'92 韓國自動制御學術會議論文集 1992. 10. 19~21

불확실성이 있는 이산 시간 시스템의 강인 제어기 설계

이 재 원, 이 준 화, 권 욱 현
서울대학교 공과대학 제어계측 공학과

Robust Stabilization of Linear Discrete Time Systems with Uncertain Dynamics

Jae Won Lee, Joon Hwa Lee and Wook Hyun Kwon
Dept. of Control & Instrumentation Eng.
Seoul National University

ABSTRACT

This paper proposes a new linear robust state feedback controller for the linear discrete time systems which have uncertainties in the state and input matrices. The uncertainties need not satisfy the matching conditions, but only their bounds are needed to be known. The proposed controller is derived from the linear quadratic game problem, which solution is obtained via the modified algebraic Riccati equation. The controller guarantees the robust performance bound. The bound of the solution and the condition of the uncertainties, which can stabilize the uncertain system are explored.

1. 서 론

상태 공간에서의 모델링 오차에 강인한 제어기 설계 문제에 대해서 대상 시스템이 연속 시간 시스템일 경우 이산 시간 시스템의 경우 보다 더 많은 연구가 진행되어 왔는데 대부분 Lyapunov 안정성을 이용하여 제어기를 설계하였다[1]-[3]. 이들 연구는 모델링 오차의 노름(Norm)과 모델링 오차 매개 변수간의 조합 조건등을 가정하고 있는데, 이러한 조건들을 완화시키고 더 넓은 범위의 모델링 오차를 허용할 뿐만 아니라 Riccati 방정식의 해로부터 궤환 시스템의 안정성을 보장하는 방향으로 연구가 진행되고 있다.

이러한 연구 결과가 발전하여 최근에는 불확실성에 대한 전제 조건을 완화하여 조합 조건(Matching Condition)을 없애고 강인한 제어기를 설계하는 연구가 진행되고 있으며 아울러 불확실성에 대한 제어 시스템에 성능 지표 함수(Cost Function)를 도입하여 강인 성능을 보장하는 제어기 설계에 대한 연구가 진행되고 있다[6]. 여기서의 불확실성에 대한 전제 조건은 불확실성 행렬의 노름(Norm)에 대한 한계치(Bound)만을 가정하고 있다.

연속 시간 시스템(Continuous Time System)의 불확실성에 대한 강인한 제어기 설계에 대한 연구는 많은 경우에 대하여 진행되어 왔지만, 이산 시간 시스템(Discrete Time System)의 경우는 수식의 복잡성으로 인해 많은 연구가 이루어지지 못하였다. 이산 시간 시스템에 대한 연구를 살펴 보면, Manela등이 강인한 제어기 설계 방법을 제시하였는데 여기서의 제어기는 상태 궤환(State Feedback)의 형태이지만, 제어기 구성에 있어서 불확실성에 대한 어떠한 정보도 내포하고 있지 않다.

이후 Magna등의 연구는 Lyaupunov 방정식의 해에 의한 강인한 선형 제어기를 제시하였는데, 입력 행렬의 불확실성은 없고 상태 행렬의 불확실성만이 존재하고 있음을 가정하고 있고 조합 조건(Matching Condition)을 가정하고 있으며 외란도 가정하고 있다[4]. 또, 제안한 제어기에 의해 상태 변수가 한계치를 갖는 시간 영역(Time Region)을 제시하고 있다. 여기서 더욱 발전되어 Yang등은 단일 입력(Single Input)인 경우 상태 행렬의 불확실성과 입력 행렬의 불확실성이 모두 존재할때 조합 조건(Matching Condition)의 가정하에 강인한 제어기를 제시하였다[5]. 이 제어기의 특징은 비선형 궤환의 형태를 가지며 안정성을 보장하는 불확실성의 범위가 앞의 Magna등의 제어기 보다 더 크다는 것을 밝혀두고 있다. 최근에는 구조적인 불확실성을 갖고 있는 시스템을 일반화된 Riccati 방전식의 해로부터 안정화 시킬 수 있는 결과가 발표되었는데 불확실성에 대한 매우 구체적인 정보를 필요로한다[7].

본 논문에서는 성능 지표함수를 도입하여 Game Problem을 풀게 되는데, 이로부터 변형된 이산 대수 리카티

방정식(Modified Discrete Algebraic Riccati Equation)을 얻게되고, 이것의 해로 강인한 제어기를 설계한다. 이의 전체 궤환 시스템(Closed Loop System)이 안정할 수있는 해의 범위및 불확실성의 조건등을 규명한다. 불확실성에 대한 정보는 노름의 한계치만이 필요하며 어떠한 조합 조건도 필요로 하지 않는다. 이 문제는 [7] 에서 연구된 바 있는데 연속 시간의 경우 안정성을 증명할 수 있었지만 이산 시간의 경우는 안정성을 규명하지 못하였다.

2. 강인 제어기 설계

본 논문에서 사용할 몇가지 수학적 기호를 먼저 정의한다. 행렬 X'은 행렬 X의 트랜스포즈(transpose)를 나타내고, 두 대칭 행렬(symmetric matrix) X, Y에 대해서 $X > Y$ 는 $X - Y$ 가 양한정(positive definite) 행렬임을 나타낸다. 행렬 P의 노름 $\| P \|$는 $P'P$를 의미한다.

다음과 같이 모델 오차가 포함된 이산 시간 시스템을 생각하자.

$$x(k+1) = (A+\Delta A(k))x(k) + (B+\Delta B(k))u(k) \qquad (2\text{-}1)$$

위 식에서 x 는 상태 변수 이고 u 는 입력 변수이다. $\Delta A(k)$와 $\Delta B(k)$는 각각 상태 행렬 및 입력행렬에 들어간 모델오차를 의미하며 다음과 같은 행렬의 부등식을 만족한다고 가정하자.

$$\Delta A(k)'\Delta A(k) < Q_s \quad , \quad \Delta B(k)'\Delta B(k) < R_i \qquad (2\text{-}2)$$

위 식에서 Q_s 및 R_i 는 양한정 행렬이다. 이와 같은 모델오차하에서 (2-1) 의 이산 시간 시스템을 안정화 시키기 위해서는 다음과 같은 성능 지표 함수를 도입한다.

$$J_1(N, \Delta A(\cdot), \Delta B(\cdot), u) = 1/2\sum^{N} \{ x'(i)(Q-\Delta A(i)'\Delta A(i))x(i) + u'(i)(R-\Delta B(i)'\Delta B(i))u(i)\}$$
$$Q > Q_s \quad R > R_i \qquad (2\text{-}3)$$

$J_1(N)$ 은 구간 N까지의 유한 구간 성능을 의미한다. 이와 같은 성능 지표함수를 최대화 하는 $\Delta A^*, \Delta B^*$를 구하고, 최대화된 성능 지표 함수를 최소로 하는 u^*를 구하는 다음과 같은 Game Problem을 생각하자.

$$J_1^*(N) = \min_{u} \max_{\Delta A, \Delta B} J_1(N, \Delta A, \Delta B, u) \qquad (2\text{-}4)$$

여기서 $J_1^*(N)$, u^* $\Delta A^*, \Delta B^*$은 이 문제의 최적해인데, 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} J_1^*(N) &= \min_{u} \max_{\Delta A, \Delta B} J_1(N, \Delta A, \Delta B, u) \\ &\geq \min_{u} \max_{\substack{\|\Delta A\| \le Q_s \\ \|\Delta B\| \le R_i}} J_1(N, \Delta A, \Delta B, u) \\ &\geq J_1(N, \tilde{\Delta A}, \tilde{\Delta B}, u^*), \quad \|\tilde{\Delta A}\| \le Q_s, \|\tilde{\Delta B}\| \le R_i \end{aligned} \qquad (2\text{-}5)$$

만약 무한 구간의 성능 지표 $J_1^*(\infty)$가 존재한다면, (2-5)의 부등식에 의해서 무한 구간의 최적 제어기 u^*는 (2-2)의 불확실성에대한 (2-1)의 시스템을 안정화시킨다. 무한 구간의 해를 구하기 위하여 (2-3)의 유한 구간의 해를 구하기 위하여 다음과 같은 과정을 거친다.

$$\begin{aligned} J_2 = \min \max [\, & 1/2 \sum \{ x'(i)(Q-\Delta A(i)'\Delta A(i))x(i) + u'(i)(R-\Delta B(i)'\Delta B(i))u(i)\} \\ & + 1/2(x'(N)Qx(N) + u'(N)Ru(N)] \end{aligned} \qquad (2\text{-}6)$$

시점 N 에서 시작하는 최적치는 다음과 같다.

$$J_{N,N}(x(N)) = 1/2\, x'(N)P(N)x(N), \quad P(N)=Q, \quad u(N)=0 \qquad (2\text{-}7)$$

시점 N-1 에서 시작하는 최적치는

$$\begin{aligned} & J_{N-1,N}(x(N-1), u(N-1), \Delta A(N-1), \Delta B(N-1)) \\ &= 1/2\, x'(N-1)\{Q-\Delta A(N-1)'\Delta A(N-1)\}x(N-1) \\ &\quad + 1/2\, u'(N-1)\{R-\Delta B(N-1)'\Delta B(N-1)\}u(N-1) \\ &\quad + 1/2\, [(A+\Delta A(N-1))x(N-1)+(B+\Delta B(N-1))u(N-1)]' \\ &\quad P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1)+(B+\Delta B(N-1))u(N-1)] \end{aligned} \qquad (2\text{-}8)$$

식으로 주어진다. 위의 값을 입력 변수 u 및 ΔA, ΔB 로 미분 하고 그 값을 0 과 같다고 놓으면 다음 식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} \partial J_{N-1,N}/\partial u = & [R-\Delta B(N-1)'\Delta B(N-1)]u(N-1) \\ & + (B+\Delta B(N-1))'P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1) \\ & + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)] = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}9)$$

$$\begin{aligned} \partial J_{N-1,N}/\partial \Delta A(N-1) = & -\Delta A(N-1)x(N-1)x'(N-1) \\ & + P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1) \\ & + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)]x'(N-1) = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}10)$$

$$\begin{aligned} \partial J_{N-1,N}/\partial \Delta B(N-1) = & -\Delta B(N-1)u(N-1)u'(N-1) \\ & + P(N)[(A+\Delta A(N-1))x(N-1) \\ & + (B+\Delta B(N-1))u(N-1)]u'(N-1) = 0 \end{aligned} \qquad (2\text{-}11)$$

(2-10) 식 및 (2-11) 식은 다음과 같이 정리 된다.

$$\Delta A(N-1)x(N-1)x'(N-1)=P(N)x(N)x'(N-1) \qquad (2\text{-}12)$$

$$\Delta B(N-1)u(N-1)u'(N-1)=P(N)x(N)u'(N-1) \qquad (2\text{-}13)$$

(2-12) 식 및 (2-13) 식은

$$\Delta A(N-1)x(N-1)=P(N)x(N) \qquad (2\text{-}14)$$

$$\Delta B(N-1)u(N-1)=P(N)x(N) \qquad (2\text{-}15)$$

이면 만족된다. (2-14) 식 및 (2-15) 식을 (2-9) 식에 대입하여 정리하면

$$Ru(N-1) + B'P(N)x(N) = 0 \qquad (2\text{-}16)$$

의 관계를 얻는다. 위식에서 x(N)은 다음처럼 구할 수 있다. (2-14) 및 (2-15) 식을 (2-1) 의 시스템에 적용하면

$$\begin{aligned} x(N) &= (A+\Delta A(N-1))x(N-1) + (B+\Delta B(N-1))u(N-1) \\ &= Ax(N-1) + Bu(N-1) + 2P(N)x(N) \qquad (2\text{-}17) \end{aligned}$$

이고 따라서 다음식을 얻는다.

$$x(N) = (I-2P(N))^{-1}(Ax(N-1)+Bu(N-1)) \qquad (2\text{-}18)$$

$Z(N)=(I-2P(N))^{-1}$ 로 정의 하자. (2-18) 식을 (2-16) 식에 적용하면 다음처럼 제어 입력을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(N-1) &= -\{R+B'P(N)Z(N)B\}^{-1}B'P(N)Z(N)Ax(N-1) \\ &= F(N-1)x(N-1) \qquad (2\text{-}19) \end{aligned}$$

여기서 F(N-1) 은 다음과 같이 정의 된다.

$$F(N-1) = -\{R+B'P(N)Z(N)B\}^{-1}B'P(N)Z(N)A \qquad (2\text{-}20)$$

따라서 x(N) 은 (2-18) 식으로부터

$$\begin{aligned} x(N) &= Z(N)(A+BF(N-1))x(N-1) \\ &= G(N-1)x(N-1) \qquad (2\text{-}21) \end{aligned}$$

이다. 여기서 G(N-1)은 다음과 같이 정의 된다.

$$G(N-1)=Z(N)(A+BF(N-1)) \qquad (2\text{-}22)$$

위의 결과를 $J_{N-1,N}$ 의 최적치를 구하는데 사용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &J^*_{N,N-1}(x^*(N-1), u^*(N-1), \Delta A^*(N-1), \Delta B^*(N-1)) \\ &= 1/2\ x^{*\prime}(N-1)Qx^*(N-1) + 1/2\ u^{*\prime}(N-1)Ru^*(N-1) \\ &\qquad + 1/2\ x'(N)\{P(N)-2P(N)P(N)\}x(N) \\ &= 1/2\ x^{*\prime}(N-1)\{\ Q + F(N-1)'RF(N-1) + \\ &\qquad G(N-1)'(P(N)-2P(N)P(N))G(N-1)\}x^*(N-1) \\ &:= 1/2\ x^{*\prime}(N-1)P(N-1)x^*(N-1) \qquad (2\text{-}23) \end{aligned}$$

위의 결과는 일반적인 첨자 i 에 대해서 성립하고 따라서 다음의 결과를 얻는다.

P(N)=Q 이고 $1 \le i \le N$ 일때는 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} &Z(i)=(I-2P(i))^{-1} \\ &F(i-1)=-\{R+B'P(i)Z(i)B\}^{-1}B'P(i)Z(i)A \\ &G(i-1)=Z(i)(A+BF(i-1)) \\ &P(i-1)=Q+F'(i-1)RF(i-1)+G'(i-1)(P(i)-2P(i)P(i))G(i-1) \qquad (2\text{-}24) \end{aligned}$$

최적 제어입력 u^* 는

$$u^*(i)=F(i)x(i) \qquad (2\text{-}25)$$

와 같이 주어진다. 무한구간 문제의 해는 유한 구간 문제의 해로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Z &= (I-2P)^{-1} && (2\text{-}26) \\ F &= -\{\ R + B'PZB\ \}^{-1}B'PZA && (2\text{-}27) \\ G &= Z(\ A + BF) && (2\text{-}28) \\ P &= Q + F'RF + G'PZ^{-1}G && (2\text{-}29) \\ u^*(i) &= Fx(i) && (2\text{-}30) \end{aligned}$$

위식중에서 (2-26) 식의 Z 는 모델 오차의 크기가 없는 경우에 단위행렬로 되고 주어진 식은 일반적인 최적제어문제의 리카티(Riccati) 방정식으로 된다. 즉 Z는 강인 안정도를 보장하기 위해서 추가된 항이라는 것을 알 수 있다.

3. 궤환 시스템의 안정성

이 절에서는 앞에서 제안한 제어기를 사용한 궤환 시스템이 안정할 수 있는 조건을 제시하려 하는데 이를 위해 다음의 보조 정리가 필요하다.

사실 1 임의의 양의 실수 α에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$2x'M'PNx \le \alpha x'M'PMx + 1/\alpha\ x'N'PNx \qquad (3\text{-}1)$$

여기서 P는 양한정 행렬이고 M,N은 적당한 차수를 갖는 임의 행렬이고 x는 임의의 벡터이다.

보조정리 불확실한 시스템 (2-1)에서 상태 궤환 제어기가 u=Fx인 경우 다음을 만족하는 양한정 행렬 P가 존재하면 전체 궤환 시스템은 안정하다.

$$\text{(i)}\ P = Q+F'RF + (A+BF)'P(I+2P)(A+BF)+S \tag{3-2a}$$

$$\text{(ii)}\ P \le I \tag{3-2b}$$

여기서 Q와 R은 $Q \ge 3Q_s$, $R \ge 3R_i$ 인 양한정 행렬이고 S는 임의의 양한정 행렬이다.

증명) 시스템 (*)에서 u=Fx 이면 궤환 시스템은 다음과 같다.

$$x(n+1) = (A+\Delta A(r))x(n) + (B+\Delta B(s))x(n)$$
$$= (A_u+B_uF)x(n)$$

여기서

$$A_u = A + \Delta A(r)$$
$$B_u = B + \Delta B(s)$$

이다. (2-28)의 해 P를 이용하여 Lyapunov function을

$$V(n)=x'(n)Px(n)$$

이라하면

$$\Delta V = V(n+1) - V(n) = x(n+1)Px(n+1) - x(n)P(n)x(n)$$
$$= x'(n)((A_u+B_uF)'P(A_u+B_uF) - P)x(n)$$

이 된다. 이때

$$M := (A_u+B_uF)'P(A_u+B_uF) - P$$

라 정의하고 M이 음한정 임을 보이게 되면 전체 궤환 시스템이 안정함을 알 수 있다. 여기서 M을 정리하면

$$M = (A+BF)'P(A+BF) + 2\Delta A'(PA+PBF) + 2F'\Delta B'(PA+PBF)$$
$$+ (\Delta A+\Delta BF)'P(\Delta A+\Delta BF)$$

이다. (3-1)에 의해서

$$2\Delta A'(PA+PBF) \le \Delta A'\Delta A + (A+BF)'P^2(A+BF) \tag{3-3}$$
$$2F'\Delta B'(PA+PBF) \le F'\Delta B'\Delta BF +(A+BF)'P^2(A+BF) \tag{3-4}$$
$$(\Delta A+\Delta BF)'P(\Delta A+\Delta BF) \le 2\Delta A'P\Delta A + 2F'\Delta B'P\Delta BF \tag{3-5}$$

이 성립 하는데 $P \le I$ 이므로

$$\Delta A'P\Delta A \le \Delta A'\Delta A \le Q_s, \tag{3-6}$$
$$F'\Delta B'P\Delta BF \le F'\Delta B'\Delta BF \le Q_s \tag{3-7}$$

가 성립한다. 따라서 (3-3) ~ (3-7) 에 의해

$$M \le (A+BF)'P(A+BF) + 3Q_s + 3R_i + 2(A+BF)'P^2(A+BF) -P$$

가 되고 여기서 P에 (3-2a)를 대입하면

$$M < -S$$

이다. S가 준양한정이므로

$$\Delta V < 0$$

이 되므로 전체 궤환 시스템은 안정하다.

정리 불확실한 시스템 (2-1)에 대해서 (2-30)의 제어기를 사용한 전체 궤환 시스템은 다음 두가지 경우에 안정하다.

(i) $0 \le P \le I$ 이거나,

(ii) $1/2\ I \le P \le I$ 이고

$$Q_o + F'R_oF \ge -4G'P^2ZPG \tag{3-8}$$

여기서 $Q = 3Q_s + Q_o$ $R = 3R_i + R_o$ 이고 $Q_o,\ R_o \ge 0$

증명) 식 (2-29)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P = Q+F'RF+G'P(I-2P)G$$
$$= Q+F'RF+(A+BF)'(I+2PZ)P(A+BF)$$
$$= Q+F'RF+(A+BF)'P(I+2P)(A+BF)+4(A+BF)'PPZP(A+BF)$$

(i) $0 \le P \le 1/2\ I$ 일 때,

$PZ \ge 0$ 이므로

$4(A+BF)'PPZP(A+BF) \ge 0$ 이다.

따라서 보조정리에 의해 전체 궤환 시스템은 안정하다.

(ii) $1/2\ I \le P \le I$ 일 때,

$$P = 3Q_s + 3F'R_iF + (A+BF)'P(I+2P)(A+BF) + Q_o + R_o$$
$$+4(A+BF)'P^2ZP(A+BF)$$

이다. 여기서 (3-8) 에 의해서

$$Q_o + R_o + 4(A+BF)'P^2ZP(A+BF) \ge 0$$

이므로 보조정리에 의해 전체 궤환 시스템은 안정하다.

4. 결 론

본 논문에서는 불확실한 이산 시간 시스템에 대해서 성능 지표 함수를 도입하여 변형된 이산 Riccati 방정식으로부터 강인한 제어기를 설계하였고, 이 제어기가 불확실한 시스템을 안정화 시킬 수 있는 변형된 Riccati 방정식의 해의 조건 및 불규치성 행렬의 노름의 한계치에 대한 조건을 제시하였다. 기존의 결과에서 가정한 조합 조건을 필요로하지 않고 입력 행렬과 상태 행렬 모두의 불확실성을 허용하고 변형된 Riccati 방정식을 유도하였다는 점에서 의의를 찾을 수 있다. 그러나 연속 시간의 경우 처럼 제안한 제어기의 완전한 안전성을 규명하지 못하고 제한된 범위에서의 안전성만을 규명했다는 점이 앞으로의 연구과제를 제시한다. 성능 지표 함수를 도입하여 강인 제어기뿐만 아니라 강인 성능 제어기를 구현할 수 있는데 무한 구간의 성능 지표함수를 유한하게 만들 수 있는 해가 존재한다면 제안한 제어기의 안정성을 증명할 필요없이 (2-5)에 의해서 시스템이 안정함을 알 수 있을 뿐만 아니라 강인 성능에 대한 많은 성질을 규명할 수 있다. 본 논문에서는 비구조적인 불확실성을 가정했는데 구조적 불확실성에 대해서도 적용이 가능하다. 제안한 제어기는 상태 변수 궤환 제어기인데, 출력 궤환 제어기 설계와, 외란이 유입될 경우의 문제에 대한 연구도 앞으로의 연구 과제로 남는다.

참고 문헌

[1] P. P. Khargonekar, et al., "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems : Quadratic Stabilizability and H∞ Control Theory," IEEE Trans. A.C, vol. 28, Mar. 1990

[2] S. Yamamoto, et al., " On the State Feedback Stabilization of Norm Bounded Uncertain Systems," in Proc. A.C.C., San Diego, Califonia, 1990.

[3] I. R. Petersen, "A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems," Systems & Control Letters., vol.8, 1987.

[4] M. E. Magana, et al., "Robust State Feedback Stabilization of Discrete-Time Uncertain Dynamical Systems," IEEE Trans. A.C, vol. 33, Sep. 1988.

[5] W.-C. Yang, et al., " Discrete Time Robust Control Via State Feedback for Single Input Systems." IEEE Trans. A.C, vol. 35, May 1990

[6] 이준화, 김상우, 권욱현, " 강인 성능을 보장하는 제어기 설계에 관한 연구," 한국 자동제어 학술회의 논문집, 1991.

[7] W. Chai, et al., "Unified Design of Robust Discrete-Time Control System", in Proc. Amer. Contr. Conf., Chicago, Illinois, pp. 1091-096, 1992.

[8] D. Kirk, *Optimal Control Theory*, Prentice Hall.

[9] B. Anderson, et al., *Optimal Control*, Prentice Hall.

[10] K. Ogata, *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall.