

# 이차원 유한구간 필터와 스무더에 관한 연구와 화상복원에의 응용

권 옥현    ○ 박 상환    이 규승  
서울대학교    제어계측공학과

2-D FIR Filter and Smoother with Applications to Image Restoration

Wook Hyun Kwon    Park, Sang-hwan    Kyu Seung Lee  
Seoul National University    Dept. of Control & Instrumentation

## Abstract

The optimal FIR filter and smoother for estimating the state of 2-D state-space model are derived. Using the 2-D state covariance propagation rule suggested in this paper, the efficient algorithm to find the impulse response of the optimal FIR filter and smoother can be found. The filter and smoother can be applied to the image restoration problems and some examples of the application will be given.

## 1. 서론

상태공간 모델에 의한 선형 시스템의 표현은 그 해석 방법의 다양함 등의 이유로 인해 많은 문제에 적용되어 왔다. 대상 시스템이 2차원적인 특성을 가지고 있을때, 이를 상태공간으로 모델링하는 것은 2차원적인 특성으로 말미암아 하나의 정형화된 형태로 일반화된 이론이 성립되어 있지 않다. 상태공간에서의 2차원 시스템의 모델링은 주로 1차원 상태공간 표현법의 확장으로서 연구되어 왔는데, [1] - [5] 에서 그러한 시도를 살펴볼 수 있다. 2차원 시스템에서 상태공간을 도입하려는 가장 큰 이유는 순환형 알고리즘을 만들기 용이하기 때문이고, 특히 추정분야에서는 칼만 필터의 적용이 그 대표적인 예라 할 수 있는데, 이는 특히 영상처리 분야에서 영상복원 (Image Restoration) 문제의 응용 [2] - [5] 으로서 나타났다. 반면 신호처리분야에서는 IIR (infinite impulse response) 구조나 순환형 알고리즘보다는 FIR (finite impulse response) 구조의 필터가 많이 사용되는데, 그 이유는 구조적으로 BIBO (bounded input bounded output) 안정도가 보장되고, 신호처리에서 중요한 성질인 선형위상 특성을 가질 수 있기 때문이다. 따라서 공분산 모델에서의 FIR 구조의 필터가 많이 연구되어왔다. 상태 공간 모델에서는 이러한 FIR 구조의 필터가 많은 주목을 받지 못하였으나, 최근 1차원 상태

공간에서 유한구간의 관측정보만을 사용하여 상태변수를 추정하는 최적의 상태공간 FIR 필터가 발표된 바 [6] 있고 이에 따르는 연구가 활발히 진행되고 있다. 이러한 연구 중 [7] - [9] 는 상태공간 FIR 필터를 2차원 시스템에 적용하려는 것이고 본 논문 또한 그 맥락을 같이 한다. 1차원에서 상태공간 FIR 필터가 가지는 장점은 BIBO 안정도가 보장되고, 초기값 설정에 제한조건이 없으며, 시스템의 모델링 오차에 강인하다는 것 등을 들 수 있고, 2차원에서도 이러한 성질들이 기대된다.

## 2. 2차원 시스템의 모델링

본 논문에서 사용된 2차원 상태공간 모델은 그림 1에서 보는 바와 같이 일정 영역내에서 2차원 평면상에 정의된 값  $s(i, j)$  들의 집합을 상태변수로 한다.  $x_{13}$  을  $s(i, j)$  로 하면 다른 상태 변수들의 위치가 정해진다.

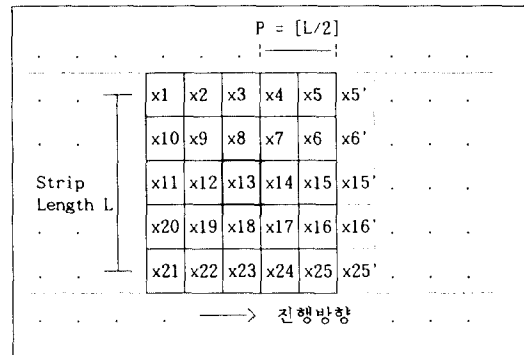


그림 1. 상태변수의 정의

이러한 상태변수의 정의는 화상복원에 사용된 칼만 열구간 필터 (Kalman Strip Filter) 의 간단한 형태인 [4] 에서 정의된 것과 동일하다.  $x_{13}$  을 중심으로 하는 상태변수  $x$  의 상태방정식은 다음과 같다.

$$X(i,k+1) = AX(i,k) + BU(i,k) \quad (1.a)$$

$$z(i,k) = CX(i,k) + v(i,k) \quad (1.b)$$

여기서,  $k = 0, 1, 2, \dots$

$X(i,k)$  :  $n \times 1$  vector,  $n = (L \times L)$

$A$  :  $n \times n$  state transition matrix

$B$  :  $n \times p$  drive matrix

$U(i,k)$  :  $p \times 1$  vector of white gaussian noise

$z(i,k)$  : a scalar output

$C$  :  $1 \times n$  observation matrix

$v(i,k)$  : scalar white gaussian noise

다음 사항을 가정한다.

$$E[U] = 0, \quad E[U(k,l)U^T(j,m)] = Q\delta_{kj}\delta_{lm}$$

$$E[v] = 0, \quad E[v(k,l)v(j,m)] = \alpha\delta_{kj}\delta_{lm}$$

$$E[Uv] = E[sU] = E[sv] = 0 \text{ or } 0,$$

$\delta$  : Kronecker's delta function,

이러한 시스템 모델 및 상태변수의 갯수는 정의에 따라서 다르게 잡혀질 수도 있다. 여기에서  $s(\cdot)$  를 정상 과정 (stationary process) 이라 하면  $X(\cdot)$  역시 정상 과정이 되고 시스템의 자기공분산행렬 (autocovariance matrix) 는 다음과 같다.

$$P_{XX}(m,n) = E[X(i+m,k+n)X^T(i,k)] \quad (2)$$

**정리 1** : 시스템의 자기공분산행렬  $P_{XX}(\cdot)$  는 다음 식을 만족한다.

$$P_{XX}(0,0) = AP_{XX}(0,0)A^T + BQB^T \quad (3.a)$$

$$P_{XX}(1,0) = AP_{XX}(0,0) \quad (3.b)$$

$$P_{XX}(-1,0) = P_{XX}(0,0)A^T \quad (3.c)$$

**증명** : 식 (1.a) 을 이용,  $E[X(i+1,k)X^T(i+1,k)]$  및  $E[X(i+1,k)X^T(i,k)]$ ,  $E[X(i,k)X^T(i+1,k)]$  의 기대치를 계산 하면서,  $X$  가 정상 과정인 것과  $U$  의 백색성 (whiteness) 및  $X$  와  $U$  가 상관관계가 없음 (uncorrelatedness) 을 이용한다.

### 3. 2차원 FIR 필터

2차원 FIR 필터  $H$  는 상태변수  $X$  의 추정치  $\hat{X}$  와 함께 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{X}(i,j) = \sum_{k1=0}^L \sum_{k2=-N}^N H(k1,k2:L,N)z(i-k1,j-k2) \quad (4.a)$$

필터의 성능지수는 다음과 같다.

$$J_f = E[[X(i,j) - \hat{X}(i,j)]^T [X(i,j) - \hat{X}(i,j)]] \quad (4.b)$$

다음 그림에  $X(i,j)$  와 필터의 윈도우  $M$  을 도시하였다.

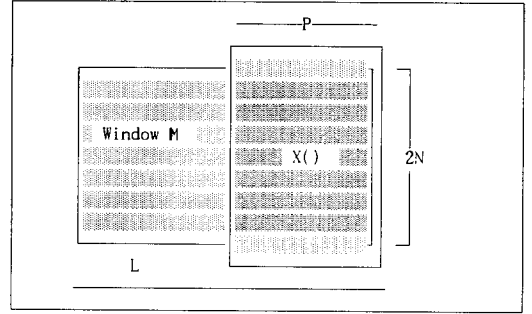


그림 2. 상태변수와 필터의 윈도우

식 (4.a) 에서  $H(k1,k2:L,N)$  는 필터의 임펄스 응답을 나타내고  $L,N$  은 그 윈도우를 나타내게 되는데 앞으로  $H(k1,k2,M)$  이라 나타낸다. 최적필터에서 추정오차와 관측값과의 직교성 정리를 이용하면 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{k1}^M \sum_{k2}^M H(k1,k2:M)P_{ZZ}(i-k1,j-k2) = P_{XZ}(i,j) \quad (4.c)$$

여기에서  $P_{ZZ}$  는 관측값의 자기공분산이고  $P_{XZ}$  는 상태변수와 관측값의 상호공분산이다.

여기서 (4.a) 를 다음과 같이 간략히 표시하자.

$$\hat{X}(i,j) = \sum_{k=0}^L H(k:M)Z(i-k,j) \quad (5.a)$$

$$H(k:M) = [H(k,N:M)H(k,N-1:M), \dots, H(k,-N:M)]$$

$$Z(i-k,j) = [z(i-k,j-N), z(i-k,j-N+1), \dots, z(i-k,j+N)]^T$$

위의 정의에서 관측량이 벡터형태로 바뀌었으므로 시스템 모델의 관측식 (1.b) 를 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다. [9]

$$Z(i,j) = CZ(i,j) + V(i,j) \quad (5.b)$$

**정리 2** : 최적의 2차원 FIR 필터는 다음 식을 만족한다.

$$H(i:M) = P_{XX}(0,0)C^T/\alpha - \sum_{k=0}^L H(k:M)CP_{XX}(i-k,0)C^T/\alpha \quad (6)$$

**증명** : 식 (4.c) 로부터 다음 식들을 얻는다.

$$\sum_{k_1 k_2}^M H(k_1, k_2; M) P_{zz}(i-k_1, N-k_2) = P_{Tz}(i, N)$$

$$\sum_{k_1 k_2}^M H(k_1, k_2; M) P_{zz}(i-k_1, N-1-k_2) = P_{Tz}(i, N-1)$$

$$\sum_{k_1 k_2}^M H(k_1, k_2; M) P_{zz}(i-k_1, -N-k_2) = P_{Tz}(i, -N).$$

위의 식들을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{k=0}^L [H(k, N; M), H(k, N-1; M), \dots, H(k, -N; M)] \cdot \begin{bmatrix} P_{zz}(i-k, 0) & P_{zz}(i-k, -1) & \dots & P_{zz}(i-k, -2N) \\ P_{zz}(i-k, 1) & P_{zz}(i-k, 0) & \dots & P_{zz}(i-k, -2N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{zz}(i-k, 2N) & P_{zz}(i-k, 2N-1) & \dots & P_{zz}(i-k, 0) \end{bmatrix} = [P_{Tz}(i, N), P_{Tz}(i, N-1), \dots, P_{Tz}(i, -M)]. \quad (7)$$

식 (1.b) 를 (7)에 대입하고  $v$  의 백색성을 이용하면 (6) 식이 증명된다.

식 (5) 와 정리 2 는 필터  $H(\dots; M)$  를 역행렬을 구함으로써 유일하게 구할 수 있음을 보여준다. 그러나 이러한 방법은  $(M+P+1)(2N+1)$  차의 역행렬을 구하여야 하므로 너무 계산량의 부담이 크게 된다. 다음 식에서 정리 2 의 필터를 유한 구간에서의 리카티 형태의 방정식으로 쉽게 구할 수 있음을 보인다.

정리 3 : 식 (5) 의 FIR 필터의 임펄스 응답  $H(\dots; M)$  은 다음식의  $H(k; M) = H(k; 1) |l = L$  로서 유일하게 결정된다.

$$H(k; n+1) = [I - U(n+1)C^T C/a] AH(k; n), \quad (0 \leq L-k \leq n < L) \quad (8.a)$$

$$H(k; L-k) = U(L-k)C^T/a \quad (8.b)$$

$$U(n+1) = W(n) - W(n)C^T [a + CW^T]^{-1} CW(n), \quad (-1 \leq n < L) \quad (8.c)$$

$$W(n) = AU(n)A^T + BQB^T \quad (8.d)$$

$$U(-1) = P_{XX}(0, 0) \quad (8.e)$$

증명 :  $H(k; n)$  을 구간  $L-n \leq i \leq L$  에서 구해진 (6) 식의 유일해라고 하자. 즉,

$$H(k; n) = P_{XX}(k-L+n, 0)C^T/a - \sum_{i=L-n}^L H(i; n)CP_{XX}(k-i, 0)C^T/a \quad (9.a)$$

여기서  $U(n)$  을 다음과 같이 정의한다.

$$U(n) = P_{XX}(0, 0) - \sum_{i=L-n}^L H(i; n)CP_{XX}(L-n-i, 0) \quad (9.b)$$

이러한 정의로부터  $H(k; M) = H(k; 1) |l = L$  의 관계가 얻어지고, (8.b) (8.e) 가 자명해진다.

식 (9.a) 로부터,

$$\begin{aligned} H(k; n+1) &= P_{XX}(k-L+n+1, 0)C^T/a \\ &\quad - \sum_{i=L-n-1}^L H(i; n+1)CP_{XX}(k-i, 0)C^T/a \\ &= AP_{XX}(k-L+n, 0)C^T/a - H(L-n-1; n+1)CP_{XX}(k-L+n+1, 0)C^T/a \\ &\quad - \sum_{i=L-n}^L H(i; n+1)CP_{XX}(k-i, 0)C^T/a \\ &= [I - H(L-n-1; n+1)C] AP_{XX}(k-L+n, 0)C^T/a \\ &\quad - \sum_{i=L-n}^L H(i; n+1)CP_{XX}(k-i, 0)C^T/a \quad (9.c) \end{aligned}$$

(9.a) 와 (9.c) 의 제차성 (homogeneous property) 를 이용하면 다음 식을 얻는다.

$$H(k; n+1) = [I - H(L-n-1; n+1)C] AH(k; n+1) \quad (9.d)$$

(9.d) 와 (8.b) 를 이용하면 (8.a) 가 증명된다.

이제  $U(n+1)$  에 관한 식을 이끌어내자. (9.b) 식의  $U$  에 대한 정의로부터,

$$\begin{aligned} U(n+1) &= P_{XX}(0, 0) - \sum_{i=L-n-1}^L H(i; n+1)CP_{XX}(L-n-i-1, 0) \\ &= P_{XX}(0, 0) - H(L-n-1; n+1)CP_{XX}(0, 0) \\ &\quad - \sum_{i=L-n}^L H(i; n+1)CP_{XX}(L-n-i-1, 0) \\ &= P_{XX}(0, 0) - U(n+1)C^T CP_{XX}(0, 0)/a \\ &\quad - \sum_{i=L-n}^L [I - U(n+1)C^T C/a] AH(i; n)CP_{XX}(L-n-i, 0)A^T \\ &= [I - U(n+1)C^T C/a][AP_{XX}(0, 0)A^T + BQB^T] \\ &\quad - \sum_{i=L-n}^L [I - U(n+1)C^T C/a] AH(i; n)CP_{XX}(L-n-i, 0)A^T \\ &= [I - U(n+1)C^T C/a][AU(n)A^T + BQB^T] \end{aligned}$$

위의 결과로 (8.d) 를 얻을 수 있으며 이로서 정리 3 의 모든 것이 증명되었다.

정리 3 에서  $U(L)$  은 FIR 필터의 오차공분산 (error covariance) 이다. 다음의 간단한 계산에서 이를 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
& E\{[X(i,j) - X(i,j)][X(i,j) - X(i,j)]^T\} \\
&= E\{[X(i,j) - X(i,j)][X(i,j)]^T\} \\
&= P_{XX}(0,0) - \sum_{k=0}^L H(k;M)E\{Z(i-k,j)[X(i,j)]^T\} \\
&= P_{XX}(0,0) - \sum_{k=0}^L H(k;M)CP_{XX}(-k,0) = U(L)
\end{aligned}$$

필터의 임펄스 응답을 구하는 정리 3의 계산량은  $M, N, P$ 에 의해서 결정되지만,  $2N = L$ 로 보았을 때 대략  $N^5$  정도의 연산을 필요로 한다. 이는 Levinson 알고리즘보다 훨씬 작은 것이다. [6] 필터의 임펄스 응답이 구해지면 상태변수를 추정하는데  $N^3$  정도의 연산이 필요하게 된다.

## 4. 2차원 FIR 스무더

2차원 FIR 스무더  $G$ 는 상태변수  $X$ 의 추정치  $X$ 와 함께 다음과 같이 정의된다. 여기서 관측구간의 수평방향 길이를  $2M$ 이라고 하고, 추정하고자 하는 상태변수는 그 중앙에 위치한다.

$$X(i-M, j) = \sum_{k_1=0}^{2M} \sum_{k_2=-N}^N G(k_1, k_2; M, N) z(i-k_1, j-k_2) \quad (10.a)$$

스무더의 성능지수는 다음과 같다.

$$J_f = E\{[X(i-M, j) - X(i-M, j)]^T [X(i-M, j) - X(i-M, j)]\} \quad (10.b)$$

다음 그림에  $X(i-M, j)$ 와 스무더의 윈도우  $R$ 을 도시하였다.

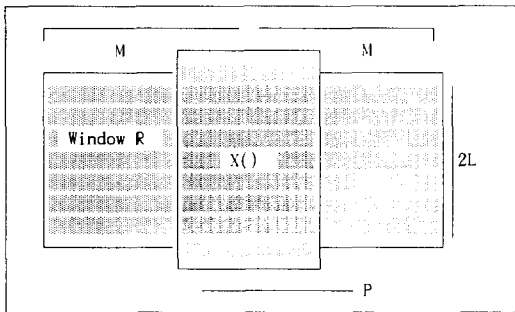


그림 2. 상태변수와 필터의 윈도우

추정오차와 관측값과의 직교성정리를 이용하면 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{k_1, k_2}^R G(k_1, k_2; R) P_{ZZ}(i-k_1, j-k_2) = P_{XZ}(i, j) \quad (10.c)$$

(5.a)와 마찬가지로 (10.a)를 표시할 수 있다.

$$X(i-M, j) = \sum_{k=0}^{2M} G(k; R) Z(i-k, j) \quad (11.a)$$

$$G(k; R) = [G(k, N; R), G(k, N-1; R), \dots, G(k, -N; R)]$$

$$\begin{aligned}
Z(i-k, j) &= [z(i-k, j-N), z(i-k, j-N+1), \dots, z(i-k, j+N)]^T
\end{aligned}$$

정리 4: 최적의 2차원 FIR 스무더는 다음 식을 만족한다.

$$G(i; R) = P_{XX}(i-M, 0)C^T/a - \sum_{k=0}^{2M} G(k; R)CP_{XX}(i-k, 0)C^T/a \quad (12)$$

증명: 정리 2 증명 참조

정리 5: 식 (12)의 FIR 필터의 임펄스 응답  $G(\cdot; R)$ 은 다음식의  $G(k; R) = G(k; 1) | 1 = 2M$ 으로서 유일하게 결정된다.

$$G(k; n+1) = G(k; n) - T(n+1)C^TCAH(k; n)/a \quad (13.a)$$

$(2M-i \leq n \leq 2M)$

$$G(k; 2M-k) = T(2M-k)C^T/a \quad (13.b)$$

$$\begin{aligned}
T(n+1) &= [T(n)A^T + AM^{-n-1}P_{XX}(0,0) - AM^{-n}P_{XX}(0,0)A^T] \\
&\quad [I - C^T(aI + CU(n)C^T)^{-1}CU(n)], \quad (13.c) \\
&\quad (0 \leq n \leq M-1)
\end{aligned}$$

$$= T(n)A^T [I - C^T(aI + CU(n)C^T)^{-1}CU(n)] \quad (13.d)$$

$(M \leq n \leq 2M-1)$

$$T(0) = AMU(0) \quad (13.e)$$

여기서  $U(n) = AU(n)A^T + BQB^T$ 로서 정리 3에서 주어진 것과 동일하다.

증명: 정리 3 증명 참조

정리 5에서  $T(2M)$ 은 공간  $i-M$ 에서 FIR 스무더의 오차와 공간  $i$ 에서 필터의 오차간의 공분산(cross covariance)이다. 다음의 간단한 계산에서 이를 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
& E\{[X(i-M, j) - X_S(i-M, j; R)][X(i, j) - X_F(i, j; R)]^T\} \\
&= E\{[X(i-M, j) - X_S(i-M, j; R)][X(i, j)]^T\} \\
&= P_{XX}(-M, 0) - \sum_{k=0}^{2M} G(k; R)CP_{XX}(-k, 0) = T(2M)
\end{aligned}$$

## 5. 영상복원에서의 응용

2차원 FIR 필터와 스무더의 영상 시스템에서의 응용은 주로 원화상에 가산성 잡음(additive noise)나 임의의 채널을 통한 찌그러짐(blur)이 있을 때 이로부터 원 화상

을 복구하는 문제인 영상복원 (image restoration) 이다. 이러한 영상의 잡음이나 찌그러짐은 다음과 같은 식으로 모델링된다.

$$z(i, j) = \sum_{k_1}^B \sum_{k_2}^B B(k_1, k_2; B) s(i-k_1, j-k_2) + v(i, j) \quad (14)$$

이 식에서  $z$  는 관측값을 뜻하고  $s$  는 원래의 화상을 의미한다. 또한  $B$  는 선형 찌그러짐을 모델링한 것이 되고  $B$  는 그 지원구간 (region of support) 를 나타낸다.  $v$  는 가산성 잡음을 나타내는 것이 된다.

$B$  의 형태에 따라 찌그러짐을 인과성 (causal), 반인과성 (semi-causal), 비인과성 (noncausal) 찌그러짐으로 분류하는데, 영상 시스템에서는 비인과성 찌그러짐이 일반적인 현상으로 나타나고 있다. 또한 비인과성 찌그러짐을 대상으로 하여 문제를 푸는 것은 나머지의 두 모델을 포함하는 것이 되므로 본 논문에서는 이러한 비인과성 찌그러짐을 그 대상으로 하여 FIR 필터와 스무더를 적용하는 문제에 대하여 다루기로 한다. 이 문제는 결국 (14) 식을 (5.b) 식으로 표현함으로써  $s(i, j)$  를 FIR 필터 또는 스무더를 사용하여 추정하는 문제로 변하게 된다. 상태 변수의 차수를  $P$  라 하고 관측구간을  $(2M) \times (2N+1)$ , 찌그러짐의 지원구간을  $(2L+1) \times (2L+1)$  로 잡으면 (5.b) 식으로 표현되기 위하여 다음과 같은 조건을 필요로 한다.

$$(P/2 > N + L) \quad (15)$$

이러한 조건을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

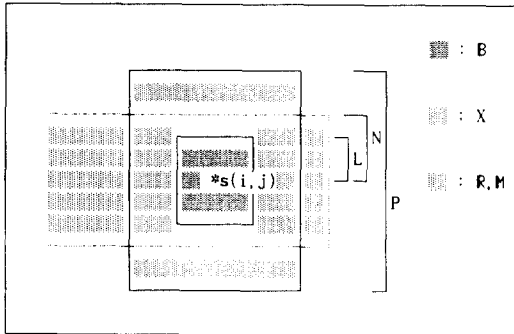


그림 3. 상태변수와 여러 구간과의 조건

(14) 식은  $X$  가  $B$  를 포함하기만 하면 (1.b) 식으로 표현이 된다. (1.b) 의 관측식이 필터나 스무더에 적용되기 위하여,  $Z$  가  $X$  로서 표현되어야 하고 이 조건이 (13) 의 부등식으로 나타난다.

FIR 스무더를 사용하는 것중 하나의 장점은 찌그러짐  $B$  의 특성이 대칭적일 경우  $G$  역시 대칭적 특성을 가지게 되고 [7]. 이것은 주파수 영역에서 중요시되는 위상정보를 보존하는 성질을 가진다. 이것은 신호처리 분야에서 FIR 구조의 중요한 장점 중의 하나이고, 순환형 알고리즘으

로 인하여 IIR 구조를 가지게 되는 칼만 필터와 대비되는 것이다.

## 6. 결론

본 논문에서는 2차원 시스템을 상태공간 모델을 사용하여 2차원 FIR 필터와 스무더를 제안하고, 영상복원에 이를 응용할 수 있음을 보였다. 이러한 결과들은 [8], [9] 의 실험을 통하여 우수한 성능이 확인된바 있고, 칼만 필터를 이용한 영상복원방법 [3] - [5] 과의 비교 실험이 진행 중에 있다. 본 논문의 결과는 2차원 시스템에서 식 (1) 로 나타나는 한쪽 방향의 상태전이만을 이용하여 최적의 2차원 FIR 필터를 설계한 것이므로 엄밀한 의미에서 2차원이라 말하기는 어렵다. 따라서 양쪽방향으로 상태전이를 가지는 상태방정식하에서의 2차원 FIR 필터에 대한 연구가 필요하다.

## 참고 문헌

- [1] R.P. Roessor, "A Discrete State Space Model for Linear Image Processing," *IEEE trans. on A.C.* Vol. AC-20, No.1, pp1-10, Feb. 1975
- [2] J.W. Woods and C.H. Radewan, "Kalman Filtering in Two Dimensions," *IEEE trans. on Info. Theory*, vol. IT-23, No.4, pp473-482, Jul. 1977
- [3] J.W. Woods and V.K. Ingle, "Kalman Filtering in Two Dimensions: Further Results," *IEEE trans. on A.S.S.P.*, vol. ASSP- 29, No.2, pp188-197, Apr. 1981
- [4] Sudhir S. Dikshit, "A Recursive Kalmaan Window Approach to Image Restoration," *IEEE trans on A.S.S.P.* vol. ASSP-30 No.2 pp125-140, Apr. 1982
- [5] M.R. Azimi Sadjadi, P.W. Wong, "Two Dimensional Block Kalman Filtering for Image Restoration," *IEEE trans. on A.S.S.P.*, vol. ASSP-35, No.12, pp1736-1749, Dec. 1987
- [6] O.K. Kwon, W.K. Kwon, K.S. Lee, "FIR Filter and Recursive Forms for Discrete-Time State-Space Models," *Automatica*, vol. 25, No. 5, pp715-728, 1989
- [7] J.Y. Kang, K.S. Lee, "Optimal Linear Phase FIR Filters for 2-D State Space Model with Application to Image Processing," *Proc. of ISI Winter Workshop, Seoul National Univ.* pp106-129, 1990

- [8] 강 중용, "2차원 상태공간 FIR 필터에 관한 연구", 석사학위논문, 서울대학교 제어계측공학과, 1990
- [9] 이 옥현, "번짐이 있는 영상의 복구를 위한 2 차원 FIR 필터의 구현에 관한 연구", 석사학위논문, 서울대학교 제어계측공학과, 1991