

효율적인 다물체 동역학 해법 및 인공위성 전개장치에의 응용

이기수, *김진철
한국항공우주연구소 위성본체실

An Efficient Solution for Multibody Dynamics and Application to Satellite Deployment Mechanism

Kisu Lee and *Zeen Chul Kim
Satellite Bus Department, Korea Aerospace Research Institute

Abstract

Solar arrays and antennas of the satellite are usually stowed within the dimensions of the launch-vehicle fairing and deployed in the orbit. To solve such multibody dynamic problems, differential equations and algebraic equations are simultaneously solved, and special solution techniques are required. In this paper, Lagrange multipliers associated with the constraints are iteratively computed by monotonically reducing an appropriately defined constraint error vector, and the resulting equation of motion is solved by a well-established ODE technique. Deformable bodies as well as rigid bodies are treated, and applications to satellite solar arrays are explained.

1. 서론

인공위성의 크기가 증대함에 따라서, 인공위성의 태양전지판 및 안테나 등의 장비는 로켓트 내부에서 접혀진 상태로 발사되며 궤도에 진입된 후 지상국의 명령에 의하여 펼쳐지게 된다. 이들 전개장치는 인공위성의 성공 여부에 결정적인 영향을 미치고 있으며 이의 동역학적 해석은 인공위성 개발시 중요한 과제가 된다. 일반적으로 태양전지판 및 안테나는 여러개의 물체가 조인트를 통하여 연결된 다물체 시스템을 이루고 있으며 다물체 동역학적 해석이 적용되어야 한다. 특히 태양전지

판의 경우 조인트(힌지)에 작용하는 복잡한 상태의 힘 및 케이블-폴리 등의 복잡한 장치로 인하여 몇개의 독립 변수만 이용하여 운동방정식을 유도하는 것은 현실적으로 거의 불가능하며, Lagrange 승수를 이용한 운동방정식을 유도하는 것이 타당하다. 이 경우 미분방정식(운동방정식) 및 대수방정식(조인트에서의 기구학적 구속 조건)을 동시에 풀어야 하며 일반적인 상미분방정식의 시간 적분법을 그대로 적용할 수는 없다 [1]. 따라서 Lagrange 승수를 운동방정식에서 소거하거나 독립 좌표를 구하기 위하여 zero eigenvalue 기법 [2], singular value decomposition [3], QR decomposition [4], differential null space [5], Gaussian row operation [6], LU decomposition [7] 등의 방법들이 제안되었다. 그러나 구속 조건의 Jacobian 행렬은 시시각각 변하며 일반적으로 Newton Raphson 반복법이 추가로 필요한 관계로 경제적인 계산이 어려운 경우가 많으며 또한 계산의 정확도는 독립 좌표를 구하는 방법에 따라서 달라질 수 있다.

본 논문에서는 Lagrange 승수의 값이 주어졌다고 생각하여, 즉 대수 미분 방정식을 순수한 상미분 방정식으로 전환하여 잘 알려진 시간 적분법을 적용하는 방법을 사용하여 위와같은 문제를 풀기로 한다. 시간적분의 정확도와 구속조건의 정확도(조인트에서의 위치, 속도, 가속도)는 허용오차 이하로 만족시킬 수 있으며 계산가속기법(acceleration technique)을 이용한 경제적인 계산이 가능하다. 또 이와같은 계산 방법을 인공위성

태양전지판 전개장치의 동역학적 해석에 응용하기로 한다.

인공위성 태양전지판은 전개 완료시 진동이 일어나게되며 유연성 효과가 고려되어야 할 필요가 있다. 문헌 조사에 의하면 유연한 부재로 구성된 다물체 동역학을 해석하는 방법은 3 가지로 분류할 수 있다. 첫째로 Sunda와 Dubowsky [8] 등은 먼저 강체로 가정한 전체 시스템의 운동 방정식을 풀고 여기서 얻어진 관성력을 이용하여 부재의 탄성 변형을 구하였다. 이와같은 방법은 비교적 계산이 간단하나 강체 운동과 탄성 변형의 상호 간섭 (coupling) 효과를 무시해버리는 결점이 있다. 두 번째로 Kane, Likins와 Levinson[9] 등은 미소한 탄성 변형을 가정하여, 각 부재에 부착되어 움직이는 좌표계 (moving reference frame)를 이용하여 각 물체의 탄성 변형을 표시한 후 운동 방정식을 유도하였다. 이 경우 강체 운동과 탄성 변형의 상호 간섭 효과는 정확히 표시되나, Coriolis 가속도 및 원심력으로 인하여 질량 행렬 및 힘 벡터는 대단히 복잡하게되며 계산 시간도 증가한다. 세 번째로 Jonker[10] 등은 대변형 이론을 이용하여 강체 운동과 탄성 변형을 모두 고정된 관성 좌표계에서 함께 표시하였다. 이와 같은 방법은 각 부재의 탄성 변형이 유한 (finite)한 경우 및 각종 비선형 현상을 정확히 계산할 수 있으며 간단한 질량 행렬이 얻어진다. 그러나 비선형 유한요소법 이론 및 해가 적용되는 관계로 탄성력 계산은 대단히 복잡하게되며 계산 시간 역시 대폭 증가한다. 한편 Shabana [11] 등은 각종의 질량 행렬 (예로써, consistent, lumped, corrotational mass matrix)이 계산의 정확도에 미치는 영향을 검토하였는데, 일반적으로 lumped mass matrix를 사용하면 방정식은 간단히 얻을 수 있으나 계산 정확도를 위하여는 상당히 많은 유한요소 절점을 사용하여야 하는 부담이 따른다. 현실적으로 태양전지판 문제를 해석하기 위하여는 직선 보에 미소 탄성 변형이 일어나는 경우의 문제를 풀기 위한 효율적인 다물체 동역학 해법이 필요하다. 본 논문에서는, 미소한 탄성 변형을 가정하여, 강체 운동과 탄성 변형을 모두 고정된 관성 좌표계에서 표시하여 운동 방정식을 유도하였으며 물체에 붙어 움직이는 좌표계 내부의 상대 변형을 이용하여 탄성력을 계산하였다. 따라서

질량 행렬은 대단히 단순화되며 탄성력 역시 간단히 계산된다.

2. 강체로 구성된 다물체 시스템의 동역학적 해법

2.1 기본 방정식

강체로 구성된 물체들에 기구학적 구속조건이 부과된 경우 그 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{f} \quad (1)$$

위에서 \mathbf{M} 은 질량 행렬, $\Phi_{\mathbf{q}}^T$ 은 구속 조건식의 전치 Jacobian 행렬, \mathbf{q} 는 일반화 좌표계 (위치), λ 는 Lagrange 승수, 그리고 \mathbf{f} 는 힘을 나타낸다. 본 작업에서 사용하는 기구학적 구속 조건 Φ 는 다음과 같이 표시되는 holonomic constraint이다.

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2a)$$

위에서 t 는 시간을 나타낸다. 동역학적 해석을 위하여 미분 방정식 (1)과 대수 방정식 (2a)는 동시에 풀려야 한다. 만약 식 (1)에서 정확한 Lagrange 승수 값이 시간 적분 이전에 주어진다면, 식 (1)은 상미분 방정식이 되며, 수많은 참고문헌에 소개되어 있는 시간 적분법을 그대로 이용할 수 있다. Lagrange 승수 값이 정확히 주어지면 구속 조건식 (2a)는 자동적으로 만족된다. 구속 조건식 (2a)로 인하여 다음의 미분된 구속 조건식들도 만족되어야 한다.

$$\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0 \quad (2b)$$

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + 2\Phi_{\mathbf{q}t} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{tt} = 0 \quad (2c)$$

현실적인 계산에서는, 식 (2a)-(2c)들은 그중의 하나가 만족되었다고 하여 나머지 2 식이 저절로 만족되지는 않으므로 특별한 기법에 의하여 이들 3 식을 모두 만족시키는 것이 필요하다. 이 목적을 위하여 본 작업에서는 다음과 같은 세가지 형태의 구속 조건 오차를 정의한다.

(1) 위치 구속 조건의 경우, 구속 조건 오차 \mathbf{v} 는

$$\mathbf{v} = -\Phi \quad (3a)$$

(2) 속도 구속 조건의 경우, 구속 조건 오차 \mathbf{v} 는

$$\mathbf{v} = -\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_t \quad (3b)$$

(3) 가속도 구속 조건의 경우, 구속 조건 오차 v 는

$$v = -\Phi_q \dot{q} - (\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{q1} \dot{q} - \Phi_{11} \quad (3c)$$

실제 계산시 구속 조건 오차 v 는, 계산 과정의 필요에 의하여, 식 (3 a)-(3 c)중의 어느 하나가 선택된다.

2.2 방정식 해법

본 작업에서는 Lagrange 승수 λ 를 순수한 시간의 함수로 취급한다. 매 time step에서 Lagrange 승수의 정확한 값은 반복 계산법 (iterative scheme)에 의하여 계산되며 각 time step 사이의 Lagrange 승수 값은 내삽에 의하여 계산된다. 이와같은 방법에 의하여 Lagrange 승수의 값은 시간 적분 이전에 주어진다.

본 작업의 주요 과제는 매 time step에서 운동 방정식 및 구속 조건 (2 a)-(2 c)를 만족시키는 λ, q, \dot{q} 와 \ddot{q} 를 계산하는 것이다. 현실적으로 디지털 컴퓨터를 이용한 계산에서는, 수치해석에 수반되는 각종 오차로 인하여, 구속조건 (2 a)-(2 c) 중 어느 하나가 만족되어도 나머지 2 조건이 반드시 만족되지는 않는다. 만약 구속조건 (2 a)-(2 c) 중 어느 하나라도 제대로 만족되지 않는 경우 계산의 안정성은 상실된다. 따라서 구속조건 (2 a)-(2 c)를 모두 만족시키기 위한 특별한 대책이 필요하다. 이러한 목적을 위하여, 본 작업에서는 q 만 방정식 (1) 및 (2 a)를 풀어서 구하고, \dot{q} 는 (1)과 (2 b)를 풀어서 구하며 \ddot{q} 는 방정식 (1)과 (2 c)를 풀어서 구한다. 이와같은 방법을 사용하면 구속 조건 (2 a)-(2 c)는 모두 만족이 된다. 편의상 매 time step에서의 계산 기본 과정을 다음에 제시한다.

- (1) 방정식 (1)과 (2 a)를 풀어서 q 를 구한다.
- (2) 방정식 (1)과 (2 b)를 풀어서 \dot{q} 를 구한다.
- (3) 방정식 (1)과 (2 c)를 풀어서 \ddot{q} 와 λ 를 구한다.

한편 Lagrange 승수의 내삽으로 인하여 시간적분에 포함되는 오차는 시간 간격 h 의 4 제곱에 비례하므로 다음의 방정식을 풀어서 다음 time step의 시간 간격 h_{new} 를 결정할 수 있다.

$$(TOL)_{int} = \sqrt[4]{\frac{1}{4}(\text{fac})^4 + PTI(\text{fac})^N} \quad (4)$$

$$\text{fac} = h_{new}/h \quad (5)$$

위에서 N 은 순수한 시간 적분 오차와 관련된 상수로써 참고문헌 [12]등에 잘 설명되어 있으며 $(TOL)_{int}$ 는 사용

자가 지정하는 시간 적분의 허용 오차이다.

또 Time step $i+1$ 에서의 정확한 Lagrange 승수 값 λ_{i+1} 는 다음의 반복 계산법에 의하여 구해진다.

$$\lambda_{i+1}^m = \lambda_{i+1}^{m-1} - \alpha A_n v_{i+1}^{m-1} / C_{i+1} \quad (6)$$

위의 반복 계산법은 참고 문헌 [13]에 소개된 반복 계산법과 본질적으로 동일하다. 위에서 $i+1$ 은 time step을, m 과 $m-1$ 은 반복 회수를 나타내며, α 는 상수이고 A_n 과 C_n 는 계산 가속을 위한 행렬이다. (α, A_n 과 C_n 는 참고 문헌 [13]에 준하여 계산되므로 여기서는 설명을 생략한다). v 는 구속 조건 오차이며 (3 a)-(3 c) 중 어느 하나에 의하여 정의된다. λ_{i+1}^{m-1} 가 주어지면 q_{i+1}^{m-1} , \dot{q}_{i+1}^{m-1} 과 \ddot{q}_{i+1}^{m-1} 은 방정식 (1)의 해에 의하여 계산되며, 따라서 v_{i+1}^{m-1} 을 계산할 수 있다. 매 time step에서, 방정식 (1)과 (2 a)-(2 c)를 풀기 위하여, 세가지 종류의 구속 조건 오차가 사용된다. 즉 방정식 (1)과 (2 a)를 풀 때에는 위치 오차 (3 a)가 사용되고, 방정식 (1)과 (2 b)를 풀 때에는 속도 오차 (3 b)가 사용되고, 방정식 (1)과 (2 c)를 풀 때에는 가속도 오차 (3 c)가 사용된다. 반복 계산법 (6)에 의하여 각각의 구속 조건 오차가 0을 향하여 단조 감소를 참고문헌[13]의 방법에 준하여 증명할 수 있다. 실제 계산에서는 이들 오차가 사전 지정된 허용 오차 보다 작게될 때까지 반복계산법 (6)을 사용한다.

2.3 인공위성 태양전지판 전개장치에의 응용

여기에서는 참고문헌 [14]에 소개된 통신위성 INTELSAT V의 설계 자료를 이용하여 예제 계산을 수행하기로 한다. INTELSAT V의 계략도는 그림 1에 나와 있으며 설계 자료는 표 1에 나타나 있다. 또 케이블로 인한 스프링 상수 k 는 $4500 \cdot 0.01835^2$ 이며 케이블로 인한 토크 T 는 다음과 같이 계산한다.

$$T_1 = k(2\theta_1 - \theta_2)$$

$$T_2 = k(\theta_2 - \theta_3)$$

$$T_3 = k(\theta_3 - \theta_4)$$

위에서 T 및 θ 는 그림 1에 표시되어 있는 토크와 각도를 나타낸다. 봄 및 판의 전개 각도의 변화가 그림 2에 나타나 있다. 그림 5의 계산 결과는 참고문헌 [14]의 계산 결과와 비교적 유사하며 추가로 필요한 자료가 확보되면 좀더 정확한 계산이 가능하다고 보인다 (참고문헌

[14]는 연체 동역학 프로그램에 탄성 계수를 크게하여 강체 동역학적 효과를 낸것임).

표 1 INTELSAT V 위성 전개 장치의 주요 설계 변수

	길이 m	질량 kg	회전관성 kg-m ²	마찰력 Nm	힌지스프링	
					상수 Nm/rad	초기 토크 Nm
요크	1.090	2.222	0.2798	0.68	0.1273	1.70
판 1	1.965	12.377	4.2009	0.64	0.1305	0.85
판 2	1.965	9.982	3.8773	0.69	0.1305	0.85
판 3	1.936	8.920	2.9316	0.70	0.1305	0.85

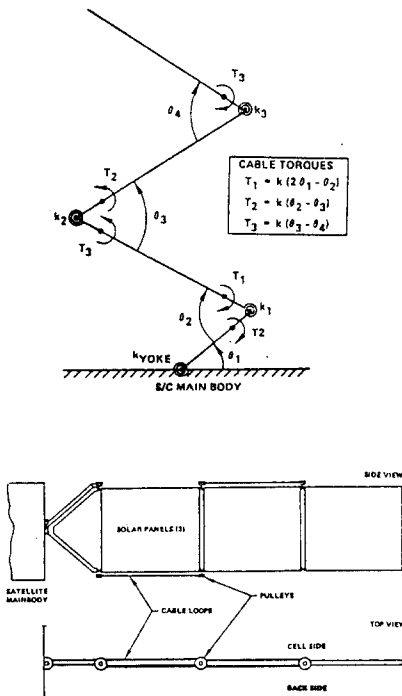


그림1 INTELSAT V 위성 전개 장치의 개략도

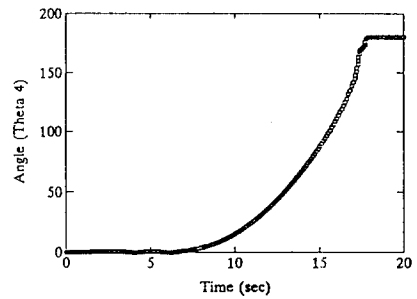
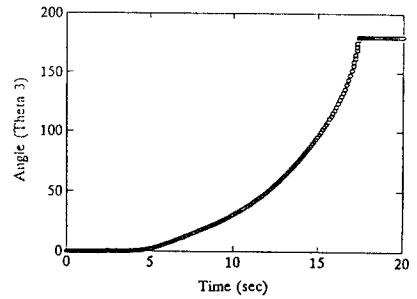
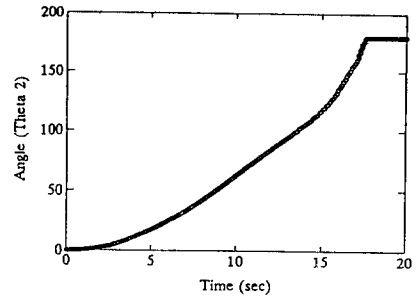
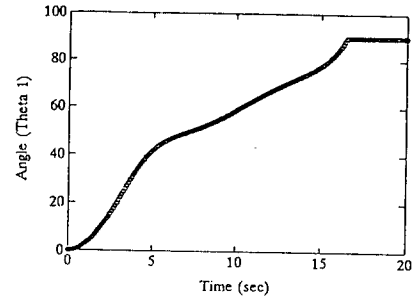


그림 2 INTELSAT V 태양전지판 전개 각도의 변화

3. 연체로 구성된 다물체 동역학 해법

여기에서 다물체 시스템은 유연한 직선 보들로 이루어져 있다고 생각하고 미소 탄성 변형을 가정하며 관성 좌표계에서 내삽한 유한요소법을 이용하여 물체를 이산화(discretize) 한다. 또 보 요소는 운동중 직선을 유지한다고 가정하여 간단한 상수 행렬 (constant matrix)로

된 질량행렬을 얻는다. 또한 물체 내부에서 그 물체와 더불어 움직이는 지방 좌표계 (x,y)를 생각하는데, 이 지방 좌표계 (x,y)는 그 물체 내부의 2 점에 의하여 결정 되도록 한다. 지방 좌표계 (x,y)에 대한 그보의 변형을 u 라고 하면 탄성 에너지는 간단히 계산된다. 그러면 Lagrange Equation에 의하여 다음과 같은 형태의 운동 방정식을 쓸 수 있다.

$$M\ddot{q} + RKu(q) + \Phi_q^T \lambda = f \quad (7)$$

식 (7)에는 Coriolis 가속도 및 원심력이 원천적으로 존재하지 않으며 경제적인 계산이 가능하다. 예제로써 그림 3에는 힌지로 연결된 2 개의 유연한 보가 중력장에서 자유롭게 매달려 있는 것을 보여주고 있다. 이 모델은 참고문헌 [15]에 있는 모델과 동일한 것이며 본 논문의 계산 정확도를 점검하기 위하여 사용한 것이다. 사용된 데이터는 $L_1=L_2=1m$, $I_1=I_2=5*10^{-9}m^4$, $m_1=m_2=5kg$, $E_1=E_2=2*10^{11}N/m^2$ 이며, 여기에서 L, I, m, E는 각각 길이, 관성 모우먼트, 질량, 종탄성 계수를 나타낸다. 유한 요소법 적용시 각보는 각각 2 개의 보 요소를 사용하여 이산화하였다. 초기 각도는 $\phi_1(0)=0^\circ, \phi_2(0)=5^\circ$ 이며 이 상태에서 중력에 의하여 자유롭게 움직이기 시작한다. 그림 4에는 link 2의 강체 회전 각도의 변화가 표시되어 있으며 그림 5에는 link 2 맨 아래 끝의 맨 위 끝 점선에 대한 탄성 변위가 표시되어 있다. 그림 4-5의 결과는 참고문헌[15]의 결과와 잘 일치하고 있으며 요소 수를 증가시키면 좀더 정확한 결과가 나올 것이다.

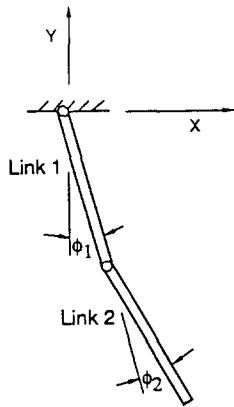


그림 3 2개의 유연한 보로된 모델

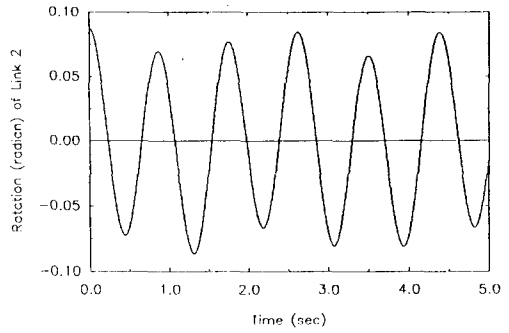


그림 4 Link 2의 강체 운동

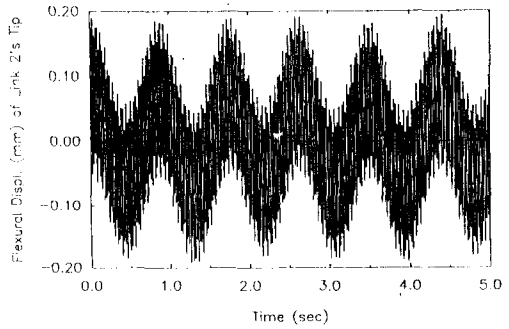


그림 5 Link 2 끝의 탄성 변위

4. 결론

기구학적 구속 조건을 가진 다물체 동역학을 풀기 위하여 정확한 Lagrange 승수의 값을 반복 계산법에 의하여 구했으며 운동방정식은 상미분 방정식으로 변화시켜 잘 알려진 시간 적분 방법을 적용하였다. 기구학적 구속 조건 오차는 반복 계산법에 의하여 단조 감소하며 계산 가속 기법이 적용되는 경우에는 급격히 감소시킬 수 있다. 위치, 속도 및 가속도의 세가지 종류의 구속 조건을 모두 매 time step에서 만족시킴으로써 계산의 안정성을 유지하였으며 Newton-Raphson method나 행렬의 decomposition을 사용하지 않았다. 강체로된 시스템과 연체로된 시스템 모두 이와같은 방법을 적용할 수 있으며 특히 인공위성 태양전지판 전개 해석에 이용될 수 있음을 예제 계산을 통하여 입증하였다. 이와 같은

계산 방법을 인공위성 태양전지판의 동역학적 해석에 응용하는 경우 태양전지판 전개 완료후의 진동 및 응력 계산이 가능하다.

참고 문헌

- [1] Petzold, L., "Differential Equations Are Not ODEs", SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 3, pp. 367-384, 1982.
- [2] Kamman, J.W. and Huston, R.L., "Dynamics of Constrained Multibody Systems", ASME J. Appl. Mech., Vol. 51, pp. 899-903, 1984.
- [3] Singh, R.P. and Likins, P.W., "Singular Value Decomposition for Constrained Dynamical Systems", ASME J. Appl. Mech., Vol. 52, pp. 943-948, 1985.
- [4] Kim, S.S. and Vanderploeg, M.J., "QR Decomposition for State Space Representation of Constrained Mechanical Dynamic Systems", ASME J. Mech. Trans. Auto. Des., Vol. 108, pp. 183-188, 1986.
- [5] Liang, C.G. and Lance, G.M., "A Differentiable Null Space Method for Constrained Dynamic Analysis", ASME. J. Mech. Trans. Auto. Des., Vol. 109, pp. 405-411, 1987.
- [6] Ider, S.K. and Amirouche, F.M.L., "Coordinate Reduction in the Dynamics of Constrained Multibody Systems-A New Approach", ASME J. Appl. Mech., Vol. 55, pp. 899-904, 1988.
- [7] Wehage, R.A. and Haug, E.J., "Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic Systems", ASME J. Mech. Des., Vol. 104, pp. 247-255, 1982.
- [8] Sunda, W. and Dubowsky, S., "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co-Planar Linkage Systems," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 103, pp. 643-651, 1981.
- [9] Kane, T.R., Likins, P.W. and Levinson, D.A., "Space Craft Dynamics," McGraw Hill, New York, 1983.
- [10] Jonker, B., "A Finite Element Dynamic Analysis of Spatial Mechanisms with Flexible Links," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 76, pp. 17-40, 1989.
- [11] Shabana, A.A., "Automated Analysis of Constrained Systems of Rigid and Flexible Bodies," ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 107, pp. 431-439, 1985. Engineering, Vol. 28, pp. 279-293, 1989.
- [12] Hairer, H., Norsett, S.P. and Wanner, G., "Solving Ordinary Differential Equations I," Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [13] Lee, K., "An Accelerated Iterative Method for Contact Analysis," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 279-293, 1989.
- [14] Wie B., Furumoto N., Banerjee A.K. and Barba P.M., "Modeling and Simulation of Spacecraft Solar Array Deployment", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 9, pp. 593-598, 1986.
- [15] Usoro, P.B., Nadira, R., and Mahil, S.S., "A Finite Element/Lagrange Approach to Modeling Lightweight Flexible Manipulators," ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 108, pp. 198-205, 1986.