

## 스튜어트 플랫폼형 평행식 로봇의 동역학적 모델링과 해석

장 형 배\*, 한 창 수\*\*

\* 한양대학교 대학원 기전공학과, \*\* 한양대학교 공학대학 기계공학과

### Dynamic Modeling and Analysis for the Stewart Platform Type of Parallel Robot

Hyung-Bae Jang\*, Changsoo Han\*\*

\* Graduate School Hanyang University, \*\* Hanyang University

#### ABSTRACT

A dynamic modeling and analysis for the Stewart platform type of parallel robot is addressed. The dynamic modeling is performed based on the method of Kinematic Influence Coefficients(KIC) and transferring of the generalized coordinates. The optimum geometric configurations of the system that minimize the actuating forces at the linear actuator are found for several trajectories by using the optimization technique.

#### 1. 서 론

현재 사용되고 있는 로봇은 연쇄식(serial) 로봇이 대부분이다. 그러나, 연쇄식 로봇은 구조적 특성상 정밀도(precision)와 내 부하 능력(load capacity)에 있어서 많은 제한을 받는다. 연쇄식 로봇은 오차가 누적되는 경향이 있기 때문에 첫번째 링크에서의 작은 변형이 첨단부(end-effector)에서는 심각한 오차를 유발할 수가 있는 것이다. 이러한 연쇄식 로봇의 단점은 평행식 로봇을 이용함으로써 해결할 수가 있다. 한편, 평행식 로봇에도 다음과 같은 몇가지 단점이 존재한다. 즉, 구조적으로 복잡하고, 작업 공간(workspace)이 작으며, 복잡한 제어 기법이 필요하다.

스튜어트 플랫폼은 1965년 Stewart<sup>(8)</sup>에 의해 모의 비행실현 장치로서 처음 고안되었다. 그 이후, Hunt<sup>(7)</sup>는 스튜어트 플랫폼의 몇가지 다른 기계적 구조에 대하여 논의하였고, Yang 과 Lee<sup>(10)</sup>는 플랫폼 기구의 로봇으로서의 이용 가능성에 대한 이론적인 연구를 하였다. Do 와 Yang<sup>(4)</sup>은 Newton-Euler 운동 방정식을 이용하여 스튜어트 플랫폼의 작동력을 구하였다. 또한, 시스템이 36개의 선형 방정식에 의해 지배되며, 이 36개의 방정식이 6개로 줄어들 수 있다는 사실을 알아내었다. 그러나, 이 모델링 방법은 일반적인 규칙에 의하여 6개의 방정식을 유도할 수 없다는 단점을 가지고 있다. Cwikala<sup>(3)</sup>는 스튜어트 플랫폼의 작업 공간에 대한 연구를 하였고, Fichter<sup>(5)</sup>는 스튜어트 플랫폼을 제작할 때 이론적 및 실제적으로 고려해야할 사항들에 대하여 논의하였다.

본 논문에서는 스튜어트 플랫폼형 평행식 로봇의 설계 및 제어 기법 개발을 위한 도구로서의 동역학적 모델을 유도하였다.

#### 2. 시스템 정의

스튜어트 플랫폼을 단순화시키면 <Fig. 2-1>과 같이 간단히 나타낼 수 있다. 각 가지(branch or leg)는 병진 조인트(prismatic joint)로 되어 있으며, 베이스(base)와는 2 자유도의 후크 조인트(Hooke joint)로 연결되어 있고, 플랫폼(platform)과는 3 자유도의 구면 조인트(spherical joint)로 연결되어 있다. 플랫폼의 위치와 방향(position and orientation)은 각 가지에 위치한 선형 액츄에이터(linear actuator)의 길이를 변화시킴으로써 제어한다.

모델링 과정에서 사용될 좌표계가 <Fig. 2-2>와 <Fig. 2-3>에 나타나 있다. 베이스 좌표계( $X^*, Y^*, Z^*$ )의 원점은 베이스의 중심에 위치하며,  $X^*$ 축이 첫 번째 가지 좌표계(leg frame)의 원점을 향하도록 정의되었다. 가지 좌표계( $x, y, z$ )는 모두 여섯 개인데, 각각  $x, y$ 축의 음의 방향이 베이스의 중심을 향하고,  $z$ 축이 베이스 원과 접선을 이루도록 정의되었다. 플랫폼 좌표계( $x, y, z$ )의 원점은 플랫폼의 중심에 위치하며,  $x$ 축이 첫번째 가지에 연결된 구면 조인트를 향

하도록 정의되었다. 조인트 좌표계는 각 조인트마다 정의되며, Denavit-Hartenberg 표기법을 따른다. 그에 따른 조인트 및 링크 매개 변수의 값들을 <Fig. 2-4>에 자세히 나타내었다. 조인트 좌표계에 대한 모델은 임의의  $r$ 번째 가지에 대해서만 구하였는데, 시스템의 대칭성으로 인해 이 모델은 다른 모든 가지에도 그대로 적용될 수 있다.

베이스 좌표계에 대한 가지 좌표계의 위치는 다음 각도들에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= 120^\circ - \lambda_0 \\ \lambda_3 &= 120^\circ \\ \lambda_4 &= 240^\circ - \lambda_0 \\ \lambda_5 &= 240^\circ \\ \lambda_6 &= 360^\circ - \lambda_0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

또한, 플랫폼에서 구면 조인트의 배치 각도는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= \gamma_0 \\ \gamma_3 &= 120^\circ \\ \gamma_4 &= 120^\circ + \gamma_0 \\ \gamma_5 &= 240^\circ \\ \gamma_6 &= 240^\circ + \gamma_0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

#### 3. 기하학적 해석

##### 3-1. 조인트 변수의 결정

<Fig. 2-4(a)>에 나타난 조인트 매개 변수의 값들로부터 조인트 좌표계를 가지 좌표계로 변환시키는 회전 행렬을 구하고, 여기에 국소 단위 벡터  $(j)_{s_j} = [0 \ 0 \ 1]^T$  와  $(j)_{a_j} = [1 \ 0 \ 0]^T$  를 곱하면 다음과 같이 가지 좌표계에 대한 값으로 표현된 조인트 좌표계의 축 방향 단위 벡터  $s_j$  와  $a_j$  를 구할 수 있다.

$$s^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s^2 = \begin{bmatrix} -s\theta_1 \\ c\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s^3 = \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

$$a^{12} = \begin{bmatrix} c\theta_1 \\ s\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a^{23} = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 \\ -s\theta_1 c\theta_2 \\ -s\theta_2 \end{bmatrix}, \quad a^{34} = \begin{bmatrix} c\theta_1 c\theta_2 \\ s\theta_1 c\theta_2 \\ -s\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

$j$ 번째 조인트 좌표계의 원점  $O_j$ 와 구면 조인트의 위치  $P$ 는 가지 좌표계에 대하여 각각 다음과 같이 표현된다.

$$O^1 = O^2 = O \quad (3-3)$$

$$O^3 = P = L_3 \begin{bmatrix} c\theta_1 s\theta_2 \\ s\theta_1 s\theta_2 \\ c\theta_2 \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

##### 3-2. 플랫폼의 위치와 방향

플랫폼의 위치는 베이스 좌표계의 원점으로부터 플랫폼의 중심을 향하는 벡터  $O^1$ 에 의해 나타내고, 방향은 플랫폼의 중심에 고정된 한 쌍의 수직인 단위 벡터  $s$ 와  $a$ 에 의해 나타낸다. 일단 플랫폼의 위치와 방향이 결정되고 나면, 플랫폼 좌표계에 고정된 여섯개의 구면 조인트의 위치는  $O^1$ 과 다음의 회전 행렬에 의하여 간단히 베이스 좌표계에 대한 값으로 표현할 수 있다.

$$[R_{p1}] = [a \ s \times a \ s] \quad (3-5)$$

### 3-3. 각 가지에 대한 역 기구학 해석

역 기구학 해석을 위해 <Fig. 2-4(c)>를 <Fig. 2-6>과 같이 보다 자세히 나타내었다. 점  $P(X_p, Y_p, Z_p)$ 의 좌표는 플랫폼의 궤적이 주어지면 쉽게 계산할 수가 있다. 그림으로부터 각 조인트 변수들의 값을 다음과 같이 순차적으로 구할 수 있다.

$$L_3 = \sqrt{X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2} \quad (3-6)$$

$$\theta_2 = \cos^{-1} \left\{ \frac{Z_p}{L_3} \right\} \quad (3-7)$$

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left\{ \frac{Y_p}{L_3 \sin \theta_2} \right\} \quad (3-8)$$

이 값들이 다음에 설명할 KIC를 계산하는데 이용된다.

## 4. 모델링 방법에 대한 배경

본 논문에서 스튜어트 플랫폼의 동역학적 모델링을 위해 기본으로 삼은 것은 다음과 같은 두가지 모델링 기법이다. 첫째는 운동학적 영향계수에 기초한 연쇄식 매니플레이터의 모델링 방법이다. 이 방법은 1982년 Thomas와 Tesar<sup>(9)</sup>에 의해 처음으로 제시되었는데, 시스템의 기하학적인 구성(configuration)에 종속적인 값들과 시간에 종속적인 값들이 완전히 분리되어 표시되는 장점을 가지고 있다. 둘째는 일반좌표 변환법으로서 Freeman과 Tesar<sup>(6)</sup>에 의해 개발되었다. 이 방법은 한 일반좌표에 대한 모델의 종속성을 다른 일반좌표로 변환시키기 위한 일반화된 변환 기법인데, 이로 인해 다중 루프에 이루어진 공간적 기구, 동시에 작업하는 여러대의 로봇, 결여 다니는 로봇등 복잡한 기계 시스템을 하나의 통합된 방법으로 다룰 수 있게 되었다. 기본적인 개념을 다음에 간단히 정리한다.

### 4-1. KIC를 이용한 연쇄식 매니플레이터의 모델링

병진 및 회전 조인트로 구성된 M 자유도의 연쇄식 매니플레이터에 대하여 고려해 본다.

#### (1) 운동학적 모델

먼저 j번째 링크 jk의 순간적인 회전 운동에 대하여 생각해 본다. 각 속도와 각 가속도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\omega^{jk} = [G_{jk}^j] \dot{\phi} \quad (4-1)$$

$$\alpha^{jk} = [G_{jk}^j] \ddot{\phi} + \dot{\phi}^T [H_{jk}^j] \dot{\phi} \quad (4-2)$$

여기서,  $[G_{jk}^j]$ 는 회전 1차 KIC로서  $3 \times M$  행렬이 되고,  $[H_{jk}^j]$ 는 회전 2차 KIC로서  $3 \times M \times M$  배열이 된다. 식 (4-2)의 우변 두번째 항은 "plane by plane" 방식으로 연산을 행한다.

다음으로 링크 jk에 고정된 점 jP의 순간적인 병진 운동에 대하여 고려해 본다. 베이스 좌표계에 대한 위치 벡터 jP는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^jP = Q^j + [R_j] ({}^j)P \quad (4-3)$$

여기서,  $({}^j)P$ 는 j번째 조인트 좌표계에 대해 나타낸 점 jP의 위치 벡터이다. 점 jP의 속도와 가속도는 다음과 같다.

$${}^j\dot{v}P = \dot{{}^jP} = [{}^jG_{jk}^P] \dot{\phi} \quad (4-4)$$

$${}^j\dot{a}P = \ddot{{}^jP} = [{}^jG_{jk}^P] \ddot{\phi} + \dot{\phi}^T [{}^jH_{jk}^P] \dot{\phi} \quad (4-5)$$

여기서,  $[{}^jG_{jk}^P]$ 는 점 jP에 대한 병진 1차 KIC이고,  $[{}^jH_{jk}^P]$ 는 병진 2차 KIC이다. 위에서 언급된 KIC의 값들이 <Table 4-1>에 나타나 있다.

#### (2) 동역학적 모델

링크 jk에 모멘텀  $\pi^{jk}$ 가 작용하고, 점 jP에 외력  $jF^P$ 가 작용한다고 가정한다. 가상일의 원리로부터, 외부 하중에 대응하기 위해 입력 좌표  $\phi$ 에 작용시켜야할 유효 하중은 다음식에 의해 주어진다.

$$I_{\phi}^L = \sum_{j=1}^M \left\{ [{}^jG_{jk}^P]^T ({}^jF^P) + [G_{jk}^j]^T (\pi^{jk}) \right\} \quad (4-6)$$

입력 좌표에서의 관성 하중은 d'Alembert의 원리와 Newton-Euler의 운동 방정식으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$I_{\phi}^L = \sum_{j=1}^M \left\{ [{}^jG_{jk}^P] M_{jk} ({}^j\dot{a}^c) + [G_{jk}^j]^T \left\{ [{}^j\pi^{jk}] \alpha^{jk} + (\omega^{jk}) \times ([{}^j\pi^{jk}] \omega^{jk}) \right\} \right\} \\ = [I_{\phi\phi}^*] \ddot{\phi} + \dot{\phi}^T [P_{\phi\phi\phi}^*] \dot{\phi} \quad (4-7)$$

여기서,

$$[I_{\phi\phi}^*] = \sum_{j=1}^M \left\{ M_{jk} [{}^jG_{jk}^c]^T [{}^jG_{jk}^c] + [G_{jk}^j]^T [{}^j\pi^{jk}] [G_{jk}^j] \right\} \quad (4-8)$$

$$[P_{\phi\phi\phi}^*] = \sum_{j=1}^M \left\{ M_{jk} \left\{ [{}^jG_{jk}^c]^T \cdot [{}^jH_{jk}^c] \right\} + \left\{ [G_{jk}^j]^T [{}^j\pi^{jk}] \right\} \cdot [H_{jk}^j] \right\} \\ + [G_{jk}^j]^T \left\{ [G_{jk}^j]^T \cdot [P^{jk}] \right\} [G_{jk}^j] \right\} \quad (4-9)$$

또한,  $[{}^j\pi^{jk}]$ 는 베이스 좌표계에 대하여 나타낸  $3 \times 3$  관성 행렬이며,  $3 \times 3 \times 3$  관성 배열(inertia array)  $[P^{jk}]$ 는 다음과 같다.

$$[P^{jk}] = \begin{bmatrix} 0 & [{}^j\pi^{jk}]_{:3} & -[{}^j\pi^{jk}]_{:2} \\ [-[{}^j\pi^{jk}]_{:3} & 0 & [{}^j\pi^{jk}]_{:1} \\ [{}^j\pi^{jk}]_{:2} & -[{}^j\pi^{jk}]_{:1} & 0 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

식 (4-9)에서 사용된 "·" 연산자는 일반화된 스칼라 곱(generalized scalar product)을 나타내는 것으로, 행렬  $[a]$ 와 3차원 배열  $[b]$ 에 대하여  $[a] \cdot [b] = a_{ij} b_{jk} = c_{ik}$ 와 같이 정의되며 연산 결과인  $[c]$ 는 3차원 배열이 된다.

위의 결과를 종합하면 M 자유도의 연쇄식 매니플레이터에 대한 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$I_{\phi}^L = I_{\phi}^L - I_{\phi}^L \\ = [I_{\phi\phi}^*] \ddot{\phi} + \dot{\phi}^T [P_{\phi\phi\phi}^*] \dot{\phi} - I_{\phi}^L \quad (4-11)$$

윗 식은 시스템을 순간적인 동적 평형 상태로 유지하기 위해 필요한 입력 하중 벡터를 나타낸다.  $I_{\phi}^L$ 에는 스프링, 감쇠, 중력등의 영향이 포함되어 있는 것으로 가정하였다.

### 4-2. 일반 좌표 변환

여기서는 일반 좌표 변환의 일반적인 형태에 대한 결과식만을 나타낸다. 앞으로 S는  $[G]$ ,  $[H]$ ,  $[I^*]$ ,  $[P^*]$ ,  $I_{\phi}^L$ 의 일부 또는 전체를 가리키는 것으로 가정한다.

첫째,  $S_{jk}^u$ 가 주어지고  $S_{jk}^l$ 를 구하고자 하는 경우:

$$[G_{jk}^u] = [G_{jk}^l]^{-1} \quad (4-12)$$

$$[H_{jk}^u] = -[G_{jk}^u]^T \left\{ [G_{jk}^u]^{-1} \cdot [H_{jk}^l] \right\} [G_{jk}^u]^{-1} \quad (4-13)$$

$$[I_{jk}^*] = [G_{jk}^u]^{-T} [I_{jk}^*] [G_{jk}^u]^{-1} \quad (4-14)$$

$$[P_{jk}^*] = [G_{jk}^u]^{-T} \left\{ [G_{jk}^u]^{-T} \cdot [P_{jk}^*] \right. \\ \left. - [I_{jk}^*] \cdot [H_{jk}^u] \right\} [G_{jk}^u]^{-1} \quad (4-15)$$

$$I_{\phi}^L = [G_{jk}^u]^{-T} (I_{\phi}^L) \quad (4-16)$$

둘째,  $S_{jk}^u$ 와  $S_{jk}^l$ 가 주어지고  $S_{jk}^m$ 를 구하고자 경우:

$$[G_{jk}^u] = [G_{jk}^l] [G_{jk}^m]^{-1} \quad (4-17)$$

$$[H_{jk}^u] = [G_{jk}^m]^{-T} \left\{ [H_{jk}^l] - [G_{jk}^u] \cdot [H_{jk}^m] \right\} [G_{jk}^m]^{-1} \quad (4-18)$$

동역학적 모델은 첫 번째와 동일한 방법으로 변환한다.

## 5. 스튜어트 플랫폼의 모델링

앞으로 사용될 좌표는 다음과 같다.

- 플랫폼 좌표 : u
- r번째 가지에 대한 조인트 좌표 :  $r\phi = (r\theta_1, r\theta_2, rL_3)^T$
- 액츄에이터 좌표 :  $d = (1L_3, 2L_3, 3L_3, 4L_3, 5L_3, 6L_3)^T$

### 5-1. 조인트 좌표에 의한 운동학적 및 동역학적 모델

조인트 좌표로 구면 조인트의 속도와 가속도를 나타내면 다음과 같다.

$$r\dot{\phi} = [{}_rG_{jk}^r] r\dot{\phi} \quad (5-1)$$

$$r\ddot{\phi} = [{}_rG_{jk}^r] r\ddot{\phi} + r\dot{\phi}^T [{}_rH_{jk}^r] r\dot{\phi} \quad (5-2)$$

식 (3-1)~(3-4)와 <Table 4-1>로부터 1차 및 2차 KIC를 구하면 <Table 5-1>, <Table 5-2>와 같다. 또한, 각 링크의 질량 중심에 대한 KIC를 구하면 <Table 5-3>, <Table 5-4>와 같다. 그러나, 여기서 구한 KIC는 모두 가지 좌표계에 대하여 표현된 것들이다. 따라서, 앞으로의 모델링 전개 과정에서 사용된다면 다음의 회전 행렬

에 의하여 베이스 좌표계에 대한 값으로 변환되어야 한다.

$$[{}^r R_{10g}] = \begin{bmatrix} 0 & c\lambda_r & -s\lambda_r \\ 0 & s\lambda_r & c\lambda_r \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

즉, 1차 KIC는 행렬곱을, 2차 KIC는 "." 연산을 수행한다. 앞으로 나오는 KIC는 이러한 변환을 시킨 것으로 가정한다.

r번째 가지에 대한 동역학적 모델은 다음과 같이 구해진다.

$${}^r \mathbf{I} \ddot{\phi} = [{}^r \mathbf{I}_{\phi\phi}^*] {}^r \ddot{\phi} + {}^r \dot{\phi}^T [{}^r \mathbf{P}_{\phi\phi\phi}^*] {}^r \dot{\phi} \quad (5-4)$$

여기서,  $[{}^r \mathbf{I}^*]$ 와  $[{}^r \mathbf{P}^*]$ 는 식 (4-8)과 (4-9)에서 M=3으로 놓고 r번째 가지에 대한 KIC를 대입함으로써 구할 수 있다. 외력은 작용하지 않는 것으로 가정하였다.

### 5-2. 플랫폼 좌표에 의한 운동학적 모델

플랫폼 좌표로 구면 조인트의 위치를 나타내면 다음과 같다.

$${}^r \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{Pl} + [{}^r R_{p1}] ({}^{pl})_r \mathbf{W} = \mathbf{Q}^{Pl} + {}^r \mathbf{W} \quad (5-5)$$

여기서,  $({}^{pl})_r \mathbf{W}$ 는 플랫폼 좌표계에 대한 구면 조인트의 위치 벡터이다. 식 (5-5)에 시간에 대한 1차 및 2차 도함수를 취하면 다음과 같이 속도와 가속도를 구할 수 있다.

$${}^r \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{Q}^{Pl} + \omega \times {}^r \mathbf{W} \quad (5-6)$$

$${}^r \ddot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{Q}}^{Pl} + \alpha \times {}^r \mathbf{W} + \omega \times (\omega \times {}^r \mathbf{W}) \quad (5-7)$$

여기서,  $\omega$ 와  $\alpha$ 는 플랫폼의 각 속도와 각 가속도이다. 윗 식은 KIC를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$${}^r \dot{\mathbf{P}} = [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{P}}^*] \dot{\mathbf{u}} \quad (5-8)$$

$${}^r \ddot{\mathbf{P}} = [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{P}}^*] \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T [{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*] \dot{\mathbf{u}} \quad (5-9)$$

여기서,

$$[{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{P}}^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & rW_z & -rW_y \\ 0 & 1 & 0 & -rW_z & 0 & rW_x \\ 0 & 0 & 1 & rW_y & -rW_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$[{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*]_{1:m:n} = \begin{bmatrix} 0 & W_y & rW_z \\ 0 & -rW_x & 0 \\ 0 & 0 & -rW_x \end{bmatrix} \quad (5-11a)$$

$$[{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*]_{2:m:n} = \begin{bmatrix} -rW_y & 0 & 0 \\ rW_x & 0 & rW_z \\ 0 & 0 & -rW_y \end{bmatrix} \quad (5-11b)$$

$$[{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*]_{3:m:n} = \begin{bmatrix} -rW_z & 0 & 0 \\ 0 & -rW_z & 0 \\ rW_x & rW_y & 0 \end{bmatrix} \quad (5-11c)$$

식 (5-11)에서 m, n = 4, 5, 6이고 나머지 항들은 모두 0이다.

### 5-3. 플랫폼 좌표에 의한 동역학적 모델

먼저, 앞에서 구한 KIC와 일반좌표 변환을 통해 조인트 좌표와 플랫폼 좌표를 연결시키는 KIC를 구한다.

$$[{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{P}}^*]^{-1} [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{P}}^*] \quad (5-12)$$

$$[{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*]^{-1} \cdot [{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*] - [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^T ([{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{P}}^*]^{-1} \cdot [{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{P}}^*]) [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*] \quad (5-13)$$

위에서 구한 KIC와 식 (5-4)로부터 플랫폼 좌표에 의한 동역학적 모델을 구한다.

$$[{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^T [{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{P}}^*] [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*] \quad (5-14)$$

$$[{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] = ([{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^T [{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{P}}^*]) \cdot [{}^r \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*] + [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^T ([{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^T \cdot [{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{P}}^*]) [{}^r \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*] \quad (5-15)$$

지금까지 각 가지에 대한 모델을 플랫폼 좌표로 나타내었다. 이제 남은 일은 플랫폼에 대한 모델을 구하는 것이다. 플랫폼의 관성 에 의한 동역학적 모델링 계수를 구하면 다음과 같다.

$$[{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}] = \begin{bmatrix} M_{p1} & 0 & 0 & 0^T \\ 0 & M_{p1} & 0 & 0^T \\ 0 & 0 & M_{p1} & 0^T \\ 0 & 0 & 0 & [{}^r \mathbf{I}_{p1}] \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

$$[{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}]_{k::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}]_{k:m:n} \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

윗식에서 k, m, n = 4, 5, 6이고 나머지 항들은 모두 0이다. 0이 아닌 항들은 다음과 같다.

$$[{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}]_{4:m:n} = \begin{bmatrix} 0 & : & [{}^r \mathbf{I}_{p1}]_{:3} & -[{}^r \mathbf{I}_{p1}]_{:2} \end{bmatrix} \quad (5-18a)$$

$$[{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}]_{5:m:n} = \begin{bmatrix} -[{}^r \mathbf{I}_{p1}]_{:3} & : & 0 & : & [{}^r \mathbf{I}_{p1}]_{:1} \end{bmatrix} \quad (5-18b)$$

$$[{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}]_{6:m:n} = \begin{bmatrix} [{}^r \mathbf{I}_{p1}]_{:2} & : & -[{}^r \mathbf{I}_{p1}]_{:1} & : & 0 \end{bmatrix} \quad (5-18c)$$

여기서, m, n = 4, 5, 6이고 플랫폼의 관성 행렬  $[{}^r \mathbf{I}_{p1}]$ 는 다음 식에 의해 구할 수 있다.

$$[{}^r \mathbf{I}_{p1}] = [{}^r R_{p1}] ({}^{(p1)})_r \mathbf{I}_{p1} [{}^r R_{p1}]^T \quad (5-19)$$

여기서,

$$[{}^{(p1)} \mathbf{I}_{p1}] = \begin{bmatrix} M_{p1} W^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & M_{p1} W^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & M_{p1} W^2/2 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

윗 식에서 W는 플랫폼의 반지름이고, 첨자 (p1)은 플랫폼 좌표계에 대한 관성 행렬임을 나타낸다.

지금까지 각 가지에 대한 모델과 플랫폼에 대한 모델을 플랫폼 좌표로 나타내었다. 따라서, 두 모델을 조합함으로써 다음과 같이 전체 스튜어트 플랫폼에 대한 동역학적 모델을 구할 수 있다.

$$\mathbf{I}_{\mathbf{U}} \ddot{\mathbf{u}} = [{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T [{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] \dot{\mathbf{u}} \quad (5-16)$$

여기서,

$$[{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}] + \sum_{r=1}^6 [{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] \quad (5-17)$$

$$[{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}] + \sum_{r=1}^6 [{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] \quad (5-18)$$

### 5-4. 액츄에이터 좌표에 의한 운동학적 및 동역학적 모델

액츄에이터는 각 가지의 세번째 조인트에 위치해 있다. 따라서, 1차 KIC는 각 가지에 대한 식 (5-12)의 결과로부터 세번째 행을, 2차 KIC는 식 (5-13)의 결과로부터 세번째 평면을 추출해냄으로써 각각 다음과 같이 구할 수 있다.

$$[{}^1 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} = \begin{bmatrix} [{}^1 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} \\ [{}^2 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} \\ [{}^3 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} \\ [{}^4 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} \\ [{}^5 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} \\ [{}^6 \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]_{3:} \end{bmatrix} \quad (5-19)$$

$$[{}^1 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} = \begin{bmatrix} [{}^1 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} \\ [{}^2 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} \\ [{}^3 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} \\ [{}^4 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} \\ [{}^5 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} \\ [{}^6 \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]_{3::} \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

플랫폼의 속도와 가속도가 주어지면, 위의 결과를 이용하여 액츄에이터의 속도와 가속도는 다음 식에 의해 쉽게 구해진다.

$$\dot{\mathbf{u}} = [{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*] \dot{\mathbf{u}} \quad (5-21)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = [{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*] \ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{u}}^T [{}^d \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*] \dot{\mathbf{u}} \quad (5-22)$$

동역학적 모델은 식 (5-19), (5-20)과 앞절에서 구한 모델을 이용하여 일반좌표 변환을 수행하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{I}_{\mathbf{d}} \ddot{\mathbf{d}} = [{}^d \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] \ddot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{d}}^T [{}^d \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] \dot{\mathbf{d}} \quad (5-23)$$

여기서,

$$[{}^d \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^{-T} [{}^r \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] [{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^{-1} \quad (5-24)$$

$$[{}^d \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] = [{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^{-T} ([{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^{-T} \cdot [{}^r \mathbf{P}_{\mathbf{U}}^*] - [{}^d \mathbf{I}_{\mathbf{U}}^*] \cdot [{}^d \mathbf{H}_{\mathbf{U}}^*]) [{}^d \mathbf{G}_{\mathbf{U}}^*]^{-1} \quad (5-25)$$

## 6. 시뮬레이션 및 해석

앞에서 구한 모델을 이용하여 세가지 궤적(trajjectory)과 두가지 운동 사양(motion specification)에 대하여 액츄에이터에 필요한 작

동력(actuating force)을 구하여 보았다. 시뮬레이션에 사용된 운동 사양은 <Fig. 6-1>과 <Fig. 6-2>에 나타내었고, 궤적들은 <Fig. 6-3>~<Fig. 6-5>에 나타내었다. 운동 사양은 이미 개발되어 있는 캠의 변위 곡선들 중에서 4-5-6-7차 다항식과 조화(harmonic) 곡선을 선택하여 사용하였다. 시뮬레이션에 사용된 스튜어트 플랫폼의 시스템 매개 변수들의 값은 <Table 6-1>과 같다.

시뮬레이션 결과는 <Fig. 6-6>~<Fig. 6-8>에 나타내었다. 그림에서 "T"는 궤적, "M"은 운동 사양, "L"은 가지를 의미한다. 그리고, 계산된  $[I^*_{dd}]$ 와  $[P^*_{add}]$ 의 한 예를 <Table 6-2>에 나타내었다.

그림으로부터, 속도에 의한 힘보다는 가속도에 의한 힘이 액츄에이터의 작동력에 미치는 영향이 훨씬 크다는 것을 알 수 있다. 이러한 사실은 총 작동력에 대한 그래프가 가속도 항에 대한 그래프와 유사한 점을 관찰함으로써 쉽게 확인할 수 있는데, 그 원인은 <Table 6-2>로부터 알아낼 수 있다. 즉, 일반적으로  $[I^*_{dd}]$  요소들의 크기가  $[P^*_{add}]$  요소들의 크기보다 크기 때문이다. 한편,  $[I^*_{dd}]$ 가 대칭인 것을 알 수 있다. 따라서, 단축법칙(reduction rule)을 적용하여 계산량을 줄일 수 있다. 또한, 대각선 요소들의 크기가 나머지 요소들의 크기보다 크다는 것을 알 수 있는데, 이것은  $[I^*_{dd}]$ 가 완전하지는 않지만 decouple 되려는 경향이 있음을 알려준다. 그러나,  $[P^*_{add}]$ 는 이러한 경향을 전혀 나타내지 않는다. 이러한  $[I^*_{dd}]$ 와  $[P^*_{add}]$ 의 성질은 실시간 제어를 위한 제어 방정식을 유도하는데 있어서 유용한 정보를 제공해 준다.

### 7. 최대 작동력의 최소화

주어진 궤적을 움직이는 동안 액츄에이터에 발생하는 최대 작동력을 최소화할 수 있는 방안을 고려해 보았다. 본 논문에서는 <Fig. 2-5>에 표시된, 베이스와 플랫폼에서의 가지의 분포 각도인  $\lambda_0$ 와  $\gamma_0$ 를 설계 변수로 잡아 최적화 기법을 적용하여 최대 작동력을 최소화시키는  $\lambda_0$ 와  $\gamma_0$ 의 최적의 값을 구하여 보았다. 최적화 문제는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} & : f(\mathbf{X}) = \|\mathbf{r}^{\max}\|_{\infty} = \max_r |\tau_r^{\max}| \\ \text{Subject to} & : 5^\circ \leq X_1 \leq 60^\circ \\ & 0^\circ \leq X_2 \leq 60^\circ \end{aligned}$$

여기서, 설계 변수 벡터  $\mathbf{X} = [X_1, X_2]^T = [\lambda_0, \gamma_0]^T$ 이고,  $\tau_r^{\max}$ 는 주어진 궤적을 움직이는 동안 r번째 액츄에이터에 발생된 최대 작동력을 나타낸다. 구속 조건으로는 설계 변수의 범위만을 취하였다.

세가지 궤적에 대한 최적화 결과를 <Table 7-1>에 나타내었다. 운동 사양은 <Fig. 6-1>의 4-5-6-7차 다항식을 사용했다. 최적해와 임의의 다른 값을 선택하였을 경우에 대한 작동력의 그래프를 <Fig. 7-1>~<Fig. 7-3>에 나타내었다.

최적화 결과를 살펴보면,  $\lambda_0$ 와  $\gamma_0$  사이에 어떤 일반적인 관계가 존재하지는 않으며, 주어진 플랫폼의 궤적에 따라 최적값이 다르게 나타남을 알 수 있다. 따라서, 로봇이 실제 사용되는 작업 상황에 가장 잘 부합하는 궤적에 대해 최적화를 수행하여,  $\lambda_0$ 와  $\gamma_0$ 의 최적 값을 찾아내어 이용하면 액츄에이터에 발생하는 최대 작동력을 최소화시킬 수 있을 것이다.

### 8. 결론

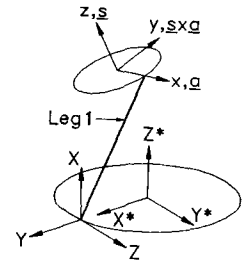
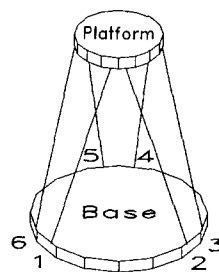
먼저 스튜어트 플랫폼형 평행식 로봇에 대한 동역학적 모델을 구하고, 몇가지 궤적과 운동 사양에 대하여 액츄에이터에 필요한 작동력을 구해 보았다. 다음에는 앞에서 구한 모델을 최적화 문제에 이용하여 주어진 궤적을 움직이는 동안 액츄에이터에 발생하는 최대 작동력을 최소화시킬 수 있는 방법을 모색해 보았다.

앞으로 본 논문에서 구한 스튜어트 플랫폼 형태의 평행식 로봇에 대한 모델을 실시간 제어와 같은 빠른 계산속도를 요구하는 경우에 이용하기 위하여 계산속도 향상 알고리즘에 대한 보다 많은 연구를 필요로 한다.

### 9. 참고 문헌

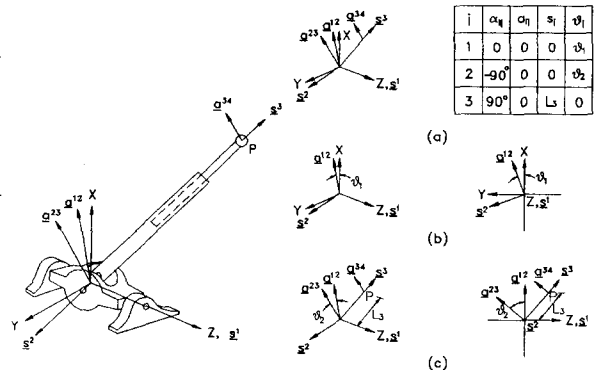
- (1) Benhabib, B., Tabarah, E., Cohen, R., and Fenton, R.G., "Robot Performance Optimization Under Specified Dynamic Conditions", Mech. Mach. Theory, Vol. 26, No. 3, pp. 323-335, 1991.
- (2) Craig, J.J., "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", Addison-Wesley Publishing Company, 1989
- (3) Cwiakala, M., "Workspace of a Closed-Loop Manipulator", ASME Paper 86-DET-95, 1986.
- (4) Do, W.Q.D. and Yang, D.C.H., "Inverse Dynamics of a Platform Type of Manipulating Structure", ASME Paper 86-DET-94, 1986.

- (5) Fichter, E.F., "A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction", International Journal of Robotics Research, Vol. 5, No. 2, pp. 157-182, 1986.
- (6) Freeman, R.A. and Tesar, D., "Dynamic Modeling of Serial and Parallel Mechanisms/Robotic Systems: Part I - Methodology, Part II - Applications", Mechanical Engineering Department, The University of Texas at Austin, February 1988.
- (7) Hunt, K.H., "Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot-Arms", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 105, pp. 705-712, 1983.
- (8) Stewart, D., "A Platform with Six Degrees of Freedom", Proc. Institution of Mechanical Engineers, Vol. 180, Part 1, pp. 371-386, 1965-66.
- (9) Thomas, M. and Tesar, D., "Dynamic Modeling of Serial Manipulator Arms", ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 104, pp. 218-228, 1982.
- (10) Yang, D.C.H. and Lee, T.W., "Feasibility Study of a Platform Type of Robotic Manipulators from a Kinematic Viewpoint", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 106, pp. 191-198, 1984.



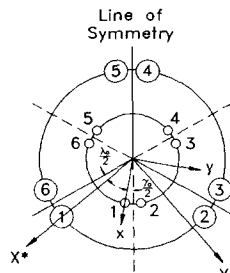
<Fig. 2-1> Simplified Representation of the Stewart Platform

<Fig. 2-2> Coordinate Frames

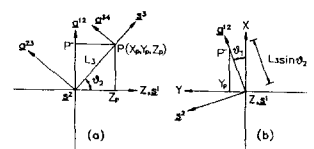


<Fig. 2-3> Kinematic Representation of One of the Legs

<Fig. 2-4> Link Parameters



<Fig. 2-5> Distribution of Legs



<Fig. 2-6> Inverse Kinematics

<Table 4-1> Kinematic Influence Coefficients for Serial Manipulators

Symbol	Value	Restrictions
$[G_{\phi}^{jk}]_{:n}$	$S^n$ $Q$	$n \leq j : R$ otherwise
$[jG_{\phi}^p]_{:n}$	$S^n \times (jP - Q^n)$ $S^n$ $Q$	$n \leq j : R$ $n \leq j : P$ otherwise
$[H_{\phi}^{jk}]_{:m:n}$	$S^m \times S^n$ $Q$	$m < n \leq j : RR$ otherwise
$[jH_{\phi}^p]_{:m:n}$	$S^m \times [S^n \times (jP - Q^n)]$ $S^n \times [S^m \times (jP - Q^m)]$ $S^n \times S^m$ $Q$	$m \leq n \leq j : RR$ $n < m \leq j : RR$ $n < m \leq j : PR$ $m < n \leq j : RP$ otherwise

<Table 5-1> First-order KIC for Each of the Links

$$[rG_{\phi}^{12}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [rG_{\phi}^{23}] = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [rG_{\phi}^{34}] = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[rG_{\phi}^p] = \begin{bmatrix} -L_3 s\theta_1 s\theta_2 & L_3 c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 \\ L_3 c\theta_1 s\theta_2 & L_3 s\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -L_3 s\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix}$$

<Table 5-2> Second-order KIC for Each of the Links

$$[rH_{\phi}^{12}]_{i::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; i = 1, 2, 3$$

$$[rH_{\phi}^{23}]_{1::} = \begin{bmatrix} 0 & -c\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [rH_{\phi}^{23}]_{2::} = \begin{bmatrix} 0 & -s\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[rH_{\phi}^{23}]_{3::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [rH_{\phi}^{34}]_{i::} = [rH_{\phi}^{23}]_{i::} \quad ; i = 1, 2, 3$$

$$[rH_{\phi}^p]_{1::} = \begin{bmatrix} -L_3 c\theta_1 s\theta_2 & -L_3 s\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 \\ -L_3 s\theta_1 c\theta_2 & -L_3 c\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \\ -s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[rH_{\phi}^p]_{2::} = \begin{bmatrix} -L_3 s\theta_1 s\theta_2 & L_3 c\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 \\ L_3 c\theta_1 c\theta_2 & -L_3 s\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[rH_{\phi}^p]_{3::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L_3 c\theta_2 & -s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

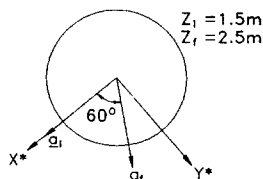
<Table 5-3> First-order KIC for Each of the Center of Masses

$$[r^1 C_{\phi}^c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

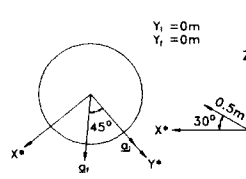
$$[r^2 C_{\phi}^c] = \begin{bmatrix} -(L_c/2)s\theta_1 s\theta_2 & (L_c/2)c\theta_1 c\theta_2 & 0 \\ (L_c/2)c\theta_1 s\theta_2 & (L_c/2)s\theta_1 c\theta_2 & 0 \\ 0 & -(L_c/2)s\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[r^3 C_{\phi}^c] = \begin{bmatrix} -Ls\theta_1 s\theta_2 & Lc\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 \\ Lc\theta_1 s\theta_2 & Ls\theta_1 c\theta_2 & s\theta_1 s\theta_2 \\ 0 & -Ls\theta_2 & c\theta_2 \end{bmatrix}$$

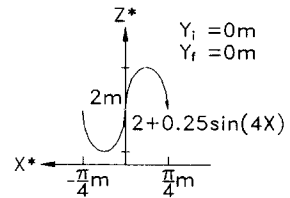
where,  $L = L_3 - L_r/2$



<Fig. 6-3> Platform Trajectory 1



<Fig. 6-4> Platform Trajectory 2



<Fig. 6-5> Platform Trajectory 3

<Table 5-4> Second-order KIC for Each of the Center of Masses

$$[r^1 H_{\phi}^c]_{i::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; i = 1, 2, 3$$

$$[r^2 H_{\phi}^c]_{1::} = \begin{bmatrix} -(L_c/2)c\theta_1 s\theta_2 & -(L_c/2)s\theta_1 c\theta_2 & 0 \\ -(L_c/2)s\theta_1 c\theta_2 & -(L_c/2)c\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

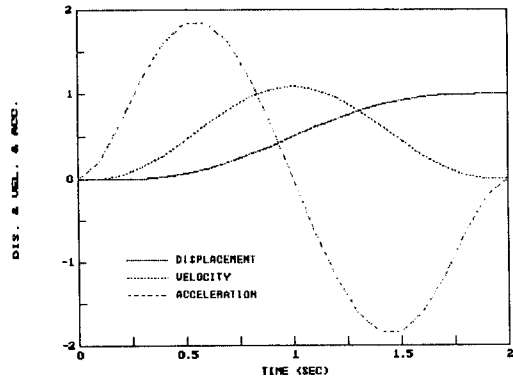
$$[r^2 H_{\phi}^c]_{2::} = \begin{bmatrix} -(L_c/2)s\theta_1 s\theta_2 & (L_c/2)c\theta_1 c\theta_2 & 0 \\ (L_c/2)c\theta_1 c\theta_2 & -(L_c/2)s\theta_1 s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[r^2 H_{\phi}^c]_{3::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(L_c/2)c\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

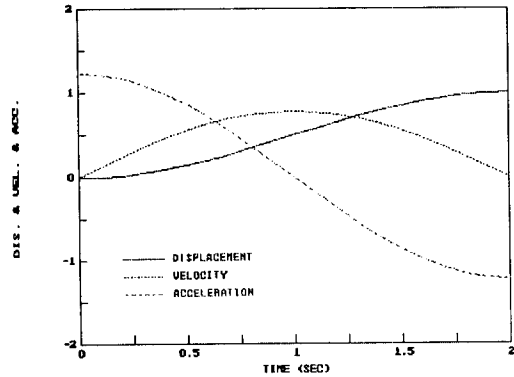
$$[r^3 H_{\phi}^c]_{1::} = \begin{bmatrix} -Lc\theta_1 s\theta_2 & -Ls\theta_1 c\theta_2 & -s\theta_1 s\theta_2 \\ -Ls\theta_1 c\theta_2 & -Lc\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 \\ -s\theta_1 s\theta_2 & c\theta_1 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[r^3 H_{\phi}^c]_{2::} = \begin{bmatrix} -Ls\theta_1 s\theta_2 & Lc\theta_1 c\theta_2 & c\theta_1 s\theta_2 \\ Lc\theta_1 c\theta_2 & -Ls\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 \\ c\theta_1 s\theta_2 & s\theta_1 c\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[r^3 H_{\phi}^c]_{3::} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Lc\theta_2 & -s\theta_2 \\ 0 & -s\theta_2 & 0 \end{bmatrix}$$



<Fig. 6-1> 4-5-6-7 Polynomial



<Fig. 6-2> Harmonic Motion

<Table 6-1> Values of the System Parameters

Parameter	Value
Radius of the base	1.5 m
Radius of the platform	1.0 m
Radius of the Hooke joint	0.05 m
Length of the piston cylinder ( $L_c$ )	1.5 m
Length of the piston rod ( $L_r$ )	1.5 m
Mass of the Hooke joint ( $M_{12}$ )	5 kg
Mass of the piston cylinder ( $M_{23}$ )	30 kg
Mass of the piston rod ( $M_{34}$ )	20 kg
Mass of the platform ( $M_{p1}$ )	300 kg

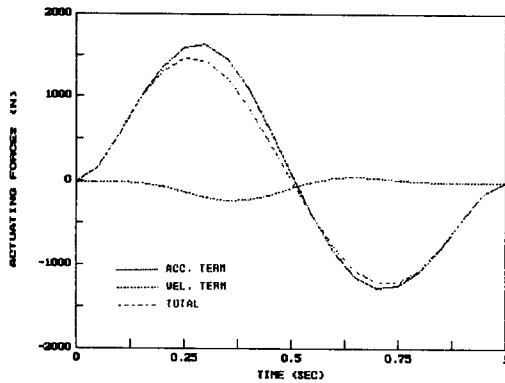
<Table 6-2> Examples of Effective Inertia Matrix and a Plane of Inertia Power Array

$$[I_{dd}^*] = \begin{bmatrix} 187.3 & -137.2 & 4.2 & 45.3 & 4.2 & -1.5 \\ -137.2 & 245.5 & -1.5 & -38.3 & 45.3 & -38.3 \\ 4.2 & -1.5 & 187.3 & -137.2 & 4.2 & 45.3 \\ 45.3 & -38.3 & -137.2 & 245.5 & -1.5 & -38.3 \\ 4.2 & 45.3 & 4.2 & -1.5 & 187.3 & -137.2 \\ -1.5 & -38.3 & 45.3 & -38.3 & -137.2 & 245.5 \end{bmatrix}$$

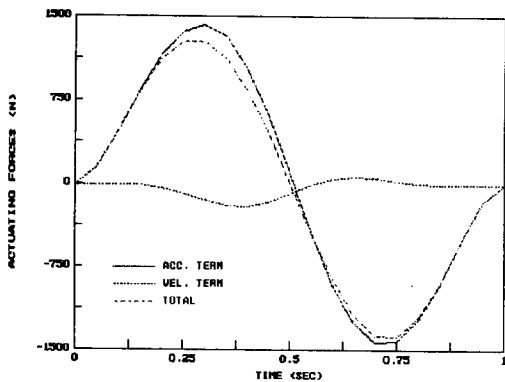
$$[P_{ddd}^*] = \begin{bmatrix} -20.4 & 38.9 & 36.7 & 24.5 & -27.4 & 46.1 \\ 42.3 & -171.4 & 24.8 & -27.1 & 37.5 & -33.8 \\ 22.0 & 43.3 & -56.8 & 47.5 & -39.5 & 3.9 \\ 17.7 & -12.0 & 18.8 & -37.2 & 15.3 & -12.0 \\ -12.6 & 12.1 & -10.1 & 0.3 & -30.2 & 49.1 \\ 49.5 & -33.8 & -14.6 & -27.2 & 74.4 & -95.8 \end{bmatrix}$$

<Table 7-1> Optimization Results

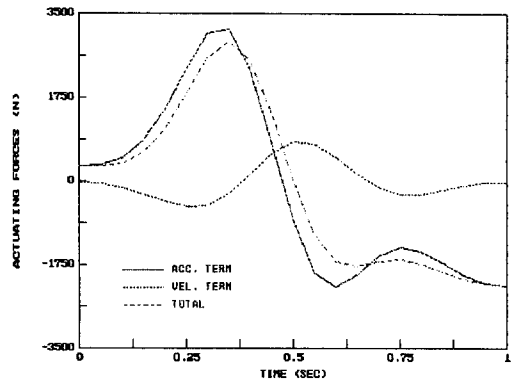
Trajectory	$\lambda_0$	$\gamma_0$	Maximum Actuating Force	Leg
1	15.1°	15.1°	1479.6 (N)	1
2	24.2°	0.0°	-1281.6 (N)	2
3	5.0°	0.0°	5560.4 (N)	5



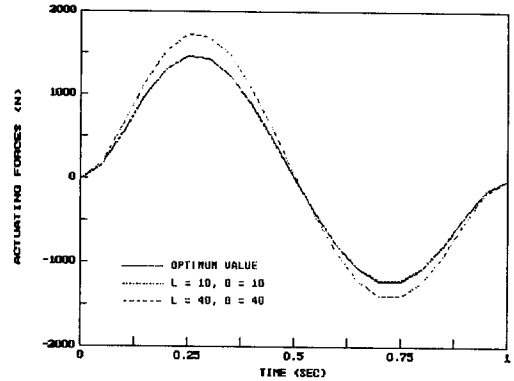
<Fig. 6-6> Actuating Forces (TIM1L1)



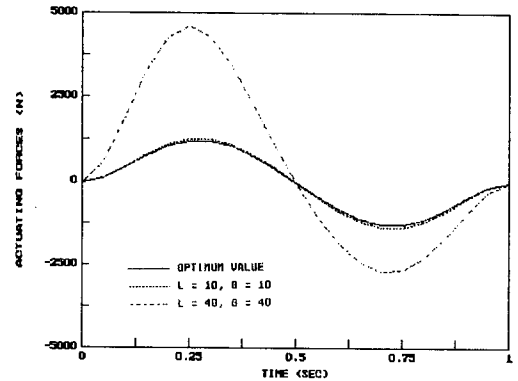
<Fig. 6-7> Actuating Forces (T2M1L2)



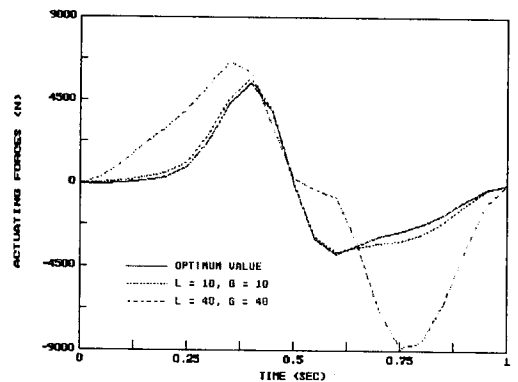
<Fig. 6-8> Actuating Forces (T3M2L5)



<Fig. 7-1> Comparison of Actuating Forces for Trajectory 1



<Fig. 7-2> Comparison of Actuating Forces for Trajectory 2



<Fig. 7-3> Comparison of Actuating Forces for Trajectory 3