

# 입력 가속에서 비롯된 innovation 바이어스 레벨의 검출\*

○신 해곤 홍순목

경북대학교 공과대학 전자공학과

## Detection of a Bias Level in Prediction Errors due to Input Accelerations

Hae Gon Shin Sun Mog Hong

Dept. of Electronic Eng.

Kyungpook National University

### ABSTRACT

In this paper the normalized innovations squared of a Kalman filter is used to detect a bias level in prediction errors due to target accelerations. The probability density function of the normalized innovation squared is obtained for a steady state Kalman filter, and it is used to calculate the detection probability of the bias level. A typical example is given to compute the detection probability.

이 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 Singer 모델을 사용한 Kalman 필터 innovation 의 확률 분포를 얻었다. III장에서는 normalized innovations squared 의 확률밀도함수를 구한다. 그리고 이 확률밀도함수를 이용해서 목표 가속에서 비롯된 바이어스의 검출 확률을 검출 threshold 에 대해 표현했다. IV장에서는 대표적인 예에 대해서 이 검출 확률을 계산하였다. 그리고 마지막으로 V장에서 결론을 맺는다.

### I. 서론

빔의 신속한 조향이 가능한 전자식조사 안테나(Electronically Scanned Antenna) 레이더에서는 측정을 원하는 목표에 대한 측정 시간, 측정간격을 선택적으로 취할 수 있다. 이러한 레이더에서는 레이더의 효율적 운용을 위해서 추적필터의 예측오차를 일정한 범위안에서 유지하면서 불필요한 측정을 피할 수 있도록 목표의 가속에 따라 표본화 빈도를 변화시키게 된다[1, 2, 3, 4].

### II. Singer 모델에 대한 Kalman 필터의 innovation

먼저 기동 목표의 운동모델로 많이 이용하게 되는 Singer 모델을 간단하게 설명한다[5]. Singer 모델에서는 목표의 가속  $a(t)$  를 평균이 0 이고 autocorrelation 을 다음과 같은 지수함수로 한다. 즉,

일반적으로 추적필터의 예측오차는 가속의 크기에 비례하는 바이어스를 갖는다. 따라서 목표의 가속이 크게 나타나는 경우 예측 오차를 일정한 범위안으로 유지하려면 더 높은 표본화 빈도를 선택해야 한다. 이 논문에서는 예측오차가 허용되는 일정한 값보다 커지지 않도록 새로운 표본화 빈도를 선택할 것인지를 결정하기 위해서, Kalman 필터의 normalized innovations squared 를 예측 오차의 바이어스 레벨을 검출하기 위한 함수로 사용하고 그 검출 확률을 구한다. 여기서 우선 목표 운동모델을 Singer 모델로 해서 그 innovation 의 확률적 분포를 얻는다. 그리고 정상상태 필터에 대한 normalized innovations squared 의 확률밀도함수를 구하고 이것을 이용해서 목표 가속에서 비롯된 바이어스 레벨의 검출 확률을 검출 threshold 에 대해 얻었다. 또 이러한 검출 확률을 대표적 응용 예에 대해서 계산해 보았다.

$$R(\tau) = E[a(t)a(t+\tau)] = \sigma_m^2 e^{-a|\tau|} \quad (1)$$

형태로 autocorrelation 함수를 취한다. 여기서  $\sigma_m^2$ 는 목표 가속의 분산,  $1/a$  는 autocorrelation 함수의 시정수에 해당한다. 이러한 목표 가속 모델을 쓸 때, 표본화 간격 T 에 대한 이산치시간 목표 운동모델은 상태변수  $x = [x \dot{x} \ddot{x}]^T$ ,  $\ddot{x} = a$  에 대해서 다음과 같이 정리된다.

$$x(k+1) = Fx(k) + v(k) \quad (2)$$

여기서

$$F = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & T & (aT-1+e^{-aT})/a^2 \\ 0 & 1 & (1-e^{-aT})/a \\ 0 & 0 & e^{-aT} \end{bmatrix} \quad (3)$$

\* 본 연구는 1992년도 국방과학연구소 장기기초연구비 지원에 의해 수행되었음.

이고 이산치시간 운동과정 잡음  $v$  는 평균이 0 인 백색과정 잡음으로 공분산 행렬은  $\sigma^2 \ll 1$  인 경우

$$Q = 2\alpha\sigma_m^2 \begin{bmatrix} T^5/20 & T^4/8 & T^3/6 \\ T^4/8 & T^3/3 & T^2/2 \\ T^3/6 & T^2/2 & T \end{bmatrix} \quad (4)$$

이다. 그리고 측정식은

$$z(k) = Hx(k) + w(k) \quad (5)$$

로 표현하게 되는데, 측정 잡음  $w$  는 평균이 0 이고 분산이  $R$  인 백색 잡음이다.

위와 같이 목표 운동을 Singer 모델로 모델링하고 예측을 위해 Kalman 필터를 사용한 경우, 측정 예측오차는 Kalman 필터의 innovation 이 된다. 여기서는 실제 목표의 가속 운동에 대한 Kalman 필터의 innovation 변화를 얻었다. 우선 실제 목표의 가속 운동은 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$x(k+1) = Fx(k) + \bar{u}(k) + \bar{v}(k) \quad (6)$$

즉,  $\bar{u}$  는 목표의 가속에 의한 입력을 표시하고,  $\bar{v}$  는 대기의 교란을 correlation 된 가속 입력으로 모델링하는 백색 과정 잡음이다. 이 잡음  $\bar{v}(k)$  의 평균은 0 이고 공분산 행렬은  $\bar{Q}$  이다. (6)의

실제 운동이 (2)의 운동모델과 정합된 경우 (즉,  $\bar{u}(k) \neq 0, \bar{Q} \neq 0$ ), innovation  $\nu(k+1)$  은 평균 0 이고 분산  $S(k+1)$  가  $HP(k+1/k)HT + R$  이 되는 백색 잡음이 된다. 여기서  $P(k+1/k)$  은 Kalman 필터 상태변수 예측의 공분산 행렬을 표시한다.

하지만 목표의 가속이 발생한 경우 ( $\bar{u}(i) \neq 0$ ) Kalman 필터 innovation  $\nu^*(k+1)$  는 [6]

$$\nu^*(k+1) = \nu(k+1) + H \sum_{i=0}^k \left[ \prod_{m=i+1}^k \Phi(m) \right] \bar{u}(i) \quad (7)$$

로 여기서  $\Phi(m) = F[I-K(m)H]$  로  $K(m)$ 은 Kalman 이득을 표시한다.

즉, 가속  $\bar{u}(i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , 에 의하여 발생하는 예측의 바이어스는

$$\psi(k+1) = H \sum_{i=0}^k \left[ \prod_{m=i+1}^k \Phi(m) \right] \bar{u}(i) \quad (8)$$

로 나타나고 따라서  $\nu^*(k+1)$  은

$$\nu^*(k+1) = \nu(k+1) + \psi(k+1) \quad (9)$$

로 표현되게 된다. 더 나아가  $\bar{Q} \neq Q$  인 경우의 innovation  $\nu^*(k+1)$ 은

$$\nu^*(k+1) = \bar{\nu}(k+1) + \psi(k+1) \quad (10)$$

으로 나타나게 되고, 여기서  $\bar{\nu}(k+1)$  은 평균이 0 이고 분산  $\bar{S}(k+1)$  이 다음의 식(11)로 주어지는 백색 잡음이 된다.

$$\bar{S}(k+1) = H\bar{P}(k+1/k)HT + R \quad (11)$$

여기서  $\bar{P}(k+1/k)$  는 다음과 같은 공분산 행렬이다.

$$\begin{aligned} \bar{P}(k+1/k) = & F[I-K(k)H]\bar{P}(k/k-1)[I-K(k)H]^TFT \\ & + FK(k)RK^T(k)FT + \bar{Q} \end{aligned} \quad (12)$$

나아가 대기 교란을 모델링하는  $\bar{v}$  와 측정 잡음  $w$  를 백색 Gaussian 과정으로 가정하면 식 (10) 의  $\nu^*(k+1)$  의 분포는  $N(\psi(k+1), \bar{S}(k+1))$  로 나타남을 알 수 있다. III절에서는 위치만 측정으로 얻어지는 경우 ( $H = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $R = \sigma_0^2$ ) 에 대해서, noncentral chi-square 형태의 확률 분포를 갖는 위치 예측오차 바이어스 레벨 검출 함수의 검출 확률을 표현한다.

### III. 바이어스 레벨 검출 함수

여기서 위치 예측오차의 바이어스 레벨 검출 함수로 사용하는 normalized innovations squared[6] 는 다음과 같이 정의된다.

$$q_M(k) = \sum_{i=k-M+1}^k \varepsilon_v(i) \quad (13)$$

여기서  $M$  은 sliding window 의 길이,  $\varepsilon_v(i)$ 는 normalized innovations squared 로

$$\varepsilon_v(i) = \nu^*(i)S^{-1}(i)\nu^*(i) \quad (14)$$

를 표시한다. 특히 II절에서 설명한 바와 같이  $\nu^*(i)$ 를 Gaussian 분포로 가정할 때, 정상상태의 Kalman 필터에 대한 식 (13)의 기동 검출 함수의 확률 밀도 함수는 다음과 같이 얻어진다[7].

$$p(q_M(k)) = \frac{1}{2(\bar{S}/S)} \left( \frac{q_M(k)}{\lambda(k)} \right)^{M-2} \exp \left\{ \frac{\lambda(k) + q_M(k)}{-2(\bar{S}/S)} \right\} \cdot I_{(M/2)-1} \left\{ \frac{(q_M(k)\lambda(k))^{1/2}}{(\bar{S}/S)} \right\} \quad (15)$$

여기서  $S$ ,  $\bar{S}$  는 각각  $S(k)$ ,  $\bar{S}(k)$  의 정상상태 값. 그리고  $\lambda(k)$  는 다음과 같이 정의되는 noncentral parameter 이다.

$$\lambda(k) = \sum_{i=k-M+1}^k \psi^2(i)/S \quad (16)$$

$I_{(M/2)-1}$  은  $(M/2)-1$  차수의 변형된 1 종 Bessel함수이다. 간단한 경우로  $M = 1$  일 때 바이어스를 분류하기 위한 가설을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} H_1 &: |\psi| < \psi_0 \\ H_2 &: |\psi| \geq \psi_0 \end{aligned} \quad (17)$$

이 때  $\psi_0$  는 현재 필터에서 허용할 수 있는 최대 예측 오차의 바이어스가 된다.  $q_m$  을 간단히  $q$  로 표시해서 분류기준을 표시하면

$$q \begin{cases} H_1 \\ > \\ H_2 \end{cases} \theta \quad (18)$$

로 분류를 위한 threshold  $\theta$  는 다음과 같이 식 (19)와 식 (20)으로 정의되는 false alarm 확률  $P_{FA}$  와 검출 실패 확률  $P_M$  을 고려해서 결정되어지게 된다.

$$P_{FA} = 1 - \int_0^\theta p(q|H_1, \psi=\psi_1) dq \quad (19)$$

$$P_M = \int_0^\theta p(q|H_2, \psi=\psi_2) dq \quad (20)$$

다음 절에서는 대표적인 예측문제 예에 대해서  $\psi_0$  를 결정하고  $P_{FA}$  와  $P_M$  을 threshold  $\theta$  의 변화에 대해서 얻어본다.

#### IV. 예제

여기서는 위상배열 레이다의 추적에서 발생하는 문제에 대해 식(19), (20)으로주어지는 바이어스 레벨 검출의 false alarm 확률  $P_{FA}$ 와 탐지 실패 확률  $P_M$ 을 얻어본다. 위치 예측오차의 2.5-sigma가 5 $\sigma_m$  를 넘지 않도록 예측 오차의 바이어스를 검출하는 문제를 생각한다. 이때 필터 파라미터를  $T^2 \sigma_m / \sigma_o = 0.5$ ,  $\alpha T = 0.1$ 로 취했다고 하면  $S = (1.77\sigma_o)^2$ 이 된다. 그리고 실제 운동 모델 (6)의  $\bar{Q}$ 가  $\bar{Q} = (\bar{\sigma}_m^2 / \sigma_o^2)Q$  로 그리고  $\bar{\sigma}_m$  가  $\bar{\sigma}_m \leq 0.1\sigma_m$  의 범위에서 값을 취한다면  $\sqrt{\bar{P}_{11}} \approx 1.225\sigma_o$ ,  $\bar{S} = (1.58\sigma_o)^2$  가 된다. 따라서 허용할 수 있는 최대 예측오차 바이어스는  $\psi_0 = 5\sigma_o - 2.5\sqrt{\bar{P}_{11}} = 1.94\sigma_o$  가 된다. 이 경우 다음과 같은 예측오차의 바이어스  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  (괄호 안은 이 예측오차의 바이어스를 발생시키는 목표의 가속을 표시함)

$$\begin{aligned} \psi_1 = 0 & \quad (u=0) & \quad \psi_2 = 1.94\sigma_o & \quad (u=1.69\sigma_m) \\ \psi_1 = 0.575\sigma_o & \quad (u=0.5\sigma_m) & \quad \psi_2 = 2.3\sigma_o & \quad (u=2.0\sigma_m) \\ \psi_1 = 1.15\sigma_o & \quad (u=1.0\sigma_m) & \quad \psi_2 = 3.45\sigma_o & \quad (u=3.0\sigma_m) \\ & & \quad \psi_2 = 4.6\sigma_o & \quad (u=4.6\sigma_m) \end{aligned}$$

에 대한 PFA,  $P_M$  은 그림 1 과 같다. 즉, threshold  $\theta = 3$  으로 취한 경우 가속  $u = 3.0\sigma_m$  에 의해 발생할 수 있는 최대 예측오차 바이어스를 검출할 확률은 약 0.6, 그리고  $u = 1.0\sigma_m$  에 의해 발생할 수 있는 바이어스를 false alarm 할 확률은 약 0.15 이다.

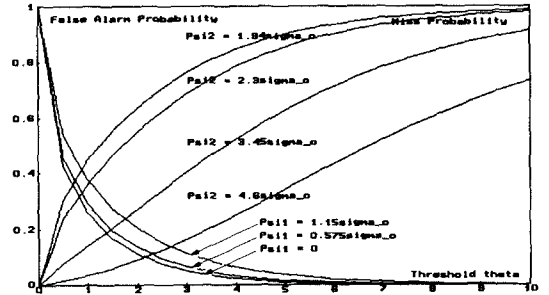


그림 1. 파라미터  $T^2 \sigma_m / \sigma_o = 0.5$ ,  $\alpha T = 0.1$ , 그리고

$\bar{\sigma}_m / \sigma_m \leq 0.1$  일 때 바이어스 레벨에 대한 false alarm 확률과 검출 실패 확률

Fig. 1. False alarm probability and miss probability of the bias levels versus threshold  $\theta$  for the parameters  $T^2 \sigma_m / \sigma_o = 0.5$ ,  $\alpha T = 0.1$ , and  $\bar{\sigma}_m / \sigma_m \leq 0.1$ .

#### V. 결론

이 논문에서는 목표의 가속에서 비롯된 예측오차의 바이어스 레벨을 검출하기 위해서 Kalman 필터의 normalized innovations squared 를 검출함수로 사용하는 경우에 대해서 검토하였다. Singer 모델에 대한 정상상태 Kalman 필터의 normalized innovations squared 의 확률 밀도 함수를 구했고, 그리고 이 확률 밀도 함수를 이용하여 예측오차의 바이어스 레벨 검출 확률을 구했다.

#### 참고 문헌

- [1] S. S. Blackman, *Multiple-Target Tracking with Radar Application*, Artech House, 1986.
- [2] S.A. Cohen, "Adaptive variable update rate algorithm for tracking targets with a phased array radar," *IEE Proceedings*, vol.133, Pt. F, no. 3, pp. 277-280, June 1986.

- [3] L.A. Gardner and R.J. Mullen, "Constant gain tracker with variable frame time," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-24, no. 4, pp. 322-326, July 1988.
- [4] D.J. Wilkin, I.Harrison, and M.S. Woolfson, "Target tracking algorithms for phased array radar," *IEEE Proceedings*, vol. 138, Pt. F, no. 3, pp. 255-262, June 1991.
- [5] R.A. Singer, "Estimating optimal tracking filter performance for manned maneuvering targets," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-6, pp. 473-483, July 1970.
- [6] Y. Bar-Shalom and T.E. Fortmann, *Tracking and Data Association*, Academic Press, 1988.
- [7] A.D. Whalen, *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, 1971.