

# LQG/LTR 제어를 위한 루프형성기법에 관한 연구

한성익 · 김종식  
부산대학교 기계설계공학과

## On the Loop-Shaping Techniques for the LQG/LTR Control

Seong Ik Han and Jong Shik Kim  
Dept. of Mechanical Design Eng.  
Pusan National University

### Abstract

Loop shaping techniques are developed for the LQG/LTR controller design of singular multivariable systems. One approach is to use the mode form of plant and the other is to replace the eigenvalues at 0 by ones at  $\varepsilon$  ( $\rightarrow 0$ ). These two concepts for the target filter loop design are applied to a flight autopilot. And it is shown that these techniques are effective ones for the desired loop-shaping of singular multivariable systems.

### 1. 서론

다변수 시스템에 대한 제어기설계는 여러가지 방법으로 연구되어 왔는데, 1960년대 최적제어이론에 의한 LQ 제어방법부터 시작되어 LQG 제어방법으로 발전되었고 70년대 후반부터 특이값개념이 도입되면서<sup>[1,2]</sup> 제어기설계시 루프형성개념을 도입한 강력한 선형 다변수 제어시스템 설계방법인 LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery) 방법이 1980년대초 Doyle과 Stein에 의하여 개발되었다<sup>[3]</sup>. 그 후 지금까지 LQG/LTR 제어방법이 폭 넓게 적용되고 있는 것은 시행착오적인 LQ, LQG 제어방법과는 달리 까다롭지 않은 가정아래서 잘 정의된 기법으로 조직적으로 다변수 제어시스템을 설계할 수 있다는 장점을 갖고 있기 때문이다.

LQG/LTR 제어시스템 설계는 크게 바람직한 루프형성을 위한 목표필터루프 설계와 피드백 시스템의 루프를 목표필터루프의 형상으로 회복시키는 루프전달회복의 2단계로 이루어진다. 일반적으로 LQG/LTR 제어시스템 설계시 플랜트는 안정가능(stabilizable)하고 검출가능(detectable)해야 하며 그리고 비특이(nonsingular), 최소위상(minimum phase) 시스템이어야 바람직한 루프형성과 루프전달회복이 보장된다. 그러나 아직까지 LQG/LTR 제어시스템 설계시 문제점으로 있는 비최소위상(nonminimum phase) 플랜트에 대한 루프전달회복에 관한 연구는 활발하게 이루어지고 있지만<sup>[4,5]</sup>, 특이(singular) 시스템에 대한 루프형성 문제는 오직 단일입출력 시스템에 대한 연구에 그치고 있다<sup>[6]</sup>. 따라서 본 논문에서는 다변수 특이 시스템에 대하여 바람직한 목표필터루프형성을 할 수 있는 방법들을 제시하고자 한다.

### 2. 비특이 시스템의 목표필터루프 설계

일반적으로 제어하고자 하는 플랜트의 상태공간 모델식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $x_p(t) \in R^n$ ,  $u_p(t) \in R^m$ ,  $y(t) \in R^l$  이다. 또한  $A_p^{-1}$ 가 존재하는 비특이 시스템이라고 가정하고 임의의 일정한 기준입력이나 외란에 대하여 정상상태 오차가 발생하지 않는 제어시스템을 설계하고자 한다고 가정한다. 이때 플랜트의 각 제어 채널에 피드백이 없는 자유적분요소(free integrator)를 첨가하여 다음과 같은 설계플랜트모델을 설정해야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_p & A_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad C_p]$$

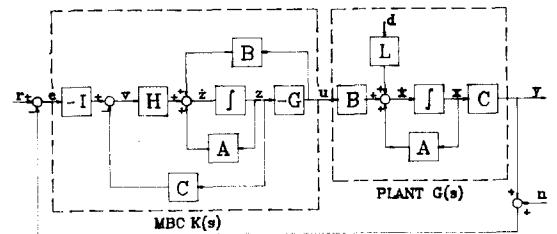


Fig. 1 Structure of LQG/LTR control systems

LQG/LTR 제어시스템의 구조는 Fig. 1과 같고, LQG/LTR 제어시스템 설계절차는 크게 2단계로 구분된다. 우선 설계플랜트모델(식 (2))에 대하여 바람직한 루프형성을 얻을 수 있는 목표필터루프(target filter loop)를 설계하고, 루프전달회복(loop transfer recovery)을 수행하여 설계된 피드백 제어시스템의 루프형상을 목표필터루프의 형상으로 회복시키는 단계로 이루어진다. 그리고 LQG/LTR 보상기의 전달함수형  $K(s)$ 는 다음과 같다.

$$K(s) = G (sI - A + BG + HC)^{-1} H \quad (3)$$

여기서 설계파라미터 H는 목표필터루프 설계과정에서 그리고 설계파라미터 G는 루프전달회복 과정에서 선정된다.

LQG/LTR 제어시스템 설계 목적상 프로세스와 센서에 대한 잡음을 백색잡음으로 가정하고 설계플랜트의 상태공간 모델식을 다음과 같이 수정한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + L\xi(t) \\ y(t) &= Cx(t) + \theta(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\xi(t)$ 와  $\theta(t)$ 는 평균이 0이고 각각 강도가 1과  $\mu$ 인 가상의 백색잡음이다. 즉,

$$\begin{aligned} E[\xi(t)] &= 0, \quad E[\xi(t)\xi^T(\tau)] = I \delta(t - \tau) \\ E[\theta(t)] &= 0, \quad E[\theta(t)\theta^T(\tau)] = \mu I \delta(t - \tau) \end{aligned} \quad (5)$$

목표필터루프를 설계하기 위해서는 우선 위와 같은 가상적인 센서잡음에 대한 Kalman 필터 문제를 해결함으로써 필터계인행렬 H를 선정한다.

$$H = \frac{1}{\mu} PCT \quad (6)$$

여기서 P는 다음의 Riccati식으로부터 구한다.

$$AP + PAT + LLT - \frac{1}{\mu} PCTCP = 0 \quad (7)$$

그리고 설계파라미터  $\mu$ 와 L을 선정하기 위해서 Kalman 필터 주파수역 등가(Kalman filter frequency domain equality) 결과[7]를 이용하여 목표필터루프의 전달함수행렬  $G_F(s) = C(sI - A)^{-1}H$ 를 근사적으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$G_F(s) \approx \frac{1}{\sqrt{\mu}} C (sI - A)^{-1} L \quad (8)$$

설계파라미터 L은 바람직한 루프형상을 얻기 위하여 일반적으로 다음 식들을 이용하여 선정한다[6].

1) 저주파에서 특이값을 일치시키는 경우

$$L = -C_p T (C_p A_p^{-1} C_p T)^{-1} \quad (9)$$

혹은

$$L = -A_p C_p T (C_p C_p T)^{-1} \quad (10)$$

2) 고주파에서 특이값을 일치시키는 경우

$$L = C_p T (C_p C_p T)^{-1} \quad (11)$$

3) 고주파 및 저주파에서 동시에 특이값을 일치시키는 경우

$$L = \begin{bmatrix} -(C_p A_p^{-1} B_p)^{-1} \\ C_p T (C_p C_p T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

이와 같이 설계파라미터 L이 선정되면, 다음 설계파라미터  $\mu$ 를 이용하여 루프형상을 아래 위로 움직이면서 요구되는 교차주파수 혹은 대역폭을 만족시킨다. 바람직한 설계파라미터  $\mu$ 와 L을 선정함으로써 바람직한 목표필터루프를 형성한 후, LQG/LTR 보상기의 설계파라미터의 하나인 필터계인행렬 H를 식 (6)과 식 (7)로부터 선정한다.

그러나 설계파라미터 L 선정시 일반적으로 사용하고 있는 고주파 및 저주파에서 동시에 특이값을 일치시키는 경우에는  $A_p^{-1}$  계산이 요구된다. 따라서 플랜트가 특이 시스템인 경우는  $A_p^{-1}$ 가 존재하지 않으므로 이 방법을 이용하여 설계파라미터 L을 선정할 수 없다. 그래서 이러한 경우 새로운 설계파라미터 L을 선정하는 방법이 요구되며, 이것이 본 논문의 연구목표이다.

### 3. 특이 시스템의 목표필터루프 설계

#### 3.1 특이 단일입출력 시스템의 경우

식 (12)의 루프형성 방법을 이용하여 행렬 L을 선정하기 위해서는 설계플랜트모델에 자유적분요소가 포함되어 있어야 한다. 첨가된 자유적분요소(혹은 플랜트 자체의 자유적분요소)만 남겨놓고 단일입출력 플랜트의 모든 극점이 제거되도록 행렬 L을 선정하여 바람직한 루프형상을 만드는 방법이다. 이 때 원하지 않는 플랜트의 동역학이 모든 주파수에서 제거될 수 있으므로 바람직한 루프형상을 얻을 수 있게 된다.

단일입출력 시스템에서 설계파라미터 L은  $(n \times 1)$  벡터로서 n개의 요소가 n개의 독립적인 설계파라미터가 된다. 이 설계파라미터 L을 선정하기 위하여 필터 개루프 전달함수  $G_{FOL}(s)$ 에 대하여 생각하기로 한다.

$$G_{FOL}(s) = C(sI - A)^{-1}L \quad (13)$$

연속적으로 L의 각 요소를 1로 하고 나머지 요소는 0로 하여 n개의 필터 개루프 전달함수를 구한다. 이 n개의 필터 개루프 전달함수의 영점다항식은  $G_{FOL}(s)$ 의 영점다항식을 얻기 위하여 선형결합을 할 수 있는 성분(constituent) 영점다항식의 요소가 된다. 이 성분 영점다항식의 계수를 이용함으로써, 다음과 같이 설계파라미터 L을 선정할 수 있는 선형방정식을 만들 수 있다.

$$Z_c L = z_d \quad (14)$$

여기서  $Z_c$ 는 전달함수  $G_{FOL}(s)$ 의 성분 영점다항식의 계수가 열벡터의 요소가 되는  $(n \times n)$  행렬이다. 예를 들면, 행렬  $Z_c$ 의 첫번째 열벡터는  $C(sI - A)^{-1} [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ 의 분자의 계수로 이루는 벡터이다. 그리고  $z_d$ 는 바람직한 영점다항식 즉, 첨가된 자유적분요소가 없는 개루프 특성방정식의 계수로 이루는 벡터이다. 식 (14)에서 해 L이 유일하게 존재하기 위해서는  $\text{rank}(Z_c) = n$  이어야 한다. 플랜트가 중근(repeated root)을 갖고 있지 않는다면 이 조건식은 만족하게 되며, 이 때 설계파라미터 L은 다음과 같이 선정된다.

$$L = Z_c^{-1} z_d \quad (15)$$

지금까지 단일입출력 시스템의 목표필터 루프형성에 관한 기법을 소개하였다. 그러나 특이 다변수 시스템의 경우에는 이 방법을 사용하여 바람직한 루프형상을 얻을 수 없으므로 다음 절에서 이와 같은 시스템에 대하여 적용할 수 있는 루프형성기법을 제안하기로 한다.

#### 3.2 특이 다변수 시스템의 경우

1) 모드형태를 이용하는 방법

이 경우는 플랜트에 포함된 자유적분요소가 각 제어채널에 첨가하는 자유적분요소와 같은 효과를 내도록 하고 가능하면 제어시스템의 차수를 증가시키지 않도록 하는 방법이다. 플랜트에  $k(1 \leq k < n)$ 개의 자유적분요소가 있는 경우로서  $(m - k)$ 개의 자유적분요소만을 첨가하여  $(n + m - k)$ 차의 설계플랜트모델을 다음과 같이 설정한다. 여기서  $m$ 은 제어 입력의 개수이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서,

$$x(t) = [ u_{p1} \ u_{p2} \ \dots \ u_{p(m-k)} \ x_p ]^T$$

$$x_p = [ x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n ]^T$$

먼저  $n$ 차의 플랜트를 모드형태로 상사변환시켜 행렬  $A_p$ 를 자유적분요소로 구성된  $A_k$ 행렬( $0_{k \times k}$ )과 나머지 모드의 극점들을 대각행렬에 배열하여 다음과 같이 재구성한다.

$$A_p = \begin{bmatrix} A_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{k+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{bmatrix}$$

편의상 Fig. 2와 같이 입출력 개수가 2개이고 플랜트에 자유적분요소가 1개 있는  $n$ 차의 특이 시스템의 경우를 예로서 설명하기로 한다. Fig. 2로부터  $\dot{u}_{p1} = u_1$ ,  $u_{p2} = u_2$ 가 성립됨을 알 수 있으며, 이때 플랜트의 자유적분요소 모드에 대한 상태방정식은  $\dot{x}_1 = B_{11}u_{p1} + B_{12}u_2$ 이다. 따라서 식 (16)으로 표현된 설계플랜트모델에서 상태벡터  $x$ 와 제어입력벡터  $u$  그리고 시스템행렬  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$x = [ x_a \ | \ x_r ]^T = [ u_{p1} \ x_1 \ | \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n ]^T$$

$$u = [ u_1 \ u_2 ]^T$$

그리고

$$A = \begin{bmatrix} B_a & 0 \\ B_r & A_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{21} & 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B_{12} \\ 0 & B_{22} \\ 0 & B_{32} \\ \dots & \dots \\ 0 & B_{n2} \end{bmatrix}$$

$$C = [ C_a \ | \ C_r ] = \begin{bmatrix} 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \end{bmatrix}$$

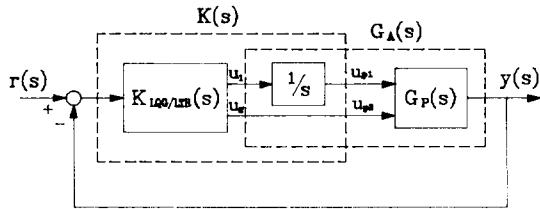


Fig. 2 LQG/LTR control system via design plant model with free integrator

이제 설계플랜트모델에 대해 바람직한 목표필터루프를 설계하기 위하여 특이값이 저주파 및 고주파에서 동시에 일치되는 루프형상이 되도록 설계파라미터 행렬  $L$ 을 선정하기 위하여 다음과 같은 연산을 수행한다. 여기서는 편의상  $B_a = 0$ 으로 가정한다.

우선  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$ 를 다음과 같이 표현한다.

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} sI & 0 \\ -B_r & sI - A_r \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ (sI - A_r)^{-1}B_r/s & (sI - A_r)^{-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 1) 저주파역 일치

저주파역에서 특이값을 일치시키기 위해서 앞에서와 같이

$\Phi(s)$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s) = \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ -A_r^{-1}B_r/s & -A_r^{-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{FOL}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} C\Phi(s)L$$

$$= [ C_a \ C_r ] \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ -A_r^{-1}B_r/s & -A_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

$$= I/s [(C_a - C_r A_r^{-1} B_r) L_1] - C_r A_r^{-1} L_2 \quad (19)$$

윗 식에서  $s \rightarrow 0$ 이면 상수항은 무시될 수 있으므로,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{FOL}(s) = I/s (C_a - C_r A_r^{-1} B_r) L_1 \quad (20)$$

따라서 저주파역에서 모든 특이값을 일치시키려면 다음 식이 만족되어야 한다.

$$(C_a - C_r A_r^{-1} B_r) L_1 = I \quad (21)$$

혹은,

$$L_1 = (C_a - C_r A_r^{-1} B_r)^{-1} \quad (22)$$

### 2) 고주파역 일치

고주파역에서 모든 특이값을 일치시키고자 할때 저주파역에서와 같이  $\Phi(s)$ 를 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Phi(s) = \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ B_r/s^2 & I/s \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_{FOL}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} C\Phi(s)L$$

$$= [ C_a \ C_r ] \begin{bmatrix} I/s & 0 \\ B_r/s^2 & I/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

$$= [ (C_a/s + C_r B_r/s^2) L_1 + C_r L_2/s ] \quad (24)$$

윗 식에서  $s \rightarrow \infty$ 이면  $1/s^2$ 항은 무시될 수 있으므로,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} G_{FOL} = (C_a L_1 + C_r L_2)/s \quad (25)$$

따라서 고주파역에서 특이값을 일치시키려면 다음 식이 만족되어야 한다.

$$C_a L_1 + C_r L_2 = I \quad (26)$$

혹은,

$$C_r L_2 = I - C_a L_1 \quad (27)$$

만약  $(I - C_a L_1)^{-1}$ 이 존재한다면  $(I - C_a L_1)^{-1} C_r L_2 = I$ 가 성립하므로, 이때 설계파라미터  $L_2$ 는 다음과 같이 선정될 수 있다.

$$L_2 = [(I - C_a L_1)^{-1} C_r]^T [(I - C_a L_1)^{-1} C_r ((I - C_a L_1)^{-1} C_r)^T]^{-1} \quad (28)$$

이와 같이 특이 다변수 시스템의 경우 저주파 및 고주파에서 특이값을 일치시켜 바람직한 목표필터루프를 설계할 수 있는 설계파라미터  $L$ 을 선정할 수 있다.

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

여기서  $B_a = 0$ 으로 가정하였으므로  $B_a$ 가 0이 아닌 플랜트에 대해서는 저주파에서 완전한 특이값 일치는 어려운 것으로 예상된다. 그렇지만  $B_a = 0$ 이고  $(I - C_a L_1)^{-1}$ 가 존재하는 경우에는 설계플랜트모델 설정시 제어시스템의 성능향상을 위해 제어채널에 추가하는 자유적분요소의 개수를 플랜트 자체가 포함하고 있는 자유적분요소의 개수만큼 줄일 수

있으므로 제어기의 차수를 크게하지 않는 장점을 가지면서 바람직한 목표필터루프를 설계할 수 있는 방법의 하나로 제안할 수 있다.

## 2) 비특이 시스템으로 가정하는 방법

이 경우는 플랜트의 자유적분요소를 그대로 두고 새로운 자유적분요소를 각 제어채널에 모두 첨가하여 목표필터루프를 설계하는 방법이다. 그런데 자유적분요소를 포함하고 있는 플랜트는 특이 시스템이므로  $A_p^{-1}$ 가 존재하지 않는다. 그러므로 목표필터루프 설계시 식 (12)에 주어진 저주파 및 고주파에서 특이값을 동시에 일치시키는 방법을 사용할 수 없다. 따라서 이 방법을 이용하기 위해서는  $A_p^{-1}$ 가 존재하면서 저주파의 시스템 특성을 크게 변화시키지 않는 안정한 극점으로 대체하는 방법을 제안한다.

먼저 A 행렬을 특이 행렬로 만드는 고유값 0을 플랜트의 저주파의 동특성을 크게 변화시키지 않는 안정한 고유값  $\epsilon$  ( $\rightarrow 0$ )으로 대체하여 새로운  $A_p'$  행렬을 만들어 역행렬이 존재하도록 하고 각 제어채널에 자유적분요소를 첨가한 설계 플랜트모델을 설정한다. 저/고주파에서 특이값이 일치하는 바람직한 루프형상을 얻을 수 있도록 이와같이 수정된 설계 플랜트모델에 대하여 LQG/LTR 제어를 설계하고, 설계된 LQG/LTR 제어시스템의 성능평가는 설계플랜트모델 설정시 대체된 저주파 극점을 원래의 0으로 다시 환원한 실제플랜트와 수정된 설계플랜트모델을 가지고 설계한 제어기를 결합한 제어시스템에 대해 수행한다.

이 방법은 플랜트에 따라 임의로 저주파의 동특성을 변경함으로써 인한 저주파에서의 감도문제가 발생할 수 있고, 또한 전자의 방법에 비해 제어기의 차수가 증가되는 단점을 갖고 있다. 그렇지만 전자의 방법으로 바람직한 루프형상을 얻을 수 없는 경우에는 이 방법을 이용하여 바람직한 목표필터루프를 형성할 수 있다.

## 4. 설계예

### 4.1 모드형태를 이용한 루프형성

앞 절에서 제안된 모드형태를 이용한 루프형성기법을 이용하여 특이 다변수 시스템의 목표필터루프 설계과정을 설명한다. 이 예제는  $B_a = 0$ 이고  $(I - C_a L_1)^{-1}$ 가 존재하는 경우이다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \\ y(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (30)$$

여기서,

$$A_p = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이 시스템의 고유값  $\lambda = 0, -1, -2, -3$  으로서 자유적분요소를 하나 포함하고 있으므로 설계플랜트모델에 자유적분요소를 하나만 첨가하기로 한다. 여기서는 Fig. 2와는 달리 자유적분요소가 두번째 제어입력( $u_{p2}$ )에 첨가된 경우이다.

이때 설계플랜트모델의 상태벡터  $x$ 와 제어입력  $u$  그리고 시스템행렬  $A, B, C$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$x = [ u_{p2} \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 ]^T, \quad u = [ u_1 \ u_2 ]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.118 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1.118 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.677 & 0 \\ 1.118 & 0 \\ 0.559 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0.5963 & -0.8944 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8944 \end{bmatrix}$$

Fig. 3은 플랜트에 대한 특이값선도이고, Fig. 4는 앞 장에서 제안한 방법을 이용하여 선정된 설계파라미터 L 값을 가지고 설계한 목표필터루프의 특이값 선도로서, 기대한대로 저주파 및 고주파에서 만족스러운 특이값 일치치를 이루고 있다.

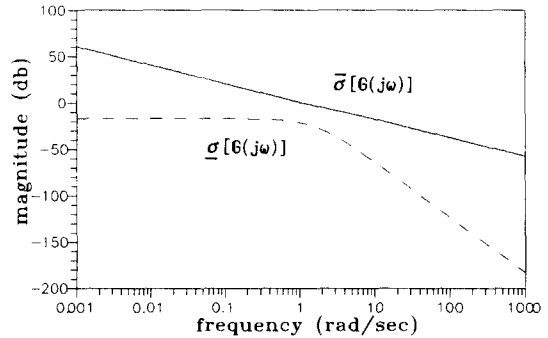


Fig. 3 Singular value plot of plant

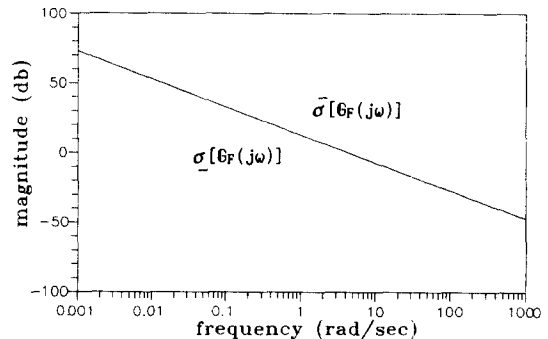


Fig. 4 Singular value plot of target filter loop

### 4.2 비행체의 횡방향 LQG/LTR 제어기 설계

앞의 예제는  $B_a = 0$  그리고  $(I - C_a L_1)^{-1}$ 가 존재해야 한다는 모드형태를 이용한 목표필터루프 설계시의 제약조건들을 만족하는 경우이다. 그렇지만 실제 시스템에서는 그렇지 않은 경우가 일반적이다. 그 예로서 비행체의 횡방향 운동을 제어할 수 있는 비행조종장치 설계를 위하여 제안된 루프형성기법들을 적용해보기로 한다.

플랜트는 고도 5000ft, 마하 0.7에서 어떤 비행체의 횡방향 운동을 선형화한 모델이다. 우선 시스템 출력으로 롤(roll) 각( $\phi$ )과 요(yaw) 각( $\psi$ )을 선정하는 경우에 대하여 생각하기로 한다.

$$\dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t) \quad (31)$$

$$y(t) = C_p x_p(t)$$

$$\text{여기서, } x_p = [v \ p \ r \ \phi \ \psi \ \delta_a \ \delta_r]^T$$

$$u_p = [\delta_{ac} \ \delta_{rc}]^T$$

$$y = [\phi \ \psi]^T$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -0.1656 & -0.0049 & -766.5 & 32.2 & 0 & 0 & 64.17 \\ -0.1440 & -9.36 & 4.329 & 0 & 0 & 114 & 192 \\ 0.0235 & -0.0036 & -0.567 & 0 & 0 & 0 & -35.1 \\ 0 & 1 & 0.0017 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 5는 플랜트의 특이값선도이며, 약 4.3 rad/sec에 있는 고유주파수에 의해 최대특이값 방향에서 공진현상이 있음을 알 수 있다. 최소특이값의 DC게인 값을 보면 정상상태 오차를 발생할 가능성이 있으므로 플랜트에 자유적분요소가 있다하더라도 자유적분요소를 첨가시키는 것이 바람직하다고 사료되므로, 여기서는  $\delta_{ac}$  제어입력채널에 자유적분요소를 첨가한 설계플랜트모델에 대하여 모드형태를 이용한 목표필터루프 설계방법에 의한 LQG/LTR 제어를 설계하기로 한다.

Fig. 6은 모드형태를 이용하여 설계된 목표필터루프의 특이값선도와 회복된 루프 전달함수행렬(TFM)의 특이값선도로서, 이 경우는  $B_a \approx 0$  이므로 예상한대로 저주파 영역에서 특이값이 일치되지는 않지만 그래도 만족스러운 성능을 얻을 수 있는 목표필터루프 설계와 루프전달회복이 이루어졌음을 알 수 있다. 따라서  $B_a \approx 0$ 인 경우라 할지라도 모드형태를 이용한 목표필터루프 설계방법을 적용할 수는 있다.

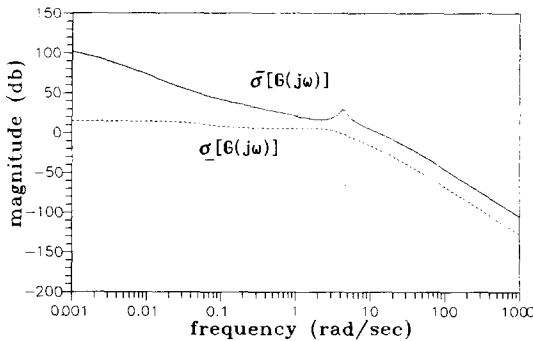


Fig. 5 Singular value plot of plant( $\phi, \psi$ )

특히 BTT(Bank to Turn) 제어방식의 비행체에서는 사이드슬립(sideslip) 각이 너무 크면 큰 롤링 모멘트를 발생하므로 일반적으로 사이드슬립 각이 가능한 한 0이 되도록 하여 완전한 좌표선회(coordinate turn)를 이룰 수 있도록 한다. 또한 공기흡입식 램젯(ramjet) 엔진을 장착하는 경우에는 사이드슬립이 작아야만 엔진의 효율을 극대화시킬 수 있다. 따라서 비행체 엔진의 특성을 고려하고 최대성능을 낼 수 있게 하기 위하여 사이드슬립 속도(혹은 사이드슬립 각)을

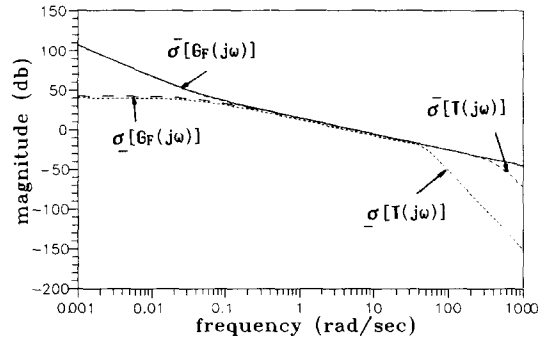


Fig. 6 Singular value plot of the target filter loop and recovered loop TFM

작게 할 필요가 있으므로 사이드슬립 제어를 고려하여 출력변수로 롤 각과 사이드슬립 속도를 선정하는 경우에 대하여 생각하기로 한다.

Fig. 7은 출력변수로 롤 각과 사이드슬립 속도를 선정했을 경우의 플랜트에 대한 특이값선도를 나타낸다. 그러나 이렇게 출력변수를 선정하는 경우에는 식 (35)에서  $(I - C_a L_1)^{-1}$ 가 존재하지 않는 경우로서 바람직한 루프형태를 얻을 수 없었다. 그래서 비특이 시스템으로 가정하는 방법을 이용하여 목표필터루프를 설계하고, 루프전달회복을 수행한다. Fig. 8은 이와같이 설계된 목표필터루프와 회복된 루프 TFM의 특이값 선도이다. 목표필터루프 설계시에는 플랜트의 시스템행렬  $A_p$ 에 포함된 극점 0을 안정하고 플랜트의 저주파 동특성을 크게 변화시키지 않는 극점  $-10^{-6}$ 으로 대체하여 수정된 행렬  $A_p'$ 를 이용하였다. 식 (12)를 이용하여 저/고주파에서 특이값이 일치되도록 설계파라미터  $L$ 을 선정하고 대역폭이 약 5 rad/sec 되도록  $\mu$ 를 0.05로 선정하였다. 여기서 회복된 루프 TFM은 수정되지 않은 실제플랜트와 설계된 LQG/LTR 제어기에 대한 루프 TFM이다.

Fig. 9은 설계된 비행체의 횡방향 LQG/LTR 제어시스템의 단위스텝 기준입력  $[\phi_c \ v_c]^T = [1 \ 0]^T$ 에 대한 출력( $\phi, v$ )의 시간응답이다. 롤 각의 상승시간이 1초이고 최대 사이드슬립 속도  $v$ 는 0.3 ft/sec(사이드슬립 각 = 0.0004°)로서 만족할만한 성능을 나타내고 있다.

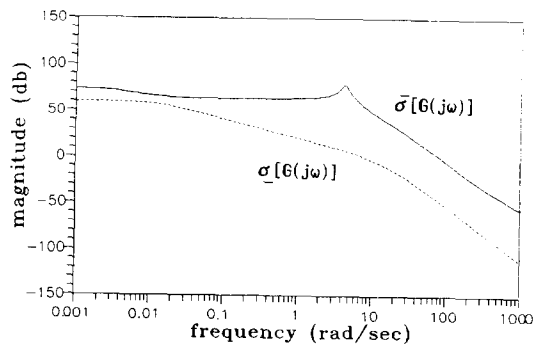


Fig. 7 Singular value plot of plant( $\phi, v$ )

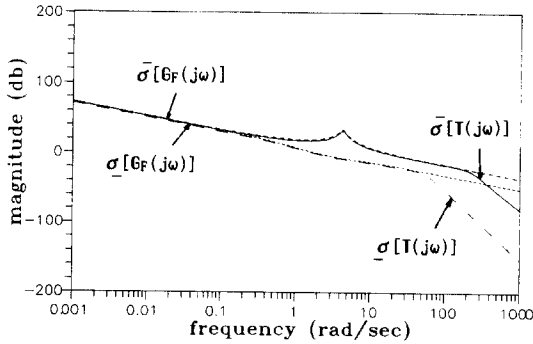


Fig. 8 Singular value plot of the target filter loop and recovered loop TFM

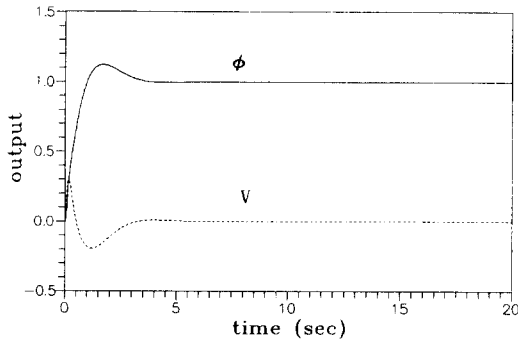


Fig. 9 Unit step response of LQG/LTR control system

표준 루프형성기법을 적용할 수 없는 특이 다변수 시스템인 비행체의 횡방향 제어에 제안된 루프형성기법을 적용하여 이 기법이 효율적인 루프형성기법임을 입증하였다. 모드 형태를 이용한 루프형성기법은 출력변수 선정에 제한이 있다는 문제점이 있었고, 비특이 시스템으로 가정하는 경우는 출력변수에 제한은 없으나 플랜트를 임의로 수정하는 형태이므로 저주파의 동특성이 약간 변하기는 하지만 큰 문제점은 되지 않는다. 그러나 비특이 시스템의 가정이 저주파 동특성에 크게 영향을 주는 경우와 제어기의 차수가 중요한 경우에는 문제가 있을 것으로 사료된다.

## 5. 결론

본 논문에서 LQG/LTR 제어기 설계과정에서 중요한 목표 필터루프형성 문제의 한계를 해결할 수 있는 방법을 제안하였다. 제어기 설계자가 실제 다변수 시스템에 대하여 LQG/LTR 제어기를 설계하고자 할 때 플랜트가 자유적분요소를 갖는 특이 다변수 시스템일 경우 표준 LQG/LTR 제어방법에 의한 제어기 설계는 상당한 한계를 갖게 된다. 그래서 이러한 제약에 대한 해결책으로서 플랜트의 자유적분요소를 제어시스템의 성능개선을 위해 첨가하는 자유적분요소와 동일한 효과를 갖는 방법인 특이 시스템을 모드형태로 상사변환하는 방법과 플랜트의 자유적분요소를 저주파 성분으로 대체하여 비특이 시스템으로 가정하고 표준 LQG/LTR 제어방법에 의하여 루프형성을 시도하는 방법을 제시하였다. 그리고 이 방법들을 비행체의 횡방향 자동조종장치 설계에 적용하여 제시한 방법들의 유용성과 타당성을 입증하였다.

## 참고 문헌

- (1) Safonov, M.G., 1980, Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems, MIT Press.
- (2) Doyle, J.C. and Stein, G., 1979, "Robustness with Observers", IEEE Trans. A.C., Vol. AC-24, pp 607-611.
- (3) Doyle, J.C. and Stein, G., 1981, "Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis", IEEE Trans. A.C., Vol. AC-26, pp.4-16.
- (4) Zhang, Z. and Freudenberg, J.S., 1990, "Loop Transfer Recovery for Nonminimum Phase Plants", IEEE Trans. A.C., Vol. AC-35, pp. 547-553.
- (5) Saberi, A., Chen, B.M. and Sannuti, P., 1991, "Theory of LTR Non-Minimum Phase Systems, Recoverable Target Loops, and Recovery in a Space", J. of Control, Vol. 53, pp. 1067 - 1160.
- (6) 김종식, 1988, 선형 제어시스템 공학, 청문각.
- (7) Athans, M., 1986, Lecture Notes on Multivariable Control Systems, M.I.T.