

# LQG설계에 의한 시선지령 유도루우프의 구성

장 상근, 유 준  
충남대학교 전자공학과

## Command to Line of Sight Guidance Loop Based on LQG Design

Chang Sangkeun and Lyou Joon  
Dept. of Electronics Eng., Chungnam National University

### Abstract

A guidance loop of the missile system which uses a command to line of sight(CLOS) guidance law is designed based on LQG theory.

In the environment of the severe tracking system noise, the system requires small aerodynamic control fin travel and small miss distance simultaneously. Results from a sample airframe shows good performance against a randomly maneuvering target.

### 1. 개 요

LQG 이론을 이용하여 시선지령유도(command to line of sight guidance) 방식을 사용하는 미사일 시스템의 유도 루우프를 설계한다. 표적과 미사일을 동시에 추적하는 추적 레이다의 잡음이 상당히 큰 상태에서 유도오차를 최소화하고 공압식 구동장치를 사용하는 소형 미사일의 경우 제한된 개소용량으로 인해 구동 날개 변위 총량(fin travel)을 되도록 줄이면서 임무를 수행하여야 한다. 이러한 측면에서 LQG 이론을 적용한 시선지령유도 루우프를 설계한다. 시선지령유도 방식에 의한 유도 루우프 구성은 그림1.과 같다. [3]

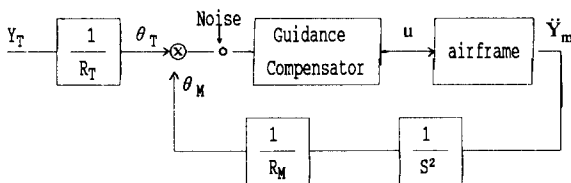


그림 1. 유도 루우프 구성

### 2. 시스템 모델

#### 2.1 표적 모델

표적은 추적레이다 시선축으로부터 랜덤하게 움직이는 것으로 가정하여 경험적인 데이터를 기반으로하여 다음과 같이 3차 Butterworth Filter를 이용하여 나타낸다. [1]

$$\ddot{y}_t = -2W_t \cdot \ddot{y}_t - 2W_t^2 \cdot \dot{y}_t - W_t^3 \cdot y_t + n_T$$

여기서  $W_t$  : 1 rad/sec

$n_T$  : 백색잡음

$y_t$  : 표적위치

이러한 모델에 의한 표적 운동은 그림2. 와 같이 나타난다.

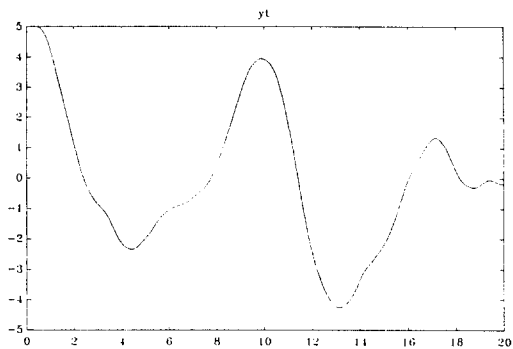


그림2. 표적운동

#### 2.2 미사일 모델

미사일의 운동 모델은 다음과 같으며 여기에 사용되는 공기역학적 힘과 모멘트 계수는 유도탄 속도에 따라 변하는데 유도탄 속도가 시간에 따라 변하므로 시스템 상태 방정식은 선형 시변 시스템으로 다룬다.[4]

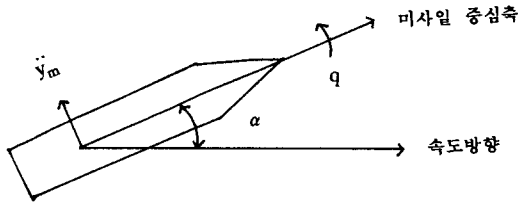


그림3. 미사일 운동 모델

$\ddot{y}_m$  : 미사일 뿡 가속도  
 $V_m$  : 미사일 속도  
 $\alpha$  : 비행양각  
 $q$  : 회전각속도  
 $\delta_c$  : 구동명령  
 $\ddot{y}_m = V_m(\dot{\alpha} - q) = V_m \cdot a_{11} \cdot \alpha + V_m \cdot b_1 \cdot \delta_c$   
 $\dot{\alpha} = a_{11} \cdot \alpha + q + b_1 \cdot \delta_c$   
 $\dot{q} = a_{21} \cdot \alpha + a_{22} \cdot q + b_2 \cdot \delta_c$

여기서 ;  $a_{11} = \frac{C_{N\alpha} \cdot QS}{m \cdot V_m}$

$a_{21} = \frac{C_{m\alpha} \cdot QSD}{I_{zz}}$

$a_{22} = \frac{C_{mq} \cdot QSD}{I_{zz}} \frac{D}{2V_m}$

$b_1 = \frac{C_{N\delta} \cdot QS}{m \cdot V_m}$

$b_2 = \frac{C_{m\delta} \cdot QSD}{I_{zz}}$

- $C_{N\alpha}$  : 양각에 의한 힘 계수
- $C_{m\alpha}$  : 양각에 의한 모멘트 계수
- $C_{mq}$  : 뱀핑 계수
- $C_{N\delta}$  : 구동날개에 의한 힘 계수
- $C_{m\delta}$  : 구동날개에 의한 모멘트 계수
- $m$  : 미사일 질량
- $Q$  : 동압 (=  $1/2 \rho V_m^2$ )
- $S$  : 미사일 기준 단면적
- $D$  : 미사일 기준 직경
- $I_{zz}$  : 관성모멘트

### 2.3 시선지령 유도 법칙 모델

$y_e = y_t - y_m$   
 $\ddot{y}_e = \ddot{y}_t - \ddot{y}_m$   
 $= \ddot{y}_t - (V_m a_{11} \alpha + V_m b_1 \delta_c)$

여기서 ;  $y_t$  : 시선측으로부터의 표적위치  
 $y_m$  : 시선측으로부터의 유도탄위치  
 $y_e$  : 시선측에서의 유도오차

## 3. 시스템 상태방정식과 측정방정식

### 3.1 상태방정식

2장에서 기술한 모델을 다음과 같은 상태방정식으로 표현한다.

$\dot{x} = A \cdot X + B \cdot U + G \cdot W$   
 $x = [y_t \quad \dot{y}_t \quad \ddot{y}_t \quad \alpha \quad q \quad y_e \quad \dot{y}_e]^T$   
 $u = \delta_c$

여기서  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Wt^3 & -2Wt^2 & -2Wt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -V_m a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad b_1 \quad b_2 \quad -V_m b_1 \quad 0]^T$

$G = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

$W$  : Process noise

$E [W(t)W(\tau)^T] = Q_N = n_T^2 \delta(t - \tau)$

여기서  $n_T = 50m/sec^3$

$\delta(t - \tau) = 0.025 \text{ sec}$

위에서 표현된 상태방정식의 시간에 따른 계수는 그림4, 5와 같다.

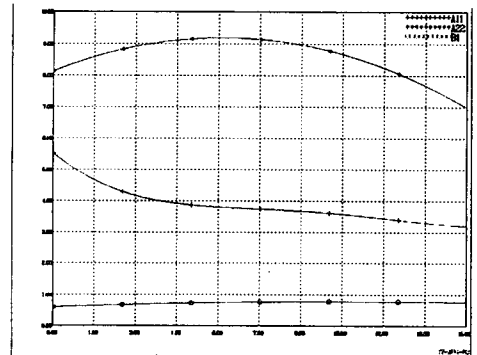


그림4. 상태방정식 계수

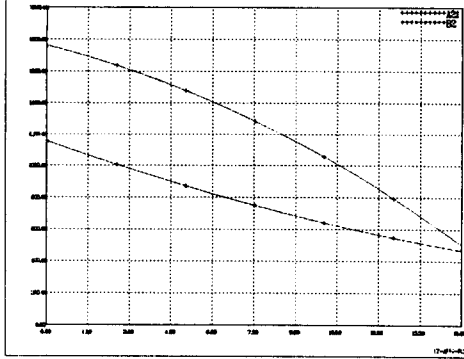


그림5. 상태방정식 계수

### 3.2 측정방정식

$$Z = Cx + V$$

$$C = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ]$$

V : 측정잡음

$$E[V(t)V(\tau)^T] = R_N = \sigma_{LOS}^2 \cdot Rm^2(t) \delta(t - \tau)$$

여기서  $\sigma_{LOS} = 0.2 \text{ mrad}$

$$Rm = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$

(비행시간에 따른 미사일 비행거리)

$$\delta(t - \tau) = 0.025 \text{ scc}$$

시간에 따른 Rm은 그림6.과 같다.

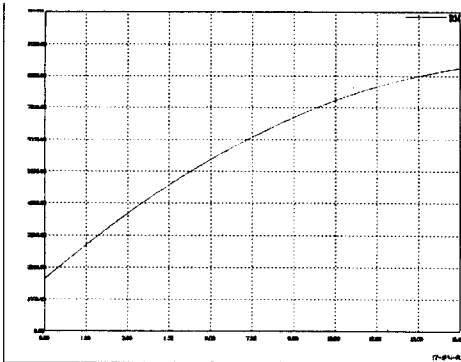


그림6. 시간에 따른 비행거리 (Rm)

## 4. 최적제어 입력계산

앞장에서의 상태방정식과 측정방정식은 연속시간계 함수인데 이를 소프트웨어 패키지를 사용하여 모두 이산시간계 함수로 바꾸어 취급하며 최적제어 입력도 이산시간 함수로 다루어 계산하기로 한다.

### o 선형 플랜트 상태방정식

$$X_{k+1} = A(k)X_k + B(k)U_k + G(k)W_k$$

### o 측정방정식

$$Z_k = C(k)X_k + V_k$$

$$C(k) = [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 ]$$

### o 평가함수

$$J(X_1) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (X_k^T Q X_k + U_k^T R U_k) + \frac{1}{2} X_N^T S_N X_N$$

$$\text{여기서 } Q = \text{Diag} [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu ]$$

$$R = 1$$

$$S_N = \text{Diag} [ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \lambda ]$$

한편 Optimal Stochastic regulator 문제로서 최적제어 입력을 계산하기 위해 두가지 방법을 적용하였는데 첫번째 방법은 최종 명중시간을 추정가능 하다고 가정하고 off-line으로 경계조건으로부터 모든 Gain을 구하는 방법이며 두번째 방법은 비행상태중에 매 계산구간마다 정상상태로 가정하여 대수 Ricatti 방정식의 해를 구하는 방법이다. 또한 필요한 상태변수는 최적 추정기를 통해 추정하여 사용한다.

### 4.1 off-line 계산에 의한 방법

명중시간을 추정가능하다고 가정하여 경계조건으로부터 off-line으로 제어이득 및 추정기 이득을 역으로 산출하여 사용한다. [2]

### o 추정기 및 제어입력

$$U_k = -K_k \hat{X}_k$$

$$\hat{X}_{k+1} = A(k) \cdot \hat{X}_k + B(k) \cdot U_k$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_k + L_k (Z_k - C \hat{X}_k)$$

### o 제어이득계산 (Ricatti equation)

$$K_k = (B^T S_{k+1} B + R)^{-1} \cdot B^T S_{k+1} A$$

여기서

$$S_k = A^T S_{k+1} A - K_k^T (B^T S_{k+1} B + R) K_k + Q; K < N$$

$S_N$ 은 주어진 값임.

### o 추정기 이득계산

$$L_k = P_k C^T (R_N)^{-1}$$

여기서  $P_{k+1} = A P_k A^T + G Q_N G^T; K \geq 0$

$$P_k = P_k - L_k (C P_k C^T + R_N)$$

여기서  $\hat{X}_k, P_k$  : 추정후 상태변수 및 오차공분산

$\hat{X}_k, P_k$  : 추정전 상태변수 및 오차공분산

#### 4.2 대수 Ricatti 방정식의 해를 이용하는 방법

비행 상태중 매 계산 구간마다 정상 상태로 가정하여 대수 Ricatti 방정식의 해를 구하여 제어입력 및 추정기 이득을 구한다.

○ 대수 Ricatti 방정식에 의한 제어 이득  

$$S - A^TSA + A^TSB(R + B^TSB)^{-1}B^TSA - Q = 0$$

$$K = R^{-1}B^TS$$

○ 대수 Ricatti 방정식에 의한 추정기 이득  

$$P - A^TPA + A^TPC^T(R + CPC^T)^{-1}CPA - Q = 0$$

$$L = PC^TR^{-1}$$

### 5. Simulation 결과 및 추후 검토 과제

앞에서 언급된 추정기와 제어입력은 25msec 마다 계산되며 초기 표적위치는 LOS로부터 5미터 떨어진 상태이고 표적 명중 시간은 단거리의 경우를 고려하여 5초로 하여 Simulation 하였다.

#### 5.1 off-line 계산에 의한 방법

경계조건으로서  $S_N = 0$ , 평가함수의  $\mu = 0.3$ 을 택하였다. 그 결과로서 유도오차, 제어입력, 유도탄의 비행양각 및 중운동 각속도를 나타내 보였다. (그림7 ~ 그림10)

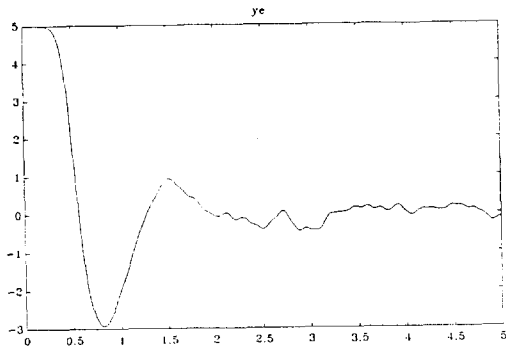


그림7. 유도오차

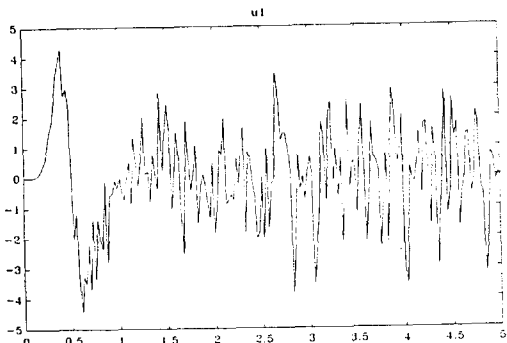


그림8. 제어입력

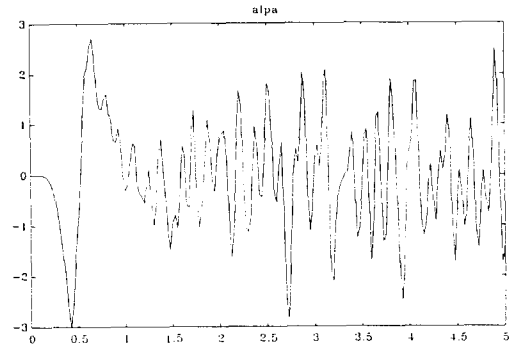


그림9. 비행양각

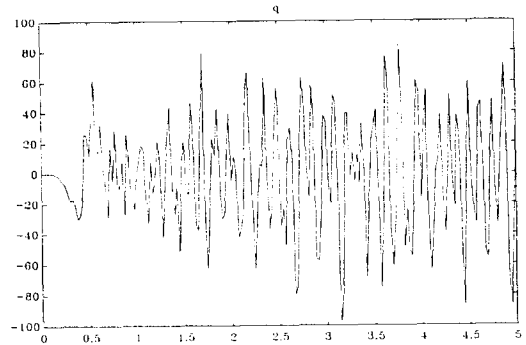


그림10. 중운동 각속도

#### 5.2 대수 Ractti 방정식의 해를 이용하는 방법

대수 Ricatti 방정식을 매 25msec 마다 계산하는것은 무리이고 실제 필요도 없으므로 4주기(100 msec)마다 계산한 경우의 Simulation 결과를 나타내 보였다. (그림11 ~ 그림14)

$S_N$ 과  $\mu$  값은 5.1에서와 같은 값을 사용하였다.

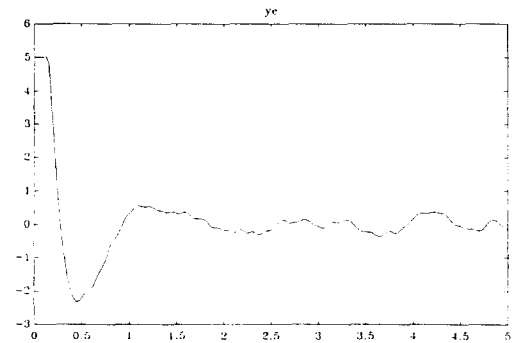


그림11. 유도오차

## 참고 문헌

- [1] J.E.Kain, D.J.Yost "Command to Line of Sight Guidance- A Stochastic Optimal Control Problem", AIAA, 1977
- [2] Frank L.Lewis, "Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic control theory", 1986
- [3] P.Garnell, "Guided Weapon control systems", 1977
- [4] Blakelock "Automatic Control of Aircrafts and Missiles", 1991

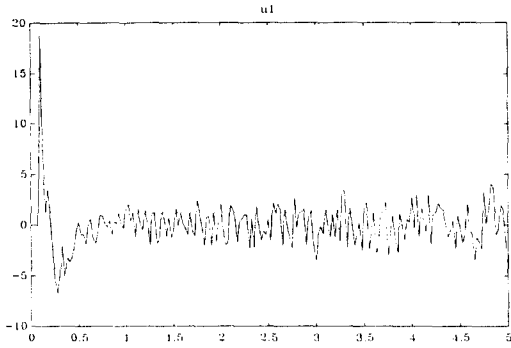


그림12. 제어입력

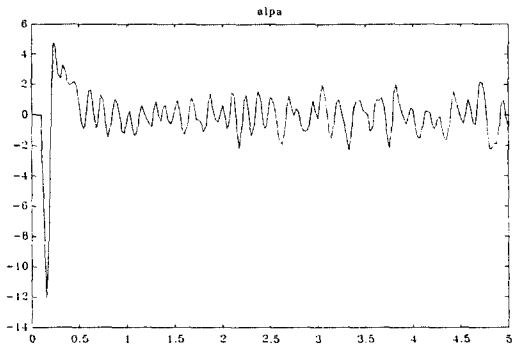


그림13. 비행양각

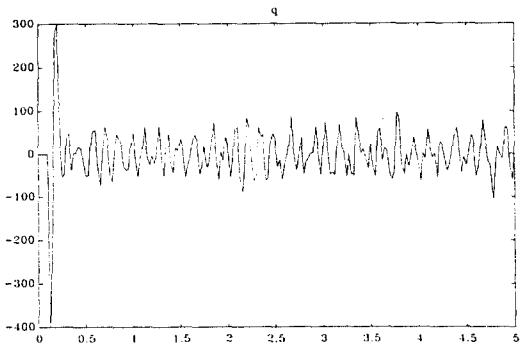


그림14. 중운동 각속도

### 5.3 추후 검토과제

Off-Line으로 계산된 제어 이론을 이용하는 경우 명중시간을 잘못 추정하였을 경우 생기는 문제점 검토가 요구되며 플랜트인 유도탄의 파라미터가 실제와 다를 경우의 민감도 분석이 필요하다.