-R)^2]} \cosh\left[\frac{(1+(1-R)^2)^{1/2}}{2}\right] \quad (6)$$

R=1 이 아닌 경우에도 위의 F는 0이 되어야 하나 식(6)은 그렇지 않다. 그러나 Gurson 식은, 다른 식들이 실험을 바탕으로한 현상학적 실험식임에 반해, 이론적 바탕을 가진 식이므로 파괴역학자와 분말야금학자 들에 의해 많이 사용되고 있다.

Shima와 Oyane⁶⁾은 소결동의 시편의 압축과 인장 실험으로부터 아래의 항복함수를 제안하였다.

$$F = J_2 + \frac{2.49^2}{27}(1-R)^{1.028} J_1^2 - \frac{Y_0^2}{3} R^5 \quad (7)$$

그러나 위 함수도 일축응력 상태에서 아래와 같이 0이 되지 않는다.

$$F = \frac{2.49^2}{27}(1-R)^{1.028}\sigma_{11}^2 \quad (8)$$

Kim 등⁷⁾은 Shima의 함수가 인장에서는 잘 맞으나 비틀림 실험에서는 잘 맞지 않음을 보고, 아래의 수정식을 발표하여 인장에서 뿐만 아니라 비틀림에서도 실험과 좋은 일치를 보이고 있다.

$$F = J_2 + \frac{\alpha(1-R)}{9}J_1^2 - \frac{Y_0^2}{3}R^n \quad (9)$$

여기서 $\alpha=0.82$, $n=0.63$, $Y_0=137$ MPa는 철 소결체의 인장/비틀림 실험으로부터 얻었다. 위 함수도 $R=1$ 이 아니면 0이 되지 않는다. 그러므로 식(5), (7), (9)는 기본적인 결함을 가지고 있다.

Doraivelu 등⁸⁾은 일축응력 상태의 항복조건으로부터 A와 B사이의 관계를 구하였다. 즉, 1축 응력상태에서 식 (1)은 아래와 같이 된다.

$$F = \frac{A}{3}\sigma_{11}^2 + B\sigma_{11}^2 - Y_R^2 \quad (10)$$

위 식은 항복상태에서는 0이 되므로

$$A = 3(1-B) \quad (11)$$

식 (11)과 알루미늄 합금의 실험 결과로부터 아래의 식을 제안하였다.

$$F = (2+R^2)J_2 + \frac{1-R^2}{3}J_1^2 - (2R^2-1)Y_0^2 \quad (12)$$

위 식은 $2R^2-1=0$ 에서 임계상대밀도 R_c 가 존재함을 알려준다. 이 경우 $R_c=0.707$ 이다. $R=R_c$ 일 때, 즉 재료의 항복응력이 0에 도달하면 위 식을 사용할 수가 없다. 만약 시편의 한 점이 임계상대밀도 $R_c=0.707$ 에 도달한다면, 더 이상의

계산이 불가능해진다. 비록 시편의 작은 부분이 입계밀도에 도달해도 나머지 대부분에서의 거동을 알고 싶을 때가 있다. 이 때는 입계영역에서의 항복응력을 아주 작은 양의 값으로 택하면 시편의 나머지 부분의 변형 거동을 계산할 수 있을 것이다. 이 항복응력의 최소값으로는 초기 항복응력에 아주 작은 양의 값을 곱하여 사용하였다. 그래서 이 연구에서는 η 를 보다 일반적인 아래 식으로 수정하였다.

$$F = (2+R^2)J_2 + \frac{1-R^2}{3}J_1^2 - \eta Y_0^2 \quad (13)$$

$$\eta = \frac{(R-R_c)(aR-a+1)}{1-R_c} H(R-R_c) + \eta_{\min} H(R_c-R) \quad (14)$$

여기서 H 는 Heaviside 단위함수 [$H(t)=0$ for $t<0$, $H(0)=1/2$, $H(t)=1$ for $t>0$], η_{\min} 는 Y_R 의 최소값, a 와 R_c 는 시편의 성질에 관계된 값이다. $\eta=2R^2-1$ 이면 식(12)와 같아진다. 그림 1은 식 (14)에서 R_c 가 0.707 일 때, 여러가지 a 값에 대한 η 를 R 의 함수로 표시하였다. $a=0.5$ 일 때 $\eta=2R^2-1$ 의 경우와 비슷하다. 식 (14)는 두 개의 변수를 가지고 있으므로 실험 결과에 더 잘 맞을 수 있다. 또한 식 (13)은 $R=1$ 일 때 von Mises 항복함수가 되고, 항복 시에는 0이 된다.

식 (1)에서 $F=0$ 으로 놓으면 π 면 (J_1 축에 수직면)에서 항복곡선의 반지름 r 은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{1}{3}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2] \\ &= \frac{2}{A}(\eta Y_0^2 - 9B\sigma_m^2) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 σ_m 은 평균응력 $(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3$ 이다.

식 (13)을 이용하면 식 (15)는 다음과 같다.

$$r^2 = \frac{2}{2+R^2}[\eta Y_0^2 - 3(1-R)\sigma_m^2] \quad (16)$$

그림 2는 $a=1.2739$, $R_c=0.6517$ 일 때 여러가지 초기 상대밀도에서의 3차원 항복곡면을

주응력축 공간에 나타난 그림이다. 이 a 와 R_c 값은 다음 절에서 보이는 Biner의 실험값으로부터 구했다. 항복곡선은 상대밀도가 증가함에 따라 팽창하여 $R=1$ 이 되면 J_1 을 회전축으로 하는 von Mises 원통이 된다.

3. 해석

식 (13)을 실험 결과들에 적용시켰다. 그림 3에서 보듯이 철 소결체의 경우 Biner의 밀도 - 변형 실험으로부터 $a=1.2739$ 와 $R_c=0.6517$ 를 얻을 수 있다. 식 (1)로부터 일축 항복응력 Y_R 와 전단 항복응력 τ_R 의 관계를 유도할 수 있다.

$$Y_R = \sqrt{\eta} Y_0 \quad (17)$$

$$\tau_R = \left(\frac{\eta}{A}\right)^{1/2} Y_0 \quad (18)$$

여러가지 항복함수 식 (9), (12)와 (13)에서의 η 와 A ,를 아래 표와 같이 나타낼 수 있다.

Table 1. Expressions η and A in different yield functions.

Yield functions	η	A
(9)	R^n	3
(12)	$2R^2-1$	$2+R^2$
(13)	eq.(14)	$2+R^2$

그림 4는 Kim 등의⁷⁾ 초기 상대밀도에 따른 철 소결체의 인장 항복응력과 전단 항복응력 실험 결과 및 식 (17)과 (18)을 이용한 계산 결과를 보였다. Kim 등은 매개변수 α , n 와 Y_0 를 인장과 비틀림 결과에 잘 맞도록 구하였다. 구한 값은 전 절에 나타낸 바와 같다. 그러나 식 (13)에서 a 와 R_c 의 값 [$a=2.68$, $R_c=0.6269$]은 인장 결과만으로부터 최소자승법을 이용하여 구하였다. 그림 4에서 $Y_0 = 137$ MPa가 사용되었다. 일축 응력 상태에서 구한 매개변수의 값들이 전단에서도 마찬가지로 잘 맞는 것은 흥미로운 사실이다.

그림 5는 초기 상대밀도가 다른 철 소결체에서 초기 항복곡선의 계산과 실험 결과이다. 계산은 아래와 같이 했다.

인장과 비틀림의 복합 응력 상태에서,

$$J_1 = \sigma_{11} = \sigma \quad (19)$$

$$J_2 = \sigma_{11}^2/3 + \sigma_{12}^2 = \sigma^2/3 + \tau^2 \quad (20)$$

식 (19)와 (20)을 식 (5), (7), (9), (12)와 (13)에 대입하고, 항복조건인 $F=0$ 로 놓으면, 식 (21), (22), (23), (24)와 (25)가 각각 얻어진다.

$$\tau^2 = \frac{Y_0^2}{3} [1 + (1-R)^2] - \frac{\sigma^2}{3} - \frac{2}{3} (1-R) Y_0 \cosh\left(\frac{\sigma}{2Y_0}\right) \quad (21)$$

$$\tau^2 = \frac{Y_0^2}{3} R^5 - \left[\frac{1}{3} + \frac{2.49^2}{27} (1-R)^{1.028} \right] \sigma^2 \quad (22)$$

$$\tau^2 = \frac{Y_0^2}{3} R^n - \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\alpha(1-R)}{3} \right] \sigma^2 \quad (23)$$

$$\tau^2 = \frac{1}{2+R^2} [(2R^2-1)Y_0^2 - \sigma^2] \quad (24)$$

$$\tau^2 = \frac{1}{2+R^2} (\eta Y_0^2 - \sigma^2) \quad (25)$$

다시한번 식 (9)와 (13)에 바탕을 둔 식 (23)과 (25)가 가장 잘 맞음을 알 수 있다.

4. 응용 계산

이 연구의 항복식을 이용하여 탄소성 유한요소 해석을 하였다. 자세한 계산 방법은 참고문헌 [4]에 나타내었다.

4.1 다이 압축

다이 압축 (compaction) 공정은 소결 전 단계로서 고루고 치밀한 밀도 분포가 아주

중요하다. 초기 상대밀도 0.7인 니켈 분말의 성질은 아래와 같고 다이와의 마찰계수는 0.2로, $\eta = (2R-1)^2$ 로 놓았다.

탄성계수 = 7500 MPa

Poisson 비 = 0.312

항복응력 = 150 MPa

선형경화계수 = 625 MPa

초기 요소망과 변형 후의 상대밀도의 분포는 그림 6과 같다. 다이와의 마찰로 인해 모서리의 밀도가 가장 높다.

4.2 업세팅

원통형 구리 소결체의 업세팅을 해석하였다. 초기 상대밀도는 0.8이고 다이와의 마찰계수는 0.25, $a=0.5$, $R_c=0.707$ 로 하였다. 재료의 성질은 아래와 같다.

$$\sigma = 431(\epsilon + 0.00851)^{0.32} \text{ MPa}$$

탄성계수 = 50000 MPa

항복응력 = 100 MPa

Poisson 비 = 0.3

20%, 40%, 60% 압축 후의 밀도 분포는 그림 7과 같다. 변형에 따른 치밀화가 보이고, 적도면에서의 부풀림으로 인한 인장에 따른 밀도 감소도 확인할 수 있다.

4.3 3차원 압흔 (Indenting)

실제의 많은 문제를 해결하기 위해서는 3차원 해석이 필요하게 된다. 그 대표적인 문제로서 6면체 구리 소결체의 압흔을 해석하였다. 그림 8에 50% 압축 후의 요소 모양, 정수압과 밀도의 분포를 보였다.

5. 결론

재료의 치밀화 특성을 고려할 수 있는 항복식을 제시하였고, 이를 이용한 유한요소해석을 하여 압축, 업세팅, 압흔 시의 밀도 분포를 구하였다.

참고문헌

1. P.F. Thomson : *Densification of Sintered Metal Compacts by Cold Deformation*, Proceedings of the 1985 Metals Congress, Ballarat, Victoria, Australia, 1985, 13
2. H.K. Oh and J.W. Park : *J. Mech. Work. Tech.*, 1987, **15**, 119
3. Y.T. Im and S. Kobayashi : *Metal Forming and Impact Mechanics*, S.R.Reid (Ed.), Pergamon Press, Oxford, 1985, 103
4. 김형섭, 이동녕 : *대한금속학회지*, 1991, **29**, 703
5. A.L. Gurson : *Trans. A.S.M.E., J. Engng. Mater. Tech.*, 1977, **99**, 2
6. S. Shima and M. Oyane : *Int. J. Mech. Sci.*, 1976, **18**, 285
7. K.T. Kim, J. Suh and Y.S. Kwon : *Powder Metall.*, 1990, **33**, 321
8. S.M. Doraivelu, H.L. Gegel, J.S. Gunasekera, J.C. Malas J.T. Morgan and J.F.Thomas : *Int. J. Mech. Sci.*, 1984, **26**, 527
9. S.B. Biner and W.A. Spitzig : *Acta Metall.*, 1990, **38**, 603

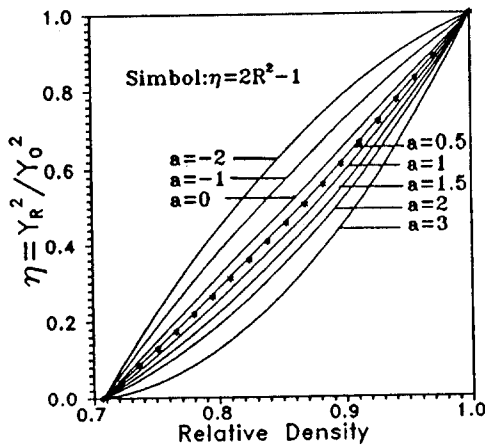


Fig.1. Variation of η with relative density for $R_c = 0.707$. Symbols (*) and lines are respectively calculated using Doraivelu's eq. (12) and eq.(13).

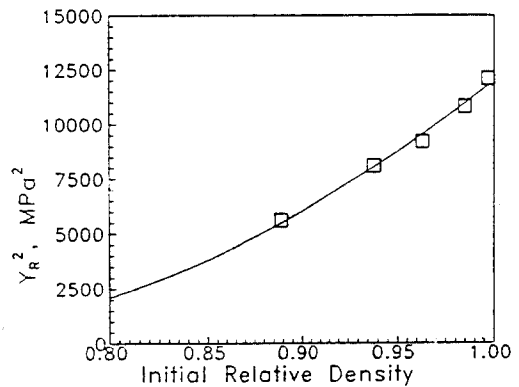


Fig.3. Biner's experimental data (\square)⁹ compared with values calculated using eq.(13) with $a=1.2739$ and $R_c=0.6517$.

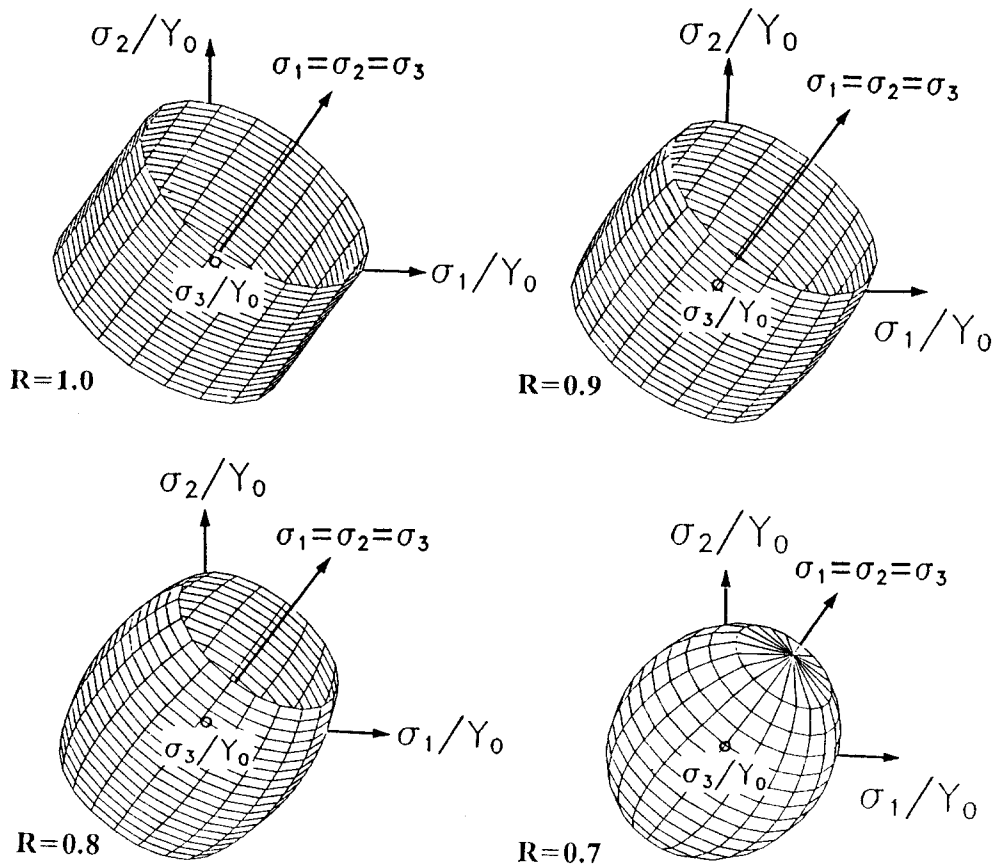


Fig.2. Yield surfaces for compressible ($R = 0.7, 0.8, 0.9$) and non-compressible Fe ($R=1$) specimens calculated by setting $a=1.2739$ $R_c=0.6517$ in eq.(16).

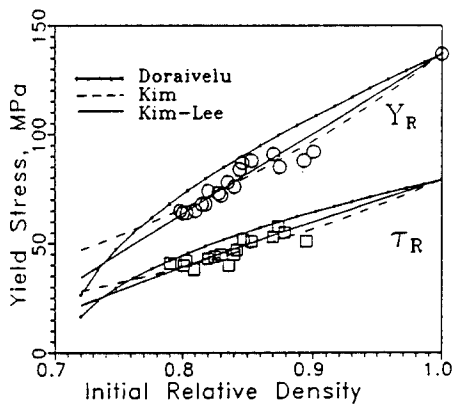


Fig.4. Variation of initial yield stress with initial relative density under tension and torsion. Symbols indicate experimental data from Kim *et al*⁷⁾. Curves "Kim", "Doraivelu" and "Kim-Lee" indicate values calculated based on eqs.(9), (12) and (13), respectively.

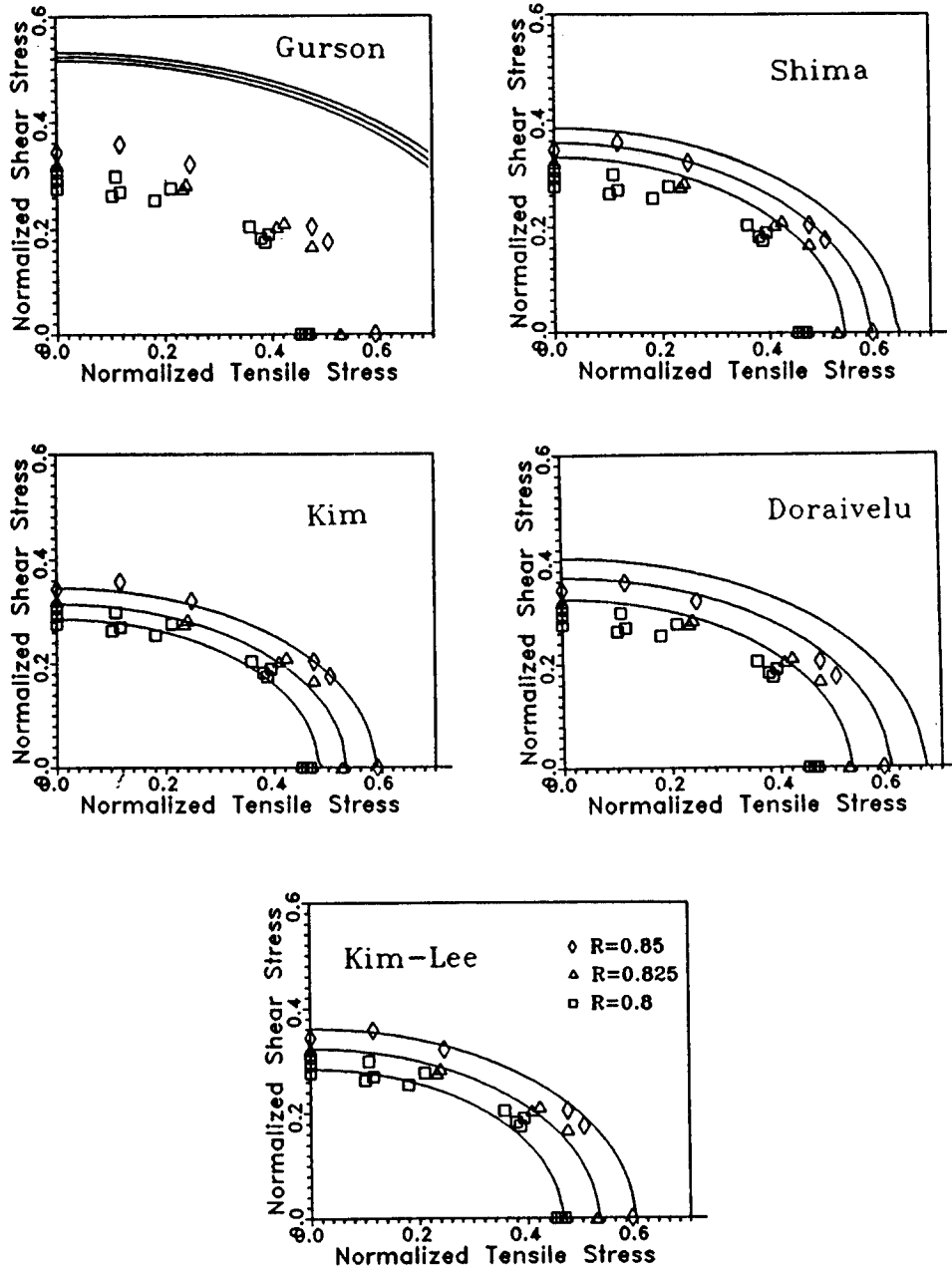


Fig.5. Yield curves in σ/Y_0 and τ/Y_0 space. Curves "Gurson", "Shima", "Kim", "Doraivelu" and "Kim-Lee" indicate values calculated using eqs.(21), (22), (23), (24) and (25), respectively.

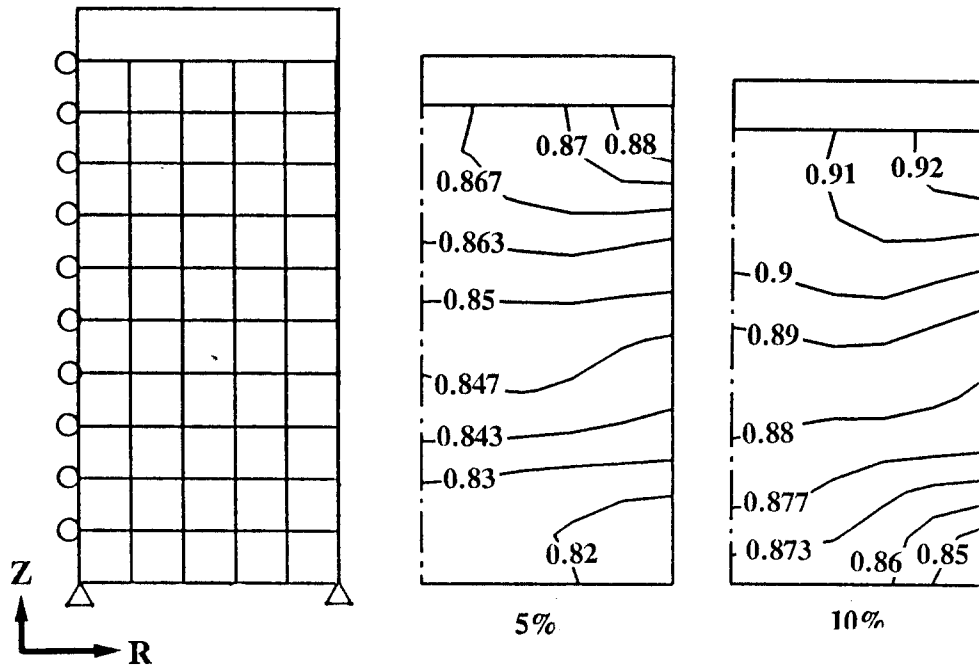


Fig.6. Initial mesh and predicted relative density distributions of Fe powder compacts during single action compaction. ; initial relative density = 0.8, friction coefficient = 0.2.

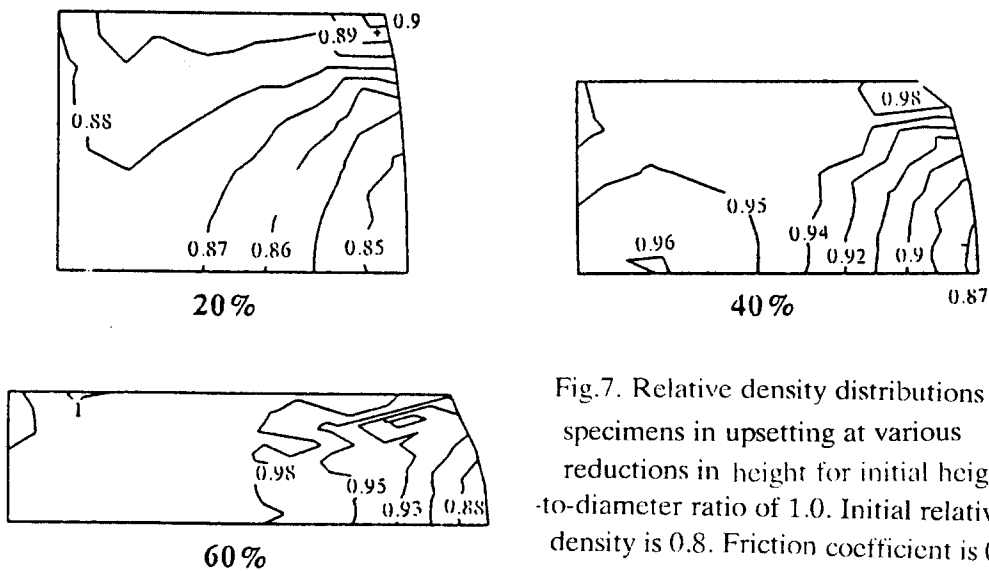


Fig.7. Relative density distributions in specimens in upsetting at various reductions in height for initial height-to-diameter ratio of 1.0. Initial relative density is 0.8. Friction coefficient is 0.25.

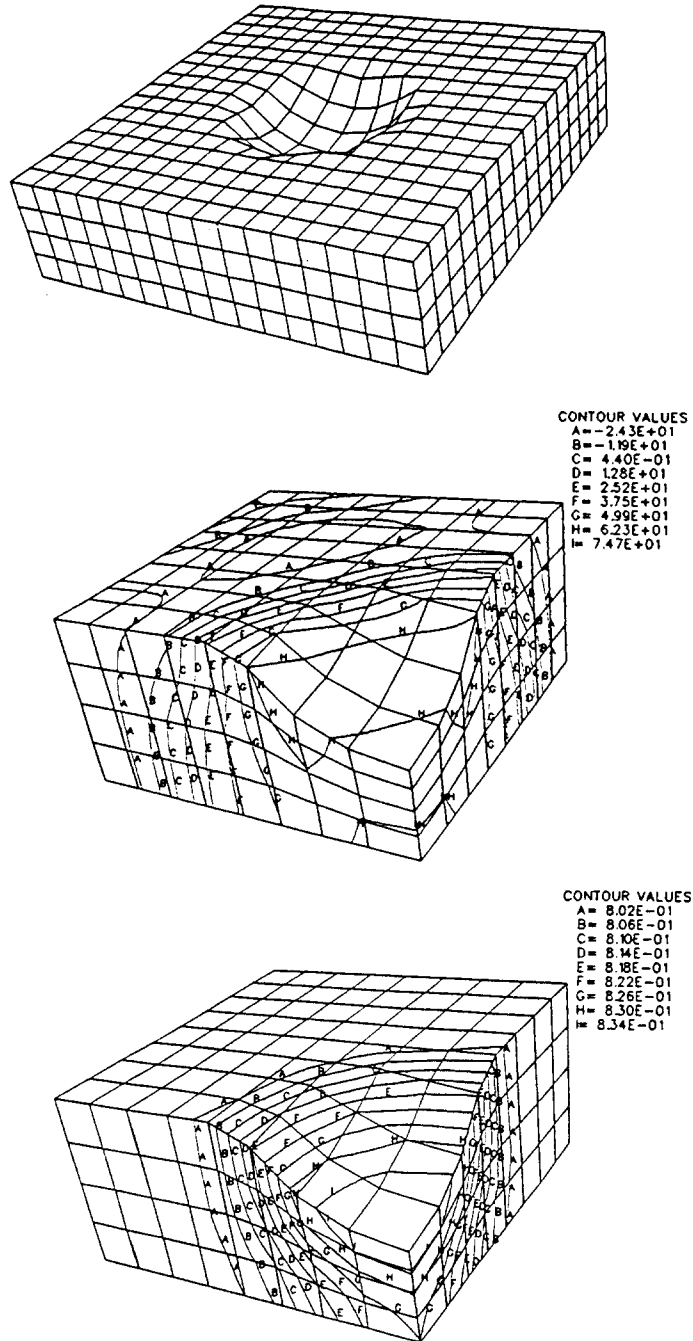


Fig.8. Deformed mesh, hydrostatic pressure (MPa) distribution and relative density distribution in indenting at 50% reduction in height. Initial relative density is 0.8.