'92 韓國自動制御學術會議論文集 1992. 10. 19~21

다변수 시간지연 시스템의 상태궤환 제어기 설계

홍석민°*, 황승구**, 이상정*

* : 충남대학교 공과대학 전자공학과
** : 전자통신연구소

State feedback controller design for linear multivariable systems with delays

Seok-Min Hong°*, Seung Ku Hwang**, Sang Jeong Lee*

* : Dept. of Electronics Engineering
Chungnam National University
** : ETRI

ABSTRACT

This paper presents an algebraic approach for finding a dynamic state feedback controller when the linear multi-input system with delays in both state and input is controllable. In the time-delay case, controllability of the system does not always imply that system is cyclizable. Therefore, reduced order augmentation systems which is cyclizable as the time-varying case are considered. It is possible to construct feedback control systems by using single-input methods.

1. 서 론

많은 물리적인 시스템들이 상미분방정식 보다는 시간지연이 포함된 미분방정식(delayed differential equation)으로 더 정확히 모델링 되며[1], 제어기를 설계하여 제어하는 경우 제어입력에 지연이 발생하기도 한다. 이러한 시간지연이 있는 시스템에 대한 제어기 설계는 그동안 많이 연구되어 왔으며[2-7] 이에 관련되어 시간지연 시스템에 대한 가제어성(controllability), 가관측성(observability) 및 안정도(stability)가 여러 방법으로 정의되었다[8-15].

한편, 선형 시변 이산 시스템(linear time-varying discrete-time systems)에 대한 대수적 이론(algebraic theory)이 Kalman과 Hafez[16] 등에 의해 연구되었고, 특히 S. K. Hwang[17]은 Augmentation 방법을 이용하여 선형 시변 이산 시스템에 대한 궤환제어기를 설계하는 방법을 제안하였다. 이 방법은 임으로 고유값을 지정할 수 있는(arbitrary assignable eigenvalue) 상수행렬로 폐루우프 시스템 행렬을 변환시킨 뒤 궤환제어기를 설계하는 방법으로 기존의 방법[18,19]보다 일반적으로 작은 차수의 제어기 설계가 가능하다.

다변수 시스템에 대한 궤환제어기 설계방법으로는 선형 시불변 시스템의 경우에 직접방법(direct method), 가제어형(controllable form)으로의 변환방법, Lyapunov 방정식의 해로부터 궤환 이득 행렬(feedback gain matrix)을 구하는 방법등 여러가지 방법[20]이 있다. 이중 직접방법은 cyclizability 개념을 도입하여 다변수 입력 시스템을 단일 입력 시스템으로 변환시킨 뒤 단일 입출력 시스템에 대한 궤환 이득 행렬을 구하고, 이를 다시 다변수 시스템에 대한 궤환 이득 행렬로 치환한다.

본 논문에서는 제어가능한(controllable) 다변수 시간지연 시스템에 대한 궤환제어기 설계방법을 다룬다. 제 2장에서는 시간지연 시스템에 대한 가제어성에 대해 살펴보며, 제 3장에서는 다변수 시간 지연 시스템에 대한 Augmentation 방법을 제안한다. 제 4장에서는 Augment된 시스템에 대한 궤환제어기 설계방법을 서술하며, 제 5장에서 예제 시뮬레이션 결과를 보인다.

2. 시간지연 시스템에 대한 가제어성(controllability) 고찰

가. 입력에 시간지연이 있는 경우

먼저 다음과 같이 입력에 시간지연이 있는 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t-ih) \tag{2.1}$$

여기서 $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$이고 A 및 B_i는 각각 n×n, n×m 상수행렬이다. 이때 가제어성 행렬(controllability matrix) Q는

$$Q = [\ B_0\ B_1\ \cdots\ B_k\ AB_0\ AB_1\ \cdots\ AB_k\ \cdots\ A^{n-1}B_k\ ] \tag{2.2}$$

로 주어지며, 행렬 Q의 랭크(rank)가 n이면 시스템은 제어가능하다고 한다. 또한, 연산자 D를

$$D(s) = \sum_{i=0}^{k} \exp(-A(ih))B_i \tag{2.3}$$

로 정의할 때, 가제어성 행렬

$$Q = [\ D\ \ AD \cdots\ A^{n-1}D\ ] \tag{2.4}$$

의 랭크가 n이면 시스템은 절대적으로 제어가능(absolutely controllable)하다고 한다[8]. 여기서 절대적으로 제어가능하다는 말은 $[t_0,\ t_1]$의 시간 구간에서 $0<h<2h<\cdots<kh$로 주어질 때 $x(t_1)$을 0으로 보내면서 동시에 u(s)도 0으로 보낼 수 있음을 의미하는 데, 이때 s는 $s\in[t_1-kh,\ t_1]$의 구간을 말한다.

나. 상태에 시간지연이 있는 경우

상태에 시간지연이 있는 시스템에서

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) \tag{2.5}$$

와 같이 표현되는 경우 시스템이 pointwise complete하다는 가정하에서

$$\mathrm{rank}[P_j^k B,\quad j=1,2,\cdots,K,\quad k=1,2,\cdots,K] = n \tag{2.6}$$

이기만 하면 제어가능하다. 여기서, $P_1^1=I$, $P_j^k=A_0P_j^{k-1}+BP_{j-1}^{k-1}$

이며 j=0이거나 k=0인 경우 또는 j>k인 경우 $P_j^k=0$이다. 대문자 K는 시간 구간을 나눈 스텝수이다[21]. 식 (2.5)의 시스템은 보다 일반적인 시간지연 시스템으로 확장될 수 있다.

한편, 시간지연 시스템은 무한개의 스펙트랄 모드(spectral mode)를 가지며 만약 모든 스펙트랄 모드가 제어가능하면 시스템은 스펙트랄 제어가능하다고 말한다. 스펙트랄 가제어성의 필요충분 조건은 spectrum point에서 랭크 조건으로 정리될 수 있다. 즉,

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-ih) + bu(t) \qquad (2.7)$$

와 같은 상태 지연 단일 입출력 시스템에서

$$\mathrm{rank}[sI-\sum_{i=0}^{k} A_i \exp(-sih),\ \cancel{b] = n\ \forall s\in C} \qquad (2.8)$$

이기만 하면 시스템 (2.7)은 스펙트랄 제어가능하다[2]. 이러한 조건 역시 다변수 시스템으로 확장될 수 있다.

다. 상태와 입력에 시간지연이 있는 경우

상태와 입력에 시간지연이 있을 때 제어가능한 필요충분 조건으로 식 (2.4)와 식 (2.8)의 형태가 서로 결합될 수 있으며 특히 링(Ring) 상에서 표현하면 마치 상미방(ordinary differential) 시스템에서의 필요충분 조건식과 같은 형태를 구할 수 있다. 이제 ~~일반적인 시간지연~~ 시스템의 형태를 다음과 같이 둔다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{p} A_i x(t-ih) + \sum_{j=0}^{q} B_j u(t-jh) \qquad (2.9)$$

여기서 $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$이고 $A_i(i=0,1,\cdots,p)$, $B_j(j=0,1,\cdots q)$는 각각 n×n 및 n×m 행렬이다. 시간지연 연산자 z를 $zf(t)=f(t-h)$로 놓고 식(2.9)를 다시 표시하면

$$\dot{x}(t) = A(z)x(t) + B(z)u(t) \qquad (2.10)$$

가 되며, 이때 A(z) 및 B(z)는 다항식 링(polynomial Ring) 상에서의 n×n 및 n×m 행렬로 $A(z)=\sum_{i=0}^{p} A_i z^i$, $B(z)=\sum_{j=0}^{q} B_j z^j$이다.

이때 가제어성 행렬은

$$Q(A(z),B(z)) = [B(z)\ \ A(z)B(z)\ \cdots\ A^{n-1}(z)B(z)] \qquad (2.11)$$

로 표시 가능하여 상미방 시스템의 가제어성 행렬과 동일한 형태임을 알 수 있다. 따라서 식 (2.11)의 조건은

$$\mathrm{rank}\ Q(A(z),B(z)) = n \quad \text{for all } z \qquad (2.12)$$

와 동일하며 모든 복소수 z에 대해 식 (2.12)가 성립하면 시스템은 링(Ring) 상에서 제어가능하다고 말한다[7,14].

일반적으로 링 상에서 계수 지정가능하면 극점 지정(pole assignment)이 가능하고 이 경우에 제어가능하다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다. 여기서 시스템이 cyclizable하면 계수 지정(coefficient assignable)이 가능하다. 따라서 궤환 이득 행렬이 존재하기 위해서는 시스템이 cyclizable 해야 하는 데 그 문제는 다음 장에서 다룬다.

3. 다변수 시간지연 시스템에 대한 Augmentation 방법

이 장에서 다루는 시스템은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{p} A_i x(t-ih) + \sum_{j=0}^{q} B_j u(t-jh) \\ &= A(z)x(t) + B(z)u(t) \qquad (3.1)\end{aligned}$$

여기서 시스템 2장에서의 식 (2.12)를 만족한다고 가정하고 다항식 링 상에서 $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$, $A(z)=\sum_{i=0}^{p} A_i z^i$, $B(z)=\sum_{j=0}^{q} B_j z^j$로 둔다.

이제 F(z), G(z) 및 E(z) 행렬을 r×n, r×r, r×m차로 두고 다음과 같은 시스템을 고려한다.

$$\dot{w}(t) = F(z)x(t) + G(z)w(t) + E(z)u(t) \qquad (3.2)$$

식 (3.2)의 시스템을 식 (3.1)의 시스템에 augment 시키면

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(z) & 0 \\ F(z) & G(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(z) \\ E(z) \end{bmatrix} u(t) \qquad (3.3)$$

가 되어 그림 3.1과 같은 augment된 시스템으로 표현 가능하다.

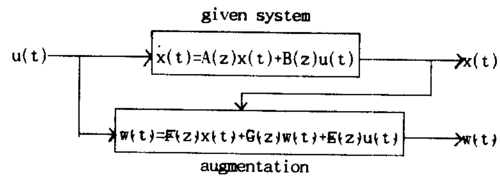

그림 3.1 augment된 시스템의 블럭선도

정 리 1

링(commutative Ring with Identity) 상에서 u(z)를 l>n인 n×l행렬로 놓자. 이때 U(z)의 랭크가 모든 z에 대해 n이면, 다음 조건을 만족하는 (l-n)×l 행렬 V(z)가 항상 존재한다.

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = l \quad \text{for all } z$$

증 명

U(z)의 랭크가 모든 z에 대해 항상 n이므로 Dorezal의 이론에 따라 다음식을 만족하는 l×l invertible 행렬 M(z)와 n×n invertible 행렬 W(z)가 항상 존재한다.

$$U(z)M(z) = [\ W(z)\ \vdots\ 0\ ]$$

여기서, $W_1(z)$를 임의의 $(l-n)\times(l-n)$ invertible 행렬로놓고 $V(z)=[0\ \vdots\ W_1(z)]M^{-1}(z)$라 놓으면

$$\begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(z) & 0 \\ 0 & W_1(z) \end{bmatrix} M^{-1}(z)$$

가 되고 이때 $\begin{bmatrix} W(z) & 0 \\ 0 & W_1(z) \end{bmatrix}$가 invertible 하므로 $\begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix}$도 invertible 하다. 따라서 $\begin{bmatrix} U(z) \\ V(z) \end{bmatrix}$가 invertible한 행렬 V(z)가 항상 존재한다. 이상으로 증명은 완료된다. ■

정리 1의 결과를 가제어성 행렬 식 (2.11)과 필요 충분조건 (2.12)에 적용하면 가제어성 행렬 Q(A(z),B(z))는 랭크가 mn차인 행렬 $\hat{Q}(\hat{A}(z),\hat{B}(z))$로 augment될 수 있음을 알 수 있다.

정 리 2

링 상에서 시스템 (A(z) B(z))가 제어가능하고 B(z)의 랭크가 적어도 하나의 z 값에 대해 rank B(z)=m 이면 n≤q≤mn인 정수 q에 대해

$$\dot{w}(t) = F(z)x(t) + G(z)w(t) + E(z)u(t)$$

의 (q-n)차 augmentation이 존재하여 q차의 augment된 시스템 $(\hat{A}(z), \hat{B}(z))$를 구성할 수 있다. 이 경우 augment된 시스템 $(\hat{A}(z), \hat{B}(z))$는 q-cyclizable 하며, $\hat{A}(z)$ 및 $\hat{B}(z)$는 식 (3.3)과 같이 주어지는 행렬이다.

증 명

증명 생략[17]

정리 2의 결과를 이용하면 nxmn차의 가제어성 행렬 $Q(A(z), B(z))$로부터 $B(z)$의 모든 열벡터 즉, $[b_1(z)\ b_2(z) \cdots b_m(z)]$를 포함하여 모든 z에 대해 rank가 n인 nxq차 $\bar{Q}(\bar{A}(z), \bar{B}(z))$를 구성할 수 있다. 따라서 $\bar{Q}(\bar{A}(z), \bar{B}(z))$에 정리 1의 결과를 적용하면 rank가 q인 qxq차 $\tilde{Q}(\hat{A}(z), \hat{B}(z))$로 augment가 가능하며 역시 식 (3.3)과 같은 q차의 augment된 시스템을 구할 수 있다.

이제 정리 1과 정리 2를 이용하여 q-cyclic한 augment 시스템 $(\hat{A}(z), \hat{B}(z))$를 구하는 방법을 단계별로 정리하면 다음과 같다.

단 계 1

먼저 원래의 시스템 $(A(z), B(z))$로부터 가제어성 행렬 $Q(A(z), B(z))$를 구한다. 즉,

$$Q(A(z), B(z)) = [B(z)\ A(z)B(z) \cdots A^{n-1}(z)B(z)] \quad (3.4)$$

이다. 이때 $B(z)$의 랭크는 적어도 하나의 z 값에 대해 m 이라고 가정한다.

단 계 2

nxmn차 가제어성 행렬 $Q(A(z), B(z))$의 랭크가 n이면 $Q(A(z), B(z))$ 행렬에서 $B(z)$의 모든 요소를 포함하여, 모든 z에 대해 rank $\bar{Q}(\bar{A}(z), \bar{B}(z))$=n이 되도록 nxq차 (여기서 $n \le q \le mn$) 행렬 $\bar{Q}(\bar{A}(z), \bar{B}(z))$를 구성한다. 즉,

$$Q(A(z), B(z)) = [b_1(z)\ b_2(z) \cdots b_m(z)\ A(z)b_1(z) \cdots A(z)b_m(z) \cdots A^{n-1}(z)b_m(z)] \quad (3.5)$$

로부터

$$\bar{Q}(\bar{A}(z), \bar{B}(z)) = [\, b_1(z)\ b_2(z) \cdots b_m(z) \mid \text{select the column vectors such that rank } \bar{Q}(\bar{A}(z)\bar{B}(z)) = n \,] \quad (3.6)$$

이 된다.

단 계 3

nxq차 행렬 $\bar{Q}(\bar{A}(z), \bar{B}(z))$로부터 rank $\tilde{Q}(\hat{A}(z), \hat{B}(z))$=q가 되도록 q-n차 열벡터(column vectors) $e_0(z)\ e_1(z) \cdots e_{q-1}(z)$를 선정해 augment된 가제어성 행렬 $\tilde{Q}(\hat{A}(z), \hat{B}(z))$를 구한다.

$$\tilde{Q}(\hat{A}(z), \hat{B}(z)) = \left[\begin{array}{c|c|c} b_1(z)\ b_2(z) \cdots\ b_m(z) & \text{selected the column vectors} & \\ \hline e_0(z)\ e_1(z) \cdots e_{m-1}(z) & e_m(z) & \cdots\cdots\cdots\ e_{q-1}(z) \end{array} \right] \quad (3.7)$$

이때 $[e_0(z) \cdots e_{q-1}(z)]$는 모든 z에 대해 $\tilde{Q}(\hat{A}(z)\hat{B}(z))$가 invertible 하도록 잡는다.

단 계 4

이제 Augment 시스템 행렬을

$$\hat{A}(z) = \left[\begin{array}{c|c} A(z) & 0 \\ \hline F(z) & G(z) \end{array} \right], \quad \hat{B}(z) = \left[\begin{array}{c} B(z) \\ E(z) \end{array} \right] \quad (3.8)$$

로 놓고 $E(z)=[e_0(z) \cdots e_{m-1}(z)]$의 값을 취하며 $\hat{B}(z)$의 각 열벡터들을 $\hat{b}_1(z)\ \hat{b}_2(z) \cdots \hat{b}_m(z)$으로 놓는다. 이때 $\tilde{Q}(\hat{A}(z)\hat{B}(z))$ 앞에 $\hat{A}(z)$를 곱하면

$$\hat{A}(z)\tilde{Q}(\hat{A}(z)\hat{B}(z)) = [\hat{A}(z)\hat{b}_1(z)\ \hat{A}(z)\hat{b}_2(z) \cdots \hat{A}(z)\hat{b}_m(z) \mid \cdots] \quad (3.9)$$

가 되고 식 (3.9)의 우변에서 선택된 열벡터들에 대한 $e_i(z)$ 값들을 $A^j(z)b_k(z)$의 형태들로부터 주어지는 계수들을 이용하여 구할 수 있다. 또 $\tilde{Q}(\hat{A}(z)\hat{B}(z))$는 모든 z에 대해 invertible 하므로

$$[F(z)\ G(z)] = [\hat{A}(z)b_1(z) \cdots \hat{A}(z)b_m(z) \mid \cdots]\tilde{Q}^{-1}(\hat{A}(z)\hat{B}(z)) \quad (3.10)$$

으로 구한다.

이상의 4단계 절차를 거쳐 q-cyclic한 augment 시스템 식 (3.8)을 구성한다. 시간지연 시스템에서 구성된 Augment 시스템 식 (3.8)에 대해 이제 시간지연에 독립적으로 (independent of delay) 안정한 폐회로 궤환 이득 $K(z)$를 구한다.

4. 다변수 시스템의 궤환제어기 설계

다변수 시스템에 대한 궤환제어기 설계방법은 1장에서 언급한 방법 이외에도 여러가지 방법이 있으나 본 장에서는 직접방법(direct method)을 통한 제어기 설계과정을 기술한다. 다변수 시스템 $\Sigma=(A, B)$에 폐회로 궤환 루우프를 구성할 때 궤환이득 K_0와 m벡터 μ_0가 존재하여 $(A-BK_0, B\mu_0)$가 단일 입력 시스템을 제어할 수 있을 때, 이 시스템은 cyclizable 하다고 한다. 링(Ring) 상에서 표현되는 다변수 시간지연 시스템 $\Sigma(z)=(\hat{A}(z)\hat{B}(z))$에서 시스템이 cyclizable 하면 계수지정(coefficient assignment)이 가능하고 따라서 극점지정(pole assignment)이 가능하며 제어가능하다. 그러므로 시스템이 cyclizable 하도록 K_0, μ_0를 구하는 방법이 중요하며, K_0, μ_0가 구해졌을 때에는 $(\hat{A}(z)-\hat{B}(z)K_0(z),\ \hat{B}(z)\mu_0(z))$의 단일 입력 시스템으로 간주하여 극점배치(pole placement) 방법에 따른 궤환이득을 구할 수 있다. 즉, 이때에는 행벡터 W가 존재하여

$$\det(sI-\hat{A}+\hat{B}K_0+\hat{B}\mu_0 W) = s^q + \sum_{i=0}^{q-1} r_i s^i \quad (4.1)$$

가 되도록, 다시 말해서 원하는 계수지정이 이루어 지도록 궤환이득 행렬 $\mu_0 W$를 구하면 된다. 이를 그림으로 표현하면 그림 4.1과 같다.

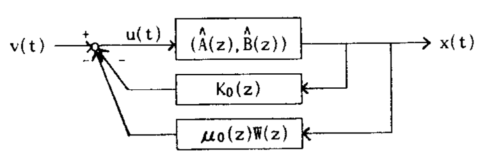

그림 4.1 직접방법에 따른 다변수 시간지연 시스템의 궤환제어기 구성

정 리 3

$(\hat{A}(z),\hat{B}(z))$가 q-cyclizable하면 q×q 행렬 $[r_0(z)\ r_1(z) \cdots r_{q-1}(z)]$가 invertible한 열벡터 열(column vector sequence) $\mu_0(z)\ \mu_1(z) \cdots \mu_{q-1}(z) \in R^m$이 존재한다. 이때

$$r_0(z) = \hat{B}(z)\mu_0(z)$$

$$r_i(z) = \hat{A}(z)r_{i-1}(z) + \hat{B}(z)\mu_i(z), \quad i=1,2,\cdots,q-1$$

이며, 각각의 $\mu_0(z) \cdots \mu_{q-1}(z)$와 $r_0(z) \cdots r_{q-1}(z)$가 구해지면 $(\hat{A}(z)-\hat{B}(z)K_0(z),\ \hat{B}(z)\mu_0(z))$는 제어가능하다. 또 여기서

$$K_0(z) = -[\mu_1(z) \cdots \mu_{q-1}(z)\ 0][r_0(z) \cdots r_{q-1}(z)]^{-1}$$

로 주어진다. ■

정리 3의 결과로 링(commutative Ring with Identity) 상에서의 다변수 시간지연 시스템에 대한 궤환 제어기 설계는 필드(field) 상에서 다변수 상미방시스템에 대한 궤환제어기 설계방법과 동일함을 알 수 있다. 이때 다변수 시스템 전체에 대한 궤환 이득은

$$K(z) = K_0(z) + \mu_0(z)W(z) \tag{4.2}$$

로 나타난다.

5. 예제 시뮬레이션

다음과 같은 다변수 시간지연 시스템을 생각한다.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t-h)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u(t-2h) \tag{5.1}$$

이때 지연 연산자 z를 $zf(t)=f(t-h)$로 정의하면 위 시스템은

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix}0 & 0\\ z & 0\end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & z^2-1\end{bmatrix}u(t)\\ &= A(z)x(t) + B(z)u(t)\end{aligned} \tag{5.2}$$

로 표현됨을 알 수 있다. 따라서 식 (2.11)의 정의에 따라 가제어성 행렬은

$$Q = \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & z^2-1 & z & 0\end{array}\right] \tag{5.3}$$

으로 주어져 지연 연산자 z의 모든 값에 대해 제어가능함을 알 수 있다. 이제 식 (5.2)의 B(z)항을 $b_1=[1\ \ 0]^T$, $b_2=[0\ \ z^2-1]^T$으로 놓으면 $A(z)b_1=[0\ \ z]^T$, $A(z)b_2=[0\ \ 0]^T$가 되고 $A^2(z)B(z)=\phi$ 행렬이 됨을 알 수 있다.

가제어성 행렬의 요소들 중 항상 시스템 차수와 동일한 랭크를 갖도록 $[b_1\ \ b_2\ \ A(z)b_1]$을 선택하여, 이 행렬이 역행렬을 갖도록 $[e_0\ e_1\ e_2]$를 $[0\ z\ 1]$로 택하면

$$\tilde{Q} = \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\ 0 & z^2-1 & z\\ \hline 0 & z & 1\end{array}\right] \tag{5.4}$$

가 되어 $\tilde{Q}$이 invertible함을 알 수 있다.

한편 $\hat{A}=\left[\begin{array}{c|c}A & 0\\ \hline F & G\end{array}\right]$, $\hat{B}=\left[\begin{array}{c}B\\ \hline E\end{array}\right]$ 및 $E=[e_0\ e_1]$으로 놓고 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 시스템 행렬에 의해 주어지는 가제어성 행렬이 식 (5.4)의 성분을 갖도록 F, G를 결정한다. 식 (5.4)에 $\hat{A}$을 전-곱셈(pre-multiply)하면

$$\hat{A}\tilde{Q} = [\ \hat{A}\hat{b}_1\ \ \hat{A}\hat{b}_2\ \ \hat{A}^2\hat{b}_1\ ] \tag{5.5}$$

이 된다. 여기서 $\hat{b}_1=[b_1\ \ 0]^T$, $\hat{b}_2=[b_2\ \ z]^T$이고 $\hat{A}\hat{b}_1=[0\ z\ 1]^T$이다. 또 식 (5.4)와 식 (5.5)로부터 $[F\ G]\tilde{Q}=[e_2\ e_3\ e_4]$로 놓으면 $Ab_2=[0\ 0]^T$, $A^2b_1=[0\ 0]^T$로부터 $e_3=e_4=0$이 됨을 알 수 있다. 따라서 $[F\ \ G]\tilde{Q} = [1\ \ 0\ \ 0]$이 되고 $\tilde{Q}$은 역행렬이 존재하므로

$$\begin{aligned}[\ F\ \ G\ ] &= [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]\tilde{Q}^{-1}\\ &= [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & z\\ 0 & z & -(z^2-1)\end{bmatrix}\\ &= [\ 1\ \ 0\ \ 0\ ]\end{aligned} \tag{5.6}$$

가 된다. 그러므로 augment된 시스템 $\Sigma(z)=(\hat{A}(z)\hat{B}(z))$은

$$\hat{A}(z) = \left[\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ z & 0 & 0\\ \hline 1 & 0 & 0\end{array}\right] \qquad \hat{B}(z) = \left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & z^2-1\\ \hline 0 & z\end{array}\right] \tag{5.7}$$

이 된다. 이때 시스템 $\Sigma(z)$의 가제어성 행렬 $\hat{Q}(z)$을 구하면

$$\hat{Q}(z) = \left[\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & z^2-1 & z & 0 & 0 & 0\\ 0 & z & 1 & 0 & 0 & 0\end{array}\right] \tag{5.8}$$

로써 랭크가 z의 모든 값에 무관하게 3이 됨을 알 수 있다.

이제 시스템 $\Sigma(z)$가 cyclizable 하도록 $K_0(z)$와 $\mu_0(z)$를 정한다. 먼저

$$\mu_0(z) = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

로 놓으면

$$r_0(z) = \hat{B}(z)\mu_0(z) = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

가 되며

$$\mu_1(z) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

으로 놓으면

$$r_1(z) = \hat{A}(z)\hat{B}(z)\mu_0(z) = \begin{bmatrix}0\\ z\\ 1\end{bmatrix}$$

이 된다. 또 $r_0(z)$, $r_1(z)$, $r_2(z)$로 이루어진 3×3 행렬이 invertible 하도록

$$\mu_2(z) = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

로 놓으면

$$r_2(z) = \hat{A}(z)r_1(z) + \hat{B}(z)\mu_2(z) = \hat{B}(z)\mu_2(z) = \begin{bmatrix}0\\ z^2-1\\ z\end{bmatrix}$$

가 됨을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}K_0(z) &= -[\ \mu_1(z)\ \ \mu_2(z)\ \ 0\ ][\ r_0(z)\ \ r_1(z)\ \ r_2(z)]^{-1}\\ &= -\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & z & -(z^2-1)\\ 0 & -1 & z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -z & z^2-1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

가 된다.

그러므로 $(\hat{A}(z)-\hat{B}(z)K_0(z),\ \hat{B}(z)\mu_0(z))$는 cyclic하다는 것을 알 수 있으며 이때

$$K_0(z) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -z & z^2-1\end{bmatrix}, \quad \mu_0(z) = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

의 단일 입력 시스템이 되어 원하는 극점배치 방법에 따라 궤환 제어 이득 W를 구할 수 있고

$$K(z) = K_0(z) + \mu_0(z)W(z)$$

에 따라 다변수 시간지연 시스템의 전체 궤환이득을 구할 수 있다.

6. 결 론

제어가능한 다변수 시간지연 시스템에 대한 궤환제어기 설계방법을 대수적인 접근방법을 이용하여 제안하였다. 링(commutative Ring with identity) 상에서 정의되는 시간지연 시스템이 cyclizable 하면 계수지정(coefficient assignment)이 가능하다는 특성을 이용하여 다변수 시간지연 시스템을 단일 입출력 시스템으로 변환시킨 뒤 시간지연이 있는 단일 입출력 시스템에 대한 궤환이득 행렬을 구한다. 특히, m-입력 n차 시스템(A(z),B(z))에 대해 선형 시변 이산시간 시스템의 경우[17]와 유사하게 가제어성 행렬을 이용하여 $n \le q \le mn$인 q차 시스템(A(z),B(z))으로 augmenetation 시키는 방법을 제시하였으며 이 경우 q-cyclizable 하여 계수지정에 따른 궤환이득의 설정이 가능하다.

참 고 문 헌

[1] M. N. Oguztörel, Time-Lag Control Systems. Academic Press, London, 1966.

[2] A. Z. Manitus and A. W. Olbrot, "Finite spectrum assignment problem for systems with delays," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-24, no. 4, pp.541-553, Aug. 1979.

[3] G. J. Nazaroff and G. A. Hewer, "Stabilization of linear autonomous differential delay systems," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-18, pp.673-674, Dec. 1973.

[4] W. H. Kwon and A. E. Pearson, "A note on feedback stabilization of a differential-difference system," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-22, pp.468-470, June 1977.

[5] W.H. Kwon and A.E. Pearson, "Feedback stabilization of linear systems with delayed control," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-25, no.2, pp.266-269, Apr. 1980.

[6] E.B.Lee, S.H.Zak, and S.D.Brierley, "Stabilization of generalized linear systems via the algebraic Riccati equation," Int. J. Contr., vol.39, no.5, pp.1025-1041, 1984.

[7] K.Watanabe, "Finite spectrum assignment and observer for multivariable systems with commensurate delays," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-28, no.4, pp.506-508, Apr. 1983.

[8] A. W. Olbrot, "On controllability of linear systems with time delays in control," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-17, pp.664-666, Oct. 1972.

[9] A. Manitius, "Controllability, Observability and stability of retarded systems," in Proc. 1976 IEEE CDC, pp.752-758, Clearwater, FL.

[10] E. W. Kamen, "Linear systems with commensurate time delays : stability and stabilization independent of delays," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-27, no.2, pp.367-375, Apr. 1982.

[11] A. W. Olbrot, "Stabilization, detectability, and spectrum assignment for linear autonomous systems with general time delays," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-23, no.5, pp.887-890, Oct. 1978.

[12] E. Emre and P. P. Khargonekar, "Regulation of split linear systems over rings : coefficient-assignment and observers," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. AC-27, no.1, pp.104-113, Feb. 1982.

[13] M. G. Frost, "Controllability, observability and the transfer function matrix for a delay-differential system," Int. J. Contr., vol.35, no.1, pp.175-182, 1982.

[14] K. Watanabe, " Further study of spectral controllability of systems with multiple commensurate delays in state variables," Int. J. Contr., vol.39, pp.497-505, 1984.

[15] D. Salamon, "On controllability and observability of time delay systems," IEEE Trans. on Automat. Contr., vol.AC-29, no.5, pp.432-439, May 1984.

[16] E. W. Kamen and K. M. Hafez, "Algebraic theory of linear time-varying systems," SIAM J. Contr. and Optimization," vol.17, no.4, pp.500-510, July 1979.

[17] S. K. Hwang, An Augmentation Approach and Theory of the Resultant for Linear Time-Varying Systems, Ph.D Dissertation, University of Florida, 1986.

[18] E. W. Kamen, P. P. Khargonekar, and K. R. Poolla, "A transfer function approach to linear time-varying discrete-time systems," SIAM J. of Control and Optimization, vol.23, pp.550-565, 1985.

[19] K. R. Poolla, " Linear time-varying systems : representation and control via transfer function matrices," Ph.D Dissertation, University of Florida, 1984.

[20] C. T. Chen, Linear System Theory and Design. Holt, Rinehart and Winston, 1984.

[21] S. V. Churakova and F. M. Kirillova, "On the problem of controllability of linear systems with after effects," Diff. Urarneniza, vol.3, pp.436-445, 1967.

[22] A. S. Morse, "Ring models for delay-differential systems," IFAC Multivariable Technological Systems, Manchester, 1974.