퍼지雙行列게임의 線型相補問題化

(On Linear Complementarity Problem of Fuzzy Bimatrix Game)

朴 相 圭 : 大宥工業專門大學 工業經營科
丁 奎 連 : 崇實大學校 産業工學科

요 약

참가자가 두 명인 쌍행렬게임에서 각 참가자의 전략선택에 따른 이득행렬이 부정확한 상황일 경우를 고려하였다. 이러한 퍼지쌍행렬게임의 해를 구하는 방법으로 퍼지숫자간의 순위관계의 결과인 대소관계를 적용하여 선형상보문제화하는 과정을 제시하였다.

I. 서 론

게임이론은 적용성이 다양한 관계로 의사결정분야에서 중요한 부분을 차지하고 있다. 특정게임을 모형화할 경우에 관련된 구성요소에는 정확성이 결여되어 있지 않은 자료가 이용되어 왔지만, 현실적으로 모호성 또는 부정확성이 있는 상황도 많이 존재한다. 이런 관점에서 퍼지게임모형(fuzzy game model)을 고려할 수 있는데 본 연구에서는 두 참가자의 전략의 집합은 결정되어 있으나, 각 전략선택에 따른 이득(Pay-off)에 대한 지식(정보)은 정확성이 어느정도 결여되어 있는 쌍행렬게임(bimatrix game)만을 고려하기로 한다.

게임의 참가자는 Ⅰ과 Ⅱ가 있으며 서로 정보교환은 불가능한 상황으로 가정하자. 그리고 참가자 Ⅰ과 Ⅱ의 순수혼합전략을 다음과 같이 각 각 M,N이라고 하자.

$$M = \{1,2,,,,m\},\ N = \{1,2,...n\} \qquad \text{---------------------(1)}$$

참가자 Ⅰ의 전략 i와 참가자 Ⅱ의 전략 j에 의한 이득을(a_{ij},b_{ij})라고 하면 이득행렬(payoff matrix)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.[1]

$$(A,B) = (a_{ij},b_{ij}),\ _{(i,j)\in M,N} \qquad \text{------------------------(2)}$$

이를 쌍행렬게임이라고 하는데 특히 식(2)의 이득행렬을 명확히 알고 있는 값으로 하고 있으나, 현실적으로 이에 대한 정확한 지식이나 정보를 부정확하게 고려하는 것이 타당한 경우도 있다.

예를 들면, 참가자 Ⅰ의 전략 i에 대하여 참가자 Ⅱ의 전략이 j라고 할 때 이득은 거의 10만원가량이 된다거나, 적어도 11만원쯤은 되어야 한다는 등과 같은 경우이다.

따라서 퍼지쌍행렬게임은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$FBMG = \{\ P,M,N,(\tilde{A},\tilde{B})\} \qquad \text{------------------------------(3)}$$

단, P={PⅠ,pⅡ},M={1,2,...,m},N={1,2,...,n}이고 ($\tilde{A}$,$\tilde{B}$)는 부정확성을 포함한 이득행렬이다. 이러한 부정확한 이득은 퍼지숫자(fuzzy number)로 나타낼 수 있다. 즉, N(R)를 퍼지숫자의 집합이라고 하면 $\tilde{a}_{ij}\in N(R)$ $\tilde{b}_{ij}\in N(R)$이다. 그러면 각 퍼지숫자의 소속함수(membership function)는 각 참가자의 이득달성정도를 나타내는 것이 된다.

본 연구에서는 퍼지숫자사이의 순위관계를 이용하여 식(3)의 퍼지쌍행렬게임을 선형상보문제(linear complementarity problem)으로 변환시키는 과정을 보이고자 한다.

Ⅱ. 퍼지숫자의 관계

일반적으로 퍼지선형계획모형(fuzzy linear programming model)은 다음과 같이 표현된다.[2]

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad cx \\ &\text{s.t.} \quad \tilde{a}_i x_i \le \tilde{b}_i, i=1,2,...,n \qquad \text{----------------------(4)} \\ &\qquad\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

단, $\tilde{a}_i=(\tilde{a}_{i1},\tilde{a}_{i2},...,\tilde{a}_{in})$,$\tilde{b}_i=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,...,\tilde{b}_n)$,$x\in R^n$ 및 $c\in R^n$이다. 의사결정자는 부정확성을 포함하고 있는 제약조건으로 말미암아 이 제약을 완벽하게 달성하기 보다는 어느 정도 위반되는 것을 허용하지 않을 수 없다. 이 위반 정도는 다음과 같이 소속함수로 표현된다.

$$\mu^i : N(R) \rightarrow [0,1], i\in M \qquad \text{------------------ --(5)}$$

의사결정자가 식 (4)에서 i번째 제약에 허용할 수 있는 정도의 크기를

퍼지숫자 $\tilde{t}_i$로 나타내면 μ^i에서 퍼지숫자 $\tilde{a}_i x_i$와 $\tilde{b}_i$사이의 적합성은 $\tilde{t}_i$에 의해서 측정되고, 이 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{a}_i x_i \circledS \tilde{b}_i + \tilde{t}_i(1-\alpha),\ \alpha \in (0.1] \qquad \text{------------------(6)}$$

관계 ⓢ은 의사결정자에 의해서 선택되는 퍼지숫자 사이의 순위관계를 의미하며 퍼지볼록집합(fuzzy convex sets)임이 증명되었다.[2]

본 장에서는 식 (6)으로 표현되는 관계 ⓢ에 적용하는 퍼지숫자는 삼각퍼지숫자(triangular fuzzy numbers)로 하며, 다음의 관점을 중심으로 고려하기로 한다.

1. 실수선상에 각 퍼지숫자를 사영하는 순위함수인 경우

Yager[3]가 제안한 순위함수를 이용하는 방법으로 다음과 같다.

$$F : N(R) \rightarrow R \qquad \text{------------------(7)}$$

$\tilde{a},\tilde{b} \in N(R)$이고 F가 순위함수이면 $\tilde{a} \circledS \tilde{b}$은 $F(\tilde{a}) \le F(\tilde{b})$를 의미한다.

따라서 $\tilde{a}$의 무게중심은 다음과 같이 정해진다.

$$F_1(a) = \int_{aL}^{aU} x\mu_{\tilde{a}}(x)dx \Big/ \int_{aL}^{aU} \mu_{\tilde{a}}(x)dx \qquad \text{------------------(8)}$$

단, a는 중위수(median)이고 a^U와 a^L은 $\tilde{a}$를 지지하는 상하한경계이다.

이 결과를 식(6)에 적용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\Sigma[a_i^U+a_i^L+a_i]x \le [b_i^U+b_i^L+b_i]+[t_i^U+t_i^L+t_i](1-\alpha) \qquad \text{------(9)}$$

한편, $\alpha_{max}=hgt(\tilde{a})$이면 α-수준집합(level sets)은 $[a_\alpha^L,\ a_\alpha^U]$이고, α-수준의 원소들의 평균치를 $M[a_\alpha^L,\ a_\alpha^U]$라고 하면 a의 무게중심은 다음과 같다.

$$F_2(\tilde{a}) = \int_0^{\alpha max} M[a_\alpha^L,\ a_\alpha^U]d\alpha \qquad \text{------------------(10)}$$

이 결과를 식(6)에 적용하면 다음의 결과를 얻는다.

$$\Sigma[a_i^U+a_i^L+2a_i]x \le [b_i^U+b_i^L+2b_i]+[t_i^U+t_i^L+2t_i](1-\alpha) \qquad \text{---(11)}$$

2. 의사결정자가 확신하는 대소관계를 우선순위로 고려하는 경우

Adamo[4]가 제안한 방법으로 k-선호지수(preference index)는 다음과 같다.

$$F_k(\tilde{a}) = \max[x \mid \mu_{\tilde{a}}(x) \ge k\} \qquad \text{------------------(12)}$$

이 방법과 관련시켜 $k \in [0,1]$의 소속정도를 갖는 $\tilde{a} \circledS \tilde{b}$는 다음의 대소관계를 의미한다.

$$F_k(\tilde{a}) \le F_k(\tilde{b}) \qquad \text{------------------(13)}$$

따라서 이 결과를 식(6)에 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\Sigma[ka_i+(1-k)a_i^U]x \le [kb_i+(1-k)b_i^U]+[kt_i+(1-k)t_i^U](1-\alpha) \qquad \text{--(14)}$$

3. 가능성 이론의 경우

Dubois[5]가 제안한 방법으로 다음과 같이 두 경우로 나누어 진다. 즉, $\tilde{a}$에 대한 $\tilde{b}$의 지배가능성도(grade of possibility of dominance)와 지배필요성도(grade of necessity of dominance)로 다음과 같다.

$$Poss(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \sup_{y,x} \min_{y \geq x} [\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)] \quad \text{------------------(15)}$$

$$Nec(\tilde{a} \leq \tilde{b}) = \inf_{y} \sup_{x:x \leq y} \max [1-\mu_{\tilde{b}}(y), \mu_{\tilde{a}}(x)] \quad \text{------------(16)}$$

이 두 결과를 식(6)에 각 각 적용하면 다음의 결과를 얻는다.[6]

$$\Sigma a_i x \leq b_i + t_i(1-\alpha) \quad \text{----------------------------(17)}$$

$$\Sigma [a_i + a_i^L] x \leq [b_i + b_i^L] + [t_i + t_i^L](1-\alpha) \quad \text{----------------(18)}$$

Ⅲ. 퍼지쌍행렬게임의 선형상보문제화

퍼지쌍행렬게임에서 참가자 Ⅰ의 전략 $i(i=1,2,...,m)$와 참가자 Ⅱ의 전략 $j(j=1,2,...,n)$에 대한 이득행렬이 다음과 같다고 하자.

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_{ij}), \quad (i,j) \in M,N \quad \text{--------------(19)}$$

그리고 참가자 Ⅰ의 어떠한 혼합전략 X와 참가자 Ⅱ의 어떠한 혼합전략 Y에 대하여 (X^*,Y^*)를 평형점(equilibrium points)이라고 하자.

참가자 Ⅰ에 대하여

$$X^*\tilde{A}Y^* \preccurlyeq X\tilde{A}Y^*, \ \forall X \quad \text{-------------------------(20)}$$

이 성립하는데 관계 $\preccurlyeq$로 표시한 것은 $\tilde{A}$가 삼각퍼지숫자이기 때문이다.

식(20)으로부터

$$(X^*\tilde{A}Y^*)e_m \preccurlyeq \tilde{A}Y^* \quad \text{-------------------------(21)}$$

을 얻을 수 있다.

일반성을 잃지 않는 한 $\tilde{A} > 0$, $X^*\tilde{A}Y^* > 0$이므로 식(21)은 다음과 같이 변형된다.

$$e_m \preccurlyeq \tilde{A}\eta \quad \text{-------------------------(22)}$$

단, $e_m = (1,1,...,1)^T$이고 $\eta = Y^*/(X^*\tilde{A}Y^*)$이다.

좌변의 값이 상수(crisp) 1로 되었는데 이 사실은 $a_i = a_i^L = a_i^U = 1, \forall i$을 의미한다.

한편, 참가자 Ⅱ에 대해서는

$$X^*\tilde{B}Y^* \preccurlyeq X^*\tilde{B}Y, \ \forall Y \quad \text{-------------------------(23)}$$

이 성립하며 이는 다음과 같이 된다.

$$(X^*\tilde{B}Y^*)e_n \lesssim \tilde{B}^T X^* \quad \text{------------------------(24)}$$

일반성을 잃지 않는 한 $\tilde{B}^T > 0$, $X^*\tilde{B}Y^* > 0$ 이므로 식(24)는 다음과 같이 변형된다.

$$e_n \lesssim \tilde{B}^T \xi \quad \text{------------------------(25)}$$

단, $e_n=(1,1,...,1)^T$이고 $\xi = X^*/(X^*\tilde{B}Y^*)$이다.

좌변의 값이 상수(crisp) 1로 되었는데 이 사실은 $b_j=b_j^L=b_j^U=1, \forall_j$을 의미한다. 따라서 식(22)와 식(25)를 구체적으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$\Sigma\ a_{ij}\eta_i \ \geq\ 1\ ,(i=1,2,...,m) \quad \text{--------------------(26)}$$

$$\Sigma\ b_{ij}\xi_j \ \geq\ 1\ ,(j=1,2,...,n) \quad \text{--------------------(27)}$$

참가자 Ⅰ이 i번째 제약을 달성하는데 최대로 허용할 수 있는 정도를 $\tilde{p}_i(i=1,2,...,m)$, 참가자 Ⅱ가 j번째 제약을 달성하는데 최대로 허용할 수 있는 정도를 $\tilde{q}_j(j=1,2,...,n)$라고 하면 식(26)및 (27)은 식(6)에 의해서 다음과 같이 관계 ⩽ 또는 ⩾로 나타낼 수 있다.

$$\Sigma\ a_{ij}\eta_i \ \geqslant\ 1 - p_i(1-\alpha),(i=1,2,...,m),\ \alpha \in (0,1] \quad \text{------(28)}$$

$$\Sigma\ b_{ij}\xi_j \ \geqslant\ 1 - q_j(1-\alpha),(j=1,2,...,n),\ \alpha \in (0,1] \quad \text{------(29)}$$

식(28) 및 (29)의 관계 ⩾에 퍼지숫자간의 순위관계의 결과들을 적용하면 퍼지쌍행렬게임은 다음과 같이 선형상보문제로 수립된다.

식(9)로부터 식(28) 및 (29)는 다음과 같이 된다.

$$\Sigma\,[a_{ij}^U+a_{ij}^L+a_{ij}]\,\eta_i \ \geq\ 3 - [p_i^U+p_i^L+p_i](1-\alpha),\ \forall_i \quad \text{----(30)}$$

$$\Sigma\,[b_{ij}^U+b_{ij}^L+b_{ij}]\,\xi_j \ \geq\ 3 - [q_j^U+q_j^L+q_j](1-\alpha),\ \forall_j \quad \text{----(31)}$$

이 두 식을 이용하여 선형상보문제를 수립하면 다음과 같다.

$$u_i - \Sigma\,[a_{ij}^U+a_{ij}^L+a_{ij}]\,\xi_j=-3+[p_i^U+p_i^L+p_i](1-\alpha),\ \forall_i \quad \text{----(32)}$$

$$v_j - \Sigma\,[b_{ij}^U+b_{ij}^L+b_{ij}]\,\eta_i=-3+[q_j^U+q_j^L+q_j](1-\alpha),\ \forall_j \quad \text{----(33)}$$

단, $u_i \geq 0, v_j \geq 0, \eta_i \geq 0, \xi_j \geq 0, u_i\xi_j+v_j\eta_i=0, \forall_{i,j}\ ;\ \alpha \in (0,1]$

여기서 각 이득이 $\tilde{a}_{ij}=(a_{ij},a_{ij},a_{ij})$, $\tilde{b}_{ij}=(b_{ij},b_{ij},b_{ij})$로 모두 같고 $\alpha = 1$이면 식(32) 및 (33)은 전통적인 쌍행렬게임의 선형상보문제와 같게 된다. 이렇게 수립된 선형상보문제의 해를 구한 후

$$x^*_i = \eta_i / \Sigma\,\eta_i\ ,\ \forall_i$$

$$y^*_j = \xi_j / \Sigma\,\xi_j\ ,\ \forall_j$$

라고 하면 이 $(x^*_i,\ y^*_j)$가 퍼지쌍행렬게임의 평형점이 된다.

위와 같은 방법으로 식(11)을 식(28) 및 (29)에 적용하면 선형상보문제는 다음과 같이 수립된다.

$$u_i - \Sigma [a_{ij}^U + a_{ij}^L + 2a_{ij}] \xi_j = -4 + [p_i^U + p_i^L + 2p_i](1-\alpha), \forall_i \quad \text{---}(34)$$

$$v_j - \Sigma [b_{ij}^U + b_{ij}^L + 2b_{ij}] \eta_i = -4 + [q_j^U + q_j^L + 2p_j](1-\alpha), \forall_j \quad \text{---}(35)$$

단, $u_i \geq 0, v_j \geq 0, \eta_i \geq 0, \xi_j \geq 0, u_i \xi_j + v_j \eta_i = 0, \forall_{i,j}$; $\alpha \in (0,1]$

식(14)를 식(28) 및 (29)에 적용하면 선형상보문제는 다음과 같이 수립된다.

$$u_i - \Sigma [ka_{ij} + (1-k)a_{ij}^U] \xi_j = -1 + [kp_i + (1-k)p_i^U](1-\alpha), \forall_i \quad \text{---}(36)$$

$$v_j - \Sigma [kb_{ij} + (1-k)b_{ij}^U] \eta_i = -1 + [kq_j + (1-k)q_j^U](1-\alpha), \forall_j \quad \text{---}(37)$$

단, $u_i \geq 0, v_j \geq 0, \eta_i \geq 0, \xi_j \geq 0, u_i \xi_j + v_j \eta_i = 0, \forall_{i,j}$, $\alpha \in (0,1]$ 및 $k \in [0,1]$이다.

한편, 식(17)을 식(28) 및 (29)에 적용하면 선형상보문제는 다음과 같이 수립된다.

$$u_i - \Sigma [a_{ij}] \xi_j = -1 + p_i(1-\alpha), \forall_i \quad \text{-----------------}(38)$$

$$v_j - \Sigma [b_{ij}] \eta_i = -1 + q_j(1-\alpha), \forall_j \quad \text{-----------------}(39)$$

단, $u_i \geq 0, v_j \geq 0, \eta_i \geq 0, \xi_j \geq 0, u_i \xi_j + v_j \eta_i = 0, \forall_{i,j}$; $\alpha \in (0,1]$

마지막으로 식(18)을 식(28) 및 (29)에 적용하면 선형상보문제는 다음과 같이 수립된다.

$$u_i - \Sigma [a_{ij} + a_{ij}^L] \xi_j = -2 + [p_i + p_i^L](1-\alpha), \forall_i \quad \text{--------}(40)$$

$$v_j - \Sigma [b_{ij} + b_{ij}^L] \eta_i = -2 + [q_j + q_j^L](1-\alpha), \forall_j \quad \text{--------}(41)$$

단, $u_i \geq 0, v_j \geq 0, \eta_i \geq 0, \xi_j \geq 0, u_i \xi_j + v_j \eta_i = 0, \forall_{i,j}$; $\alpha \in (0,1]$

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 두 참가자의 전략의 집합은 결정되어 있으나 각 전략을 선택하는데 따른 이득에 대한 정보는 어느 정도 정확성이 결여되어 있는 이득행렬을 삼각퍼지숫자로 나타낸 퍼지쌍행렬게임만을 고려하였다. 고려된 퍼지쌍행렬게임의 해를 구하는 방법으로는 퍼지숫자들 사이의 순위화법으로부터 얻은 결과를 이용하여 선형상보문제로 변환시켰다. 여러 방식의 순위화법을 이용함에 따라 그 만큼 선형상보문제도 수립되므로 의사결정자는 각 결과를 여러 상황을 고려한 후에 선택하여 이용할 수 있어서 퍼지쌍행렬게임이 전통적인 쌍행렬게임보다 융통성이 있어서 적용성이 높다고 하겠다.

적용된 순위화법의 결과 이외에 다른 순위화법의 결과를 적용할 수도 있는데,그 한 예가 Chang[7]의 지수(index)이다. 또한 새로운 순위화법이 개발된다면 그 결과도 적용될 수 있을 것이다.

본 연구에서 적용한 퍼지숫자는 모두 삼각퍼지숫자였지만 L-R형의 퍼지숫자로도 변형이 가능할 것이므로, 새로운 순위화법을 개발하여 적용할 수 있도록 하는 문제와 합께 앞으로 연구대상이 될 것이다.

[참고문헌]

[1] 박순달,"게임 이론",pp.125-145,대영사,1982.

[2] M.Delgado,J.L.Verdegay and M.A.Vila,"A general model for fuzzy linear programming",Fuzzy Sets and Systems,pp.263-272,1981.

[3] R.R.Yager,"A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval",Inform.Sci.,24,pp.143-161,1981.

[4] J.M.Adamo,"Fuzzy decision trees",Fuzzy Sets and Systems 4,pp. 207-219,1980.

[5] D.Dubois and H.Prade,"Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory",Inform.Sci. 30,pp.183-224,1983.

[6] L.Campos, "Fuzzy linear programming models to solve fuzzy matrix games",Fuzzy Sets and Systems 32,pp.275-289,1989.

[7] H.Chang,"Ranking of fuzzy utilities with triangula membership functions",Proc.Int.Conf. on Policy Analysis and Information Systems,pp.263-272,1981.

[8] L.Campos and J.L.Vergegay,"Linear programming problems and ranking of fuzzy number",Fuzzy Sets and Systems 32,pp.1-11,1989.

[9] G.Bortolan and R.Degani,"A review of some methods for ranking fuzzy subsets",Fuzzy Sets and Systems 15,pp.1-19,1985.

[10] 이광형,오길록,"퍼지 이론 및 응용-1,2",홍릉과학출판사,1991.

[11] 엄정국,"퍼지이론-기초와 응용입문-",박영사,1991.