

내부힘을 고려한 두 로봇의 최적 부하 분배 문제의 기하학적 접근

° 권웅*, 최명환**, 이범희*, 고명삼*

* 서울대학교 제어계측공학과, 자동화시스템 공동연구소

** 강원대학교 제어계측공학과

Geometrical Approach to Optimal Load Distribution for Two Cooperating Robots Considering Internal Force

° Woong Kwon*, Myoung Hwan Choi**, Bum-Hee Lee*, Myoung Sam Ko*

*Dept. of Control & Instrumentation Eng. Seoul National University

*Automation and Systems Research Institute

**Dept. of Control & Instrumentation Eng. Kang Won university

ABSTRACT : The load distribution problem of two cooperating robots grasping one object is studied. The optimal joint torque needed for the desired motion is obtained by using a new objective function. A new objective function is defined for the minimization of joint torque effort and internal force. The optimal solution can be found by geometrical approach and analysis using the concept of force ellipsoid. Simulation results are presented with 6DOF PUMA robots.

1. 서론

2개의 로봇이 협력작업을 하는 경우는 단일 로봇으로 할 수 없는 많은 일들을 가능하게한다. 이러한 2개의 로봇에 관한 연구에서 중요한 문제는 부하 분배에 관한 문제이다. 부하 분배 문제는 로봇들과 물체의 궤적과 경로(path)가 결정된 상태에서 그 움직임을 발생시키기 위한 각 로봇의 관절 토크를 구하는 것이다.

최적 부하 분배를 위한 목적함수는 여러가지가 있는데 그 중의 하나는 최소 에너지 사용(minimum energy consumption) [4][5] 이다. 부하 분배 문제 해결방법에 있어서의 제한 조건(constraint)에는 마찰 제한 조건(friction constraint) [1] [7], 관절 토크 제한 조건(joint torque constraint) [5], 관절 토크와 마찰에 대한 제한 조건 [3] [4] [8] 등이 있다.

본 논문에서 2개의 로봇이 물체를 잡을 때에는 로봇의 손(end effector)이 물체를 단단히 잡고(grip firmly) 손과 물체사이에는 상대적 운동이 없다고 가정한다 [5] [7].

2. 부하분배문제의 확장

2개의 로봇의 협력 작업 문제, 2개이상의 손가락을 가진 1개의 로봇 작업문제에서 또 하나의 중요한 문제는 내부힘(internal force)의 결정에 관한 문제이다. 내부힘의 정의와 최적 내부힘(optimal internal force)에 대해서는 여러가지 연구결과가 발표되어 있다. Nakamura et al. [1]에 의하면 내부힘은 각 접촉점에서의 힘의 성분(component)중 물체에서 서로 상쇄되고 결과적 운동에 영향을 끼치지 않는 성분을 뜻한다. 그에 의하면 최적 내부힘은 마찰 제한 조건을 만족하면서 최소 크기(minimal norm)를 가지는 내부힘을 말하는데 이러한 내부힘은 정적 마찰(static friction)의 불확실성(uncertainty)과 다양성(variety)에 대처하기 위해

필요하다. 또 최적 내부힘이 최소크기를 가져야 하는 이유에 대해 과대 내부힘(excess internal force)은 깨지기 쉬운 물체를 잡는데 불리하고 접촉점에서의 작은 위치오차가 큰 교란 모멘트(disturbing moment)를 발생시킬 수 있기 때문에 설명한다. Cheng et al. [3]은 접촉점에서의 힘의 수직 성분(normal component)을 최소화하여 최적 내부힘을 구하였다.

본 논문에서의 내부힘은, 각 로봇에 의해 가해지는 2개의 접촉점에서의 힘들을 운동방향을 기준으로 평행한 성분과 수직(orthogonal) 한 성분으로 나누었을 때 그 수직인 성분으로 정의된다. 내부힘의 최적화에 관해서는 여러가지 목적함수가 제시되어 있는데 [1-3], 과대 내부힘의 존재는 운동방향과 관계가 없고 깨지기 쉬운 물체와 탄성이 있는 물체, 변형되기 쉬운 물체를 잡는데 불리하므로 이를 최소화시키는 경향이 많다. 본 논문에서도 새로운 목적함수를 정의하여 내부힘의 최소화를 도모하게 된다.

최적 부하 분배 문제는 힘타원(force ellipsoid)을 사용한 기하학적 접근에 의해서도 해결할 수 있다 [6]. 관절 토크 공간 상에서의 단위구가 직교 좌표 공간의 힘 공간상의 타원으로 변환 될 때 이를 힘 타원이라고 정의한다. 힘 타원의 개념은 협력 작업에서의 최적 부하분배 문제(optimal load distribution)와 별개의 개념으로 인식되어져 왔으나 Choi et al. [6]은 힘 타원의 개념을 이용하여 두 로봇의 최적 부하 분배 문제(optimal distribution)를 기하학적으로 해석하여 해결하였다. 목적 함수는 최소 파워 소비(minimum power consumption)이고 관절 토크의 순간적인 파워의 최대값을 제한 조건으로 사용하였다.

최적 부하 분배 문제에서의 이러한 기하학적 접근의 장점은, 힘 타원의 개념에 의한 기하학적 직관(geometrical insight)을 사용하여 최적화 문제를 해결하므로 여러가지 경우에 대해, 즉 제한 조건이 없는 경우와 있는 경우의 여러가지 경우에 대해 직관적으로 해를 찾을 수 있다는 데에 있다. 한편, 2개의 로봇의 실제 협력 작업에서 발생하는 내부힘의 최소화 문제에 대해서 이러한 방법을 이용한 해결은 본 논문에서의 핵심사항이다.

이상의 최적 부하 분배 문제의 힘 타원을 이용한 기하학적 해결 방법에 덧붙여 본 논문에서는 이러한 방법을 이용하여 내부힘의 최소화와 노력(effort)의 최소화를 동시에 해결할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 노력은 관절토크 크벡터의 노름계급으로 정의한다. 이때 두가지 목적 함수,

즉 노력과 내부힘의 최소화를 위한 목적 함수에 각각 가중치 (weight)를 주어서 새로운 목적 함수를 정의한다. 제한 조건은 관절 토오크의 순간적인 파워의 최대값으로 정하며 제한 조건이 없는 경우와 제한 조건이 있는 경우로 나누어 해결책을 제시한다. [6]에서와 같이 제한 조건은 힘 타원으로 표시하며 이를 통하여 여러가지 기하학적 모습을 해석하여 문제를 해결한다.

3. 부하 분배 문제의 설정

3.1 로봇과 물체의 동역학적 모델링 (Dynamic Modelling)

2개의 로봇이 1개의 물체를 잡는 경우의 내부힘의 최소화 를 고려한 부하 분배 문제는 다음과 같이 공식화된다.

일반적으로 두 로봇의 동역학 방정식 (dynamic equation)은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} 1D(1q)\ddot{1}q + 1H(1q, \dot{1}q) + 1G(1q) &= 1T + (1J(1q))^T 1F \\ 2D(2q)\ddot{2}q + 2H(2q, \dot{2}q) + 2G(2q) &= 2T + (2J(2q))^T 2F \end{aligned} \quad (3.1-1)$$

$1T$ 는 실제 로봇 i 에 가해지는 관절 토오크이고, $-1F$ 는 로봇 i 에 의해 물체에 가해지는 힘 및 모멘트, $(1J(q))^T 1F$ 는 힘 $1F$ 의 토오크 성분이다.

한편 물체에 관해 다음과 같은 방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \times I \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} MG \\ 0 \end{bmatrix} = - (1F + 2F) \quad (3.1-2)$$

이 식에서 M 은 3×3 대각 행렬로서 대각원소는 물체의 질량을 나타낸다. I 는 물체의 관성행렬이고, p 는 관성 좌표계에서 본 물체의 위치 벡터, ω 는 물체의 각속도 벡터, G 는 중력가속도 벡터로서 $G = [0 \ 0 \ g]$ 이다.

(3.1-1)와 (3.1-2)의 좌변을 각각 $1B$, $-2B$ 표시하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (1J)^T 1F + 1T &= 1B \\ (2J)^T 2F + 2T &= 2B \\ 1F + 2F &= F \end{aligned} \quad (3.1-3)$$

로봇이 여유자유도를 가지고 있지 않으면(non-redundant) 자코비안은 정방행렬이고, 자코비안이 특이(singular)하지 않도록 경로를 잡으면 역행렬이 존재하게 되어 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 1f &= (1J)^{-T} 1B - 1F \\ 2f &= (2J)^{-T} 2B - 2F \end{aligned} \quad (3.1-4)$$

(3.1-1), (3.1-2), (3.1-3), (3.1-4)를 결합하고, cf 를 다음과 같이 정의하여 식(3.1-6)을 얻을 수 있다.

$$cf = ((1J)^{-T} 1B + (2J)^{-T} 2B - F) \quad (3.1-5)$$

$$1f + 2f = cf \quad (3.1-6)$$

3.2 노력의 최소화를 위한 목적함수

E 를 두 로봇의 순간적인 노력의 양이라 정의하고, 3.1에서 정의된 $1T$ 를 이용하여 T 를 $T = [1T^T \ 2T^T]^T$ 와 같이 표시한다. 두 로봇의 노력 E 는

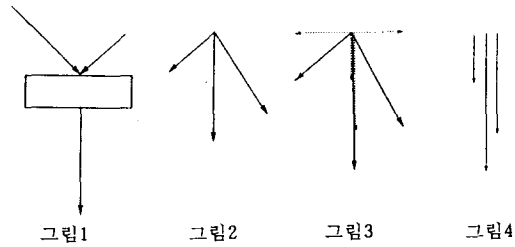
$$E = T^T T = \sum_{j=1}^n (1T_j)^2 + (2T_j)^2 \text{ 와 같다.}$$

단, $1T_j$ 는 로봇 i 의 j 번째 모터의 토오크이다.

이로부터 두 로봇의 노력은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} E &= T^T T = 1T^T 1T + 2T^T 2T \\ &= 1f^T 1A 1f + 2f^T 2A 2f \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

단, 여기서 $1A$ 는 $1J^T 1J$ 를 나타내는 대칭한 행렬이다.



이로부터 최적부하분배 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 표현된다..

$$\begin{aligned} \text{최소화 (minimization)} \quad E &= 1f^T 1A 1f + 2f^T 2A 2f \\ \text{구속 조건 (subject to)} \quad 1f + 2f &= cf \quad (3.2-2) \\ \text{새로운 벡터와 행렬} \quad f &= [1f^T \ 2f^T]^T, \quad Q = \text{diag} \{ 1A, 2A \}, \\ W &= [I \ I] \text{ (단, } I \text{ 는 단위 행렬)} \text{ 을 정의하면} \\ \text{식(3.2-2) 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.} \\ \text{최소화} \quad E &= 1/2 f^T Q f \\ \text{구속 조건} \quad W f &= cf \end{aligned} \quad (3.2-3)$$

3.3 내부힘의 최소화를 위한 목적함수

내부힘에 관한 목적함수를 구하기 위해 우선 다음의 정리를 증명한다.

정리 1) $1F + 2F = F$ 라는 구속 조건을 가질 때 내부힘의 최소화 문제는 $\|1F\|^2 + \|2F\|^2$ 의 최소화 문제로 바꿀 수 있다.

증명) $1F$ 를 F 에 대해서 평행한 성분과 수직인 성분으로 나누어 $1F_x$ 와 $1F_y$ 를 다음과 같이 정의한다. (단, $i=1,2$)

$$\begin{aligned} 1F &= 1F_x + 1F_y \quad \text{단, } 1F_x // F, \quad 1F_y \perp F, \\ 2F &= 2F_x + 2F_y \quad \text{단, } 2F_x // F, \quad 2F_y \perp F, \end{aligned} \quad (3.3-1)$$

이를 그림을 통해서 살펴보자. 그림 1은 물체에 2개의 힘이 가해져 합력 F 를 발생시킴을 보인다. 그림 2에서 이를 문제에 적용하기 쉽도록 변형시켰다. 그림 3에서 각 힘을 수직 성분과 평행 성분으로 나누었다. 그림 4에서 $\|1F\|^2 + \|2F\|^2$ 이 최소화될 때 내부힘이 최소화, 즉 0이 되었음을 볼 수 있다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다. 식 (3.3-1)로부터 다음과 같이 표현가능하다.

$$\begin{aligned} \|1F\|^2 + \|2F\|^2 &= \|1F_x\|^2 + \|2F_x\|^2 + \|1F_y\|^2 + \|2F_y\|^2 \\ &= \|F\|^2 - 2\|F\| \|1F_x\| + 2\|1F_x\|^2 + 2\|1F_y\|^2 \\ &= G(\|1F_x\|, \|1F_y\|) \\ \text{단, } \begin{cases} 1F_x + 2F_x = F \\ 1F_y + 2F_y = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

위와같이 $\|1F_x\|, \|1F_y\|$ 의 함수 G 를 정의하고 이를 다음과 같이 부분 미분 (partial differentiation)하여 주어진 F 와 $1F_x$ 에 관해 G 가 최소값을 가지게 되는 $1F_y$ 를 구하면, 내부힘 $1F_y, 2F_y$ 은 0이 됨을 알 수 있다.

$$\frac{\partial G}{\partial \|1F_y\|} = 4\|1F_y\| = 0 \quad \text{즉 } 1F_y = 0 \quad (3.3-3) \quad \blacksquare$$

정리 (1) 을 이용하여 내부힘의 최소화를 위한 목적 함수를 구한다. 먼저 식 (3.2-4) 를 다음과 같이 재정리하고 새로운 변수 $1F_q$ 를 정의한다.

$$1F_q = 1J^{-T} 1B \quad (3.3-4)$$

$$\begin{aligned} 1F &= 1J^{-T} 1B - 1f = 1F_q - 1f \\ 2F &= 2J^{-T} 2B - 2f = 2F_q - 2f \end{aligned} \quad (3.3-5)$$

이를 이용하여 $\|1F\|^2 + \|2F\|^2$ 를 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \|1F\|^2 + \|2F\|^2 \\ &= \|1F_q - 1f\|^2 + \|2F_q - 2f\|^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1f^T & 2f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1f \\ 2f \end{bmatrix} \\ &\quad - 2 \begin{bmatrix} 1F_q^T & 2F_q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1f \\ 2f \end{bmatrix} + 1F_q^T 1F_q + 2F_q^T 2F_q \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

(3.3-6) 에서 끝의 두항은 상수이므로 $\|1F\|^2 + \|2F\|^2$ 의 최소화 문제는 다음 식의 최소화 문제로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} \text{최소화} & \quad 1/2 f^T I f - b^T f \quad (3.3-7) \\ \text{구속 조건} & \quad 1F + 2F = F \\ & \quad \text{단, } b^T = [1F_q^T \quad 2F_q^T] \end{aligned}$$

식 (3.3-7)이 내부힘의 최소화를 위한 목적 함수이다.

3.4 내부힘을 고려한 최적 부하 분배 문제의 목적 함수

3.2 와 3.3 에서 구한 목적 함수들을 이용하여 노력, 내부힘을 동시에 고려한 목적 함수를 구한다. 각각의 목적 함수에 가중치 (weight) 를 주어서 더한 것을 새로운 목적 함수로 정한다. 이때 가중치의 결정은 실제의 부하 분배 문제 적용시 상황에 맞게 이루어져야 하나 그 이론적 기초는 앞으로의 연구과제가 될 것이다.

본 논문에서 제시하는 새로운 목적 함수는 아래식 (3.4-1) 과 같은 형태로 표현된다.

$$\begin{aligned} & a/2 f^T Q f + (1-a) [1/2 f^T I f - b^T f] \\ &= 1/2 f^T [a Q + (1-a) I] f - (1-a) b^T f \\ &= 1/2 f^T P f - c^T f \quad (3.4-1) \\ & \quad \text{단, } P = a Q + (1-a) I \quad P > 0 \\ & \quad \quad \quad c = (1-a) b \quad 0 \leq a \leq 1 \end{aligned}$$

4. 제한 조건이 없는 경우의 부하 분배 문제의 해.

4.1 해의 결정

3.4에서 구한 목적함수를 다시 정리하여 최적화 문제를 공식화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{최소화(minimization)} & \quad 1/2 f^T P f - c^T f \\ \text{구속조건(subject to)} & \quad W f = c f \quad (4.1-1) \end{aligned}$$

비선형 계획법에서의 최적화기법중, 라그랑제 곱수 (Lagrange Multiplier) 를 이용한 라그랑제 방법 (Lagrange Method) 으로 필요 조건 (necessary condition) 을 구하면 다음과 같다.

$$P f^* + W^T \lambda - c = 0 \quad (4.1-2)$$

$$W f^* - c f = 0 \quad (4.1-3)$$

λ : 라그랑제 곱수 벡터

(4.1-2) 에서 P 와 W 를 대입하여 다시 쓰면

$$\begin{bmatrix} a^1 A + (1-a) I & 0 \\ 0 & a^2 A + (1-a) I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1f^* \\ 2f^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} \lambda - c = 0 \quad (4.1-4)$$

단, $c = [c_1^T \quad c_2^T]^T$

$2f^* = c f - 1f^*$ 를 이용하여 (4.1-4) 를 정리하면 다음과 같다.

$$[a^1 A + 2A + 2(1-a) I] 1f^* = [a^2 A + (1-a) I] c f + c_1 - c_2 \quad (4.1-5)$$

(4.1-5)에서 $a > 0$ 이고 $1-a > 0$, $1A + 2A$ 은 양으로 명확 (positive definite : 이하 A 가 양으로 명확이면 $A > 0$ 으로 간단히 나타내기로 한다.) 이므로 $a(1A + 2A) + 2(1-a)I$ 은 양으로 명확이고, 항상 역행렬이 존재한다.

그러므로 이 문제에서의 최적해 $1f^*$, $2f^*$ 는 항상 다음과 같이 유일하게 존재한다.

$$\begin{aligned} 1f^* &= [a^1 A + 2A + 2(1-a) I]^{-1} [\{ a^2 A + (1-a) I \} c f + c_1 - c_2] \\ 2f^* &= c f - 1f^* \quad (4.1-6) \end{aligned}$$

5. 제한 조건이 있는 경우의 해

최대 관절 토오크의 노음제곱은 물리적으로는 각 관절의 최대토오크에 근사될 수 있으므로 본 논문에서는 최대 관절 토오크의 노음제곱을 제한조건으로 정한다. 이와 같이 하면, 4.에서 구한 해의 제한 조건 만족여부에 따라서 여러가지 경우로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 목적함수와 구속조건을 공간상의 타원으로 나타내어, 직관적으로 여러가지 경우를 알 수 있도록 하였다.

5.1 기하학적 설정

최대 관절 토오크의 노음제곱을 제한 조건으로 하여 나타내면 다음과 같다.

$$1E_{max} = 1T_{max}^T 1T_{max} \geq 1f^T 1J^T 1J 1f = 1f^T 1A 1f \quad (5.1-1)$$

$$2E_{max} = 2T_{max}^T 2T_{max} \geq 2f^T 2J^T 2J 2f = 2f^T 2A 2f \quad (5.1-2)$$

제한조건이 있는 최적화문제는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \text{최소화} & \quad 1/2 f^T P f - c^T f \\ &= a/2 f^T Q f + (1-a) [1/2 f^T I f - b^T f] \\ \text{구속조건} & \quad W f = c f \quad (5.1-3) \\ \text{제한조건} & \quad f^T R f \leq 1E_{max} \quad (5.1-1) \\ & \quad f^T S f \leq 2E_{max} \quad (5.1-2) \end{aligned}$$

$$\text{단, } Q = \begin{bmatrix} 1A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}$$

식(5.1-1)의 목적함수를 구속조건을 이용하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & 1f^T (a/2 1A + (1-a)/2 I) 1f - (1-a) g_1^T 1f \\ &+ 2f^T (a/2 2A + (1-a)/2 I) 2f - (1-a) g_2^T 2f \\ & \quad \text{단, } g = [g_1^T \quad g_2^T]^T \quad (5.1-4) \end{aligned}$$

위 식에서 $a/2 1A + (1-a)/2 I$ 은 양으로 명확이고, 보통 (normal) 이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다[9].

$$a/2 1A + (1-a)/2 I = 1P^T M 1P$$

$$\text{단, } M = \begin{bmatrix} \lambda_1(a/2 1A + (1-a)/2 I) & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n(a/2 1A + (1-a)/2 I) \end{bmatrix}$$

$\lambda_i(A)$: A 행렬의 i번째 고유값(eigen value)

$1P$: $1P$ 의 i번째 행은 $a/2 1A + (1-a)/2 I$ 의 정규화된 (normalized) i번째 고유벡터(eigen vector)

$$1P^T = 1P^{-1} \quad (5.1-5)$$

위 식(5.1-5)을 이용하여 다음의 Lemma A를 증명한다.

[Lemma A]

$$\begin{aligned} & 1f^T (a/2 1A + (1-a)/2 I) 1f - (1-a) g_1^T 1f \\ &= (1P^T f - (1-a)/2 M^{-1} P g_1)^T M (1P^T f - (1-a)/2 M^{-1} P g_1) \\ & \quad - (1-a)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} 1P g_1 \quad (5.1-6) \end{aligned}$$

증명식 (5.1-4)의 우변을 전개하여 좌변을 얻는다.

$$\begin{aligned} & (1P^T f - (1-a)/2 M^{-1} P g_1)^T M (1P^T f - (1-a)/2 M^{-1} P g_1) \\ & \quad - (1-a)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} 1P g_1 \\ &= 1f^T 1P^T M 1P 1f - 1f^T 1P^T M (1-a)/2 M^{-1} 1P g_1 \\ & \quad - (1-a)/2 g_1^T 1P^T M^{-1} M 1P 1f \\ & \quad + (1-a)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} M M^{-1} 1P g_1 \\ & \quad - (1-a)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} 1P g_1 \\ &= 1f^T (a/2 1A + (1-a)/2 I) 1f - (1-a) g_1^T 1f \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lemma A 에 의해 식 (5.1-3)의 목적함수중 $1f$ 에 해당하는 부분은 $1P$ 에 의해 변환(transform)된 공간에서 타원을 나타낼 수 있다.

한편 제한 조건 $f^T R f = 1f^T 1A 1f \leq 1E_{max}$ 를 식 (5.1-6)과 같이 $1P^T f$ 공간상에서 나타내기 위해 식 (5.1-5)을 이용하여 다음을 유도한다.

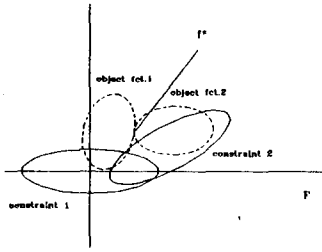


그림5

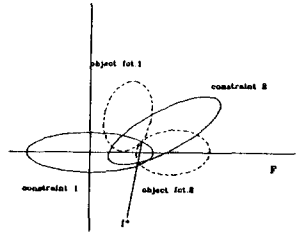


그림6

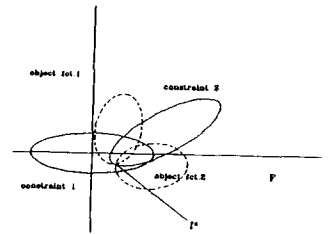


그림7

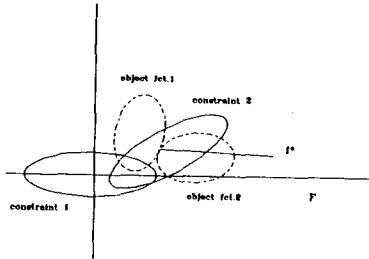


그림8

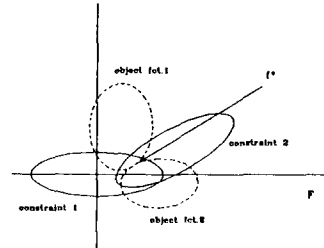


그림9

$$\begin{aligned} {}^1P^T A {}^1P &= ({}^1P^1P)^T {}^1P^1A^1P^T ({}^1P^1P) \\ &= 2/a ({}^1P^1P)^T \{M - (1-\alpha)/2 I\} ({}^1P^1P) \end{aligned} \quad (5.1-7)$$

위 식에서 ${}^1A > 0$ 이므로 ${}^1P^1A^1P^T$ 의 대각원소 (diagonal element) 는 모두 양이고 따라서 식 (5.1-7) 에서 $M - (1-\alpha)/2 I > 0$ 이 되어 식 (5.1-7)의 우변은 ${}^1P^1P$ 공간상의 타원을 나타냄을 알 수 있다.

식 (5.1-1)의 목적함수중 $2f$ 에 해당하는 부분과 제한 조건 $f^T S f \leq 2E_{max}$ 은 Lemma A와 식 (5.1-7)을 이용하여 역시 다음과 같이 $2P^2f$ 공간상의 타원으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} 2f^T (a/2 A + (1-\alpha)/2 I) 2f - (1-\alpha)g_2^T 2f \\ = (2P^2f - (1-\alpha)/2 N^{-1}2P^2g_2)^T N (2P^2f - (1-\alpha)/2 N^{-1}2P^2g_2) \\ - (1-\alpha)^2/4 g_2^T 2P^T N^{-1} 2P g_2 \end{aligned} \quad (5.1-8)$$

$$2f^T A 2f = 2/a (2P^2f)^T \{N - (1-\alpha)/2 I\} (2P^2f) \quad (5.1-9)$$

단, $2P, N$ 은 식(5.1-5)의 ${}^1P, M$ 과 같은 방식으로 정의한다.

이제 식(5.1-6), (5.1-7), (5.1-8), (5.1-9) 을 같은 공간위에 나타낼 수 있도록 $F \equiv 2P^1f$ 를 정의한다. 식 (5.1-6)에 $M = (2P^1P^{-1})^T (2P^1P^{-1})^{-T} M (2P^1P^{-1})^{-1} (2P^1P^{-1})$ 을 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} ({}^1P^1P - (1-\alpha)/2 M^{-1}1P^1g_1)^T (2P^1P^{-1})^T (2P^1P^{-1})^{-T} M \\ (2P^1P^{-1})^{-1} (2P^1P^{-1}) ({}^1P^1P - (1-\alpha)/2 M^{-1}1P^1g_1) \\ - (1-\alpha)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} 1P g_1 \\ = (2P^1P - (1-\alpha)/2 2P^1P^{-1}M^{-1}1P^1g_1)^T (2P^1P^{-1})^{-T} M \\ (2P^1P^{-1})^{-1} (2P^1P - (1-\alpha)/2 2P^1P^{-1}M^{-1}1P^1g_1) \\ - (1-\alpha)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} 1P g_1 \\ = (F - G_1)^T \Sigma (F - G_1) - \zeta_1 \end{aligned} \quad (5.1-10)$$

단, $G_1 \equiv (1-\alpha)/2 2P^1P^{-1}M^{-1}1P^1g_1$

$$\Sigma \equiv (2P^1P^{-1})^{-T} M (2P^1P^{-1})^{-1}$$

$$\zeta_1 \equiv (1-\alpha)^2/4 g_1^T 1P^T M^{-1} 1P g_1$$

식 (5.1-7)에 대해서도 같은 방식을 적용하여 다음 식을 구한다.

$$\begin{aligned} ({}^1P^1P)^T \{M - (1-\alpha)/2 I\} ({}^1P^1P) \\ = F^T \{ \Sigma - (1-\alpha)/2 I \} F \end{aligned} \quad (5.1-11)$$

마찬가지로 하여 $2P^2f = 2P^2cf - 2P^1f = 2P^2cf - F$ 를 이용하면 식 (5.1-8), (5.1-9)에서 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} (2P^2f - (1-\alpha)/2 N^{-1}2P^2g_2)^T N (2P^2f - (1-\alpha)/2 N^{-1}2P^2g_2) \\ - (1-\alpha)^2/4 g_2^T 2P^T N^{-1} 2P g_2 \\ = (2P^2cf - F - G_2)^T \Lambda (2P^2cf - F - G_2) - \zeta_2 \quad (5.1-12) \\ (2P^2f)^T \{N - (1-\alpha)/2 I\} (2P^2f) \\ = (2P^2cf - F)^T \{ \Lambda - (1-\alpha)/2 I \} (2P^2cf - F) \end{aligned} \quad (5.1-13)$$

단, G_2, Λ, ζ_2 은 식(5.1-10)과 같은 방식으로 정의한다.

이와 같이 식(5.1-3)의 목적함수와 제한 조건은 식 (5.1-10), (5.1-11), (5.1-12), (5.1-13)과 같이 같은 공간상의 타원으로 나타낼 수 있다. 그림 5, 6, 7, 8, 9에서 이를 직관적으로 볼 수 있다. 다음 절에서 이를 바탕으로 하여 비선형 최적화 문제에 기하학적 해석을 도입한다.

5.2 기하학적 해석

앞절에서 보인 바와 같이 제한 조건이 있는 경우의 목적 함수는 볼록(convex)이므로 가능한 영역(feasible region) 내에서 최적해가 존재한다면 유일한 점에서 존재할 것이다.

이 경우의 최소화 문제를 해결하기 위해 식(4.1-1)의 제한 조건이 없는 경우의 해가 식(5.1-3)의 두 제한 조건 (5.1-1), (5.1-2)를 만족하는지의 여부에 따라 다음과 같이 여러가지 경우를 나눈다.

[경우1] 해가 (5.1-1), (5.1-2)를 만족하는 경우

[경우2] 해가 (5.1-1), (5.1-2)를 모두 불만족하는 경우

[경우3] 해가 (5.1-1), (5.1-2)중 하나만을 만족하는 경우 이때 각 경우에서 최소화 문제의 해의 존재여부는 다음과 같다.

경우1) 식(5.1-3)의 해는 식(4.1-1)의 해와 일치한다.

경우2) 식(5.1-3)의 해가 식(5.1-1), (5.1-2)를 모두 불만족하는 경우는 그림 5로 나타낼 수 있다. 이 경우에 만약 최소화 문제의 해가 존재한다면 해 f^* 는 (5.1-1), (5.1-2)의 경계(boundary)위에 존재한다. 이에 대한 증명은 Lemma B에 의해 가능하다. 최소화 문제의 해가 존재할 경우, 해를 구하기 위해 다음과 같이 2가지 경우를 설정한다.

경우2-a) $f^{*T} R f^* = 1E_{max}, f^{*T} S f^* \leq 2E_{max}$

경우2-b) $f^{*T} R f^* \leq 1E_{max}, f^{*T} S f^* = 2E_{max}$

경우2-a)는 최적해 f^* 가 제한 조건(5.1-1)의 경계 위에

있는 경우이고, 경우2-b)는 f^* 가 제한 조건(5.1-2)의 경계 위에 있는 경우이다. 경우2-a)와 경우2-b)는 각각 그림 6, 그림 7로 나타낼 수 있다. 이 2가지 경우에 대해서 최소화 문제의 해, 즉 제한 조건이 있는 최적 부하 분배 문제의 최적해 후보(candidate)를 비선형 최적화기법에 의해 각각 구한다. 2가지 경우 모두에 대해 제한 조건을 만족하는 해의 후보가 존재한다면 그중 주어진 목적함수를 더 작게 할 수 있는 것을 최적해로 정한다. 1가지 경우에 대해서만 제한 조건을 만족하는 해의 후보가 존재한다면 그것을 최적해로 정한다. 제한 조건을 만족하는 해의 후보가 어느 경우에도 존재하지 않는다면 이 문제의 최적해는 존재하지 않으므로 궤적계획을 다시 하거나, a 를 다시 결정해야 할 것이다.

경우3) 이 경우는 그림 8에 의해 나타낼 수 있는데 경우 2)와 같은 방식으로 해결이 가능하다.

[Lemma B] 경우2)와 경우3)에서 제한 조건을 만족하는 최적해가 존재한다면 이는 항상 제한 조건(5.1-1), (5.1-2)의 경계 위에 존재한다.

증명) 그림 9와 같이 최적해 f^* 가 (5.1-1), (5.1-2)의 내부에 존재한다고 가정한다. 경우2)와 경우3)은 (5.1-1), (5.1-2)를 고려하지 않고 구한 식(4.2-1)의 해가 (5.1-1), (5.1-2)를 벗어난 경우이므로 f^* 는 (5.1-1), (5.1-2)의 내부에서는 목적함수를 가장 최소화하는 해이지만 식(4.1-1)의 해보다 덜 최적(sub optimal)이다. 그런데 목적함수는 볼록이므로 덜 최적인 f^* 와 식(4.1-1)의 해 사이에 제한조건의 경계가 존재한다면 이 경계 위에 f^* 보다 최적인 점이 존재할 것이다. 이는 f^* 가 제한 조건을 만족하는 최적해라는 가정에 모순이므로 f^* 는 그것이 존재한다면 항상 (5.1-1), (5.1-2)의 경계위에 존재함을 알 수 있다. ■

5.3 제한 조건이 있는 경우의 해를 구하는 방법

이 절에서는 앞 절의 경우2-a), 경우2-b)를 중심으로 하여 해를 구하는 방법을 소개하고, 해의 존재 조건을 구한다. 앞 절의 경우3)의 해도 같은 방식으로 구할 수 있다.

5.3.1 비선형 최적화 해법

식(5.1-1)과 경우2-a)를 결합하여 새로운 구속조건을 가진 최소화문제를 만들면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{최소화} & \quad 1/2 f^T P f - c^T f \\ \text{구속조건} & \quad W f = c f \\ & \quad f^T R f = 1E_{\max} \end{aligned} \quad (5.3-1)$$

식(5.3-1)에서 라그랑제 곱수 방법을 이용하여 다음과 같은 해 f^* 의 필요조건을 유도한다.

$$P f^* + W^T \lambda + \mu R f^* - c = 0 \quad (5.3-2)$$

$$W f^* - c f = 0 \quad (5.3-3)$$

$$f^{*T} R f^* = 1E_{\max} \quad (5.3-4)$$

단, 라그랑제 곱수 벡터 $\lambda \in R^{2 \times 1}$
라그랑제 곱수 $\mu \in R$

식(5.3-2)는

$$(P + \mu R) f^* = -W^T \lambda + c \quad (5.3-5)$$

인데 여기서 $P + \mu R$ 을 다음과 같이 나타내고 $A_1(\mu)$ 와 A_2 를 정의한다.

$$\begin{aligned} P + \mu R &= \begin{bmatrix} (a + \mu)A + (1-a)I & 0 \\ 0 & a^2A + (1-a)I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1(\mu) & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3-6)$$

$P + \mu R$ 의 역행렬을 구하기위해 다음과 같이 가정한다.

$$[\text{가정 1}] \quad \mu \geq -a$$

[가정1]에 따라 $P + \mu R > 0$ 이므로 $P + \mu R$ 의 역행렬이 존재한다. 이제 식(5.3-3), (5.3-5)을 결합하면

$$\begin{aligned} W f^* &= W (P + \mu R)^{-1} (-W^T \lambda + c) \\ &= -W(P + \mu R)^{-1} W^T \lambda + W(P + \mu R)^{-1} c = c f \end{aligned} \quad (5.3-7)$$

인데 $W(P + \mu R)^{-1} W^T = A_1(\mu)^{-1} + A_2^{-1}$ 의 역행렬은 [가정1]에 의해 항상 존재한다. 식(5.3-7)로부터 λ 를 구하면

$$\lambda = [W(P + \mu R)^{-1} W^T]^{-1} [W(P + \mu R)^{-1} c - c f] \quad (5.3-8)$$

이고 이를 식(5.3-5)에 대입하여 최적해 후보 f^* 를 μ 의 함수로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} f^*(\mu) &= (P + \mu R)^{-1} \{ -W^T [W(P + \mu R)^{-1} W^T]^{-1} [W(P + \mu R)^{-1} c - c f] + c \} \\ &= \begin{bmatrix} -[A_1(\mu) + A_2]^{-1} A_2 [A_1(\mu)^{-1} c_1 + A_2^{-1} c_2 - c f] + A_1(\mu)^{-1} c_1 \\ -[A_1(\mu) + A_2]^{-1} A_1(\mu) [A_1(\mu)^{-1} c_1 + A_2^{-1} c_2 - c f] + A_2^{-1} c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -[(a + \mu)A + a^2A + 2(1-a)I]^{-1} [a^2A + (1-a)I] \{ [(a + \mu)A + (1-a)I]^{-1} c_1 + \{ a^2A + (1-a)I \}^{-1} c_2 - c f \} + [(a + \mu)A + (1-a)I]^{-1} c_1 \\ -[(a + \mu)A + a^2A + 2(1-a)I]^{-1} [(a + \mu)A + (1-a)I] \{ [(a + \mu)A + (1-a)I]^{-1} c_1 + \{ a^2A + (1-a)I \}^{-1} c_2 - c f \} + [a^2A + (1-a)I]^{-1} c_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3-9)$$

결정되지 않은 변수 μ 는 구속 조건 (5.3-4)를 이용하여 수치 해석(numerical analysis)적인 방법을 이용하여 구한다.

5.3.2 수치 탐색

μ 의 함수 $g(\mu)$ 를 새로 정의하여 구속 조건(5.3-4)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$g(\mu) = f^*(\mu)^T R f^*(\mu) - 1E_{\max} = 0 \quad (5.3-10)$$

이 비선형 방정식의 해 μ^* 를 구하여 식(5.3-9)에 대입하면 구속 조건을 만족하는 최소화 문제의 최적해의 후보 f^* 를 구할 수 있게 된다.

함수 $g(\mu)$ 를 μ 에 관하여 미분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{dg(\mu)}{d\mu} &= -2[c_1 - c_2 + A_2 c f]^T Q(\mu)^1 A Q(\mu)^1 A Q(\mu) [c_1 - c_2 + A_2 c f] \\ \text{단, } Q(\mu) &= [A_1(\mu) + A_2]^{-1} \end{aligned} \quad (5.3-11)$$

위 식에서 [가정1]에 의해 $Q(\mu) > 0$ 이므로 식(5.3-2)의 값은 항상 0보다 작게 되어 함수 $g(\mu)$ 는 $\mu \geq -a$ 의 범위에서 단조 감소(monotonously decreasing)하게 된다. 이제 다음과 같은 가정을 한다.

[가정2] $g(-a) \geq 0$

식(5.3-10)에 의해 구해진 f^* 가 [가정2]를 만족하는 경우 식(5.3-11)의 비선형 방정식의 해 μ^* 는 수치탐색 방법(numerical search method)을 이용하여 구할 수 있다. f^* 가 [가정2]를 만족하지 않는 경우에는 $1E_{\max}$ 의 값을 충분히 줄이거나 가중치 a 의 값을 변경한다. 그래도 만족하지 않는 경우는 해를 구할 수 없으므로 궤적계획을 변경해야 한다.

5.3.3 최적해의 결정

이와 같이 하여 구한 f^* 는 경우2-a)의 두번째 제한 조건 $f^{*T} S f^* \leq 2E_{\max}$ 를 만족할 경우에만 최적해의 후보로 결정한다. 경우2-a)와 경우2-b)에서 모두 최적해의 후보가 구해지면 그중 목적함수를 더 작게 하는 것을 최소화 문제의 최적해로 결정한다. 한 경우에 대해서만 후보가 구해지면 그것을 최적해로 결정하고, 후보가 구해지지 않으면 최적해를 구할 수 없으므로 $1E_{\max}$, $2E_{\max}$ 의 값을 충분히 줄이거나 가중치 a 의 값을 변경하고, 그래도 구할 수 없을 경우는 궤적계획을 변경해야 한다.

6. 시뮬레이션

2대의 PUMA560 ROBOT 의 협력 작업에서의 내부힘을 고려한 최적 부하 분배의 해결을 시뮬레이션한다. PUMA560 ROBOT의 동역학적 특성(Dynamic characteristics)은 [10]을 참조하였다. 그림 10은 시뮬레이션에 쓰인 PUMA 로봇들의 위치를 나타낸다. 물체의 경로는 다음과 같이 2가지이다. 단, 좌표는 관성좌표계 (x,y,z)에서의 값이다.

경로1: (0, 400, 400) → (0, 400, 300)

경로2: (-100, 400, 400) → (100, 500, 300)

그림 11과 그림 12는 경로1에서 가중치 α 의 변화에 따른 노력소비의 변화와 내부힘 성분의 변화이다. 그림 13은 ${}^1E_{max}=250, {}^2E_{max}=300$ 일때 경로1의 초기에 [경우3]과 같이 해가 제한조건(5.1-2)만을 만족하므로 경우2-a), 경우2-b)를 풀어 경우2-a)에서 최적해를 구한 것을 나타낸다. 그림 14는 경로2에서 ${}^1E_{max}=2E_{max}=285$ 일때 역시 [경우3]에 해당되어 경우2-a)에서 최적해를 구한 것을 나타낸다.

7. 결론

본 논문에서는 노력과 내부힘을 최소화하기 위한 부하분배 문제를 정의하였다. 힘타원의 개념을 이용한 기하학적 접근방법으로, 그 해를 구하고 최대 관절 토크의 노출 계급에 제한이 있는 경우와 없는 경우로 나누어 이를 해결하였다.

노력과 내부힘사이의 가중치의 결정은 앞으로의 연구과제로서 적당할 것이다.

시뮬레이션에서는 협력작업에 실제로 많이 쓰이는 6축 PUMA 로봇을 이용하였다.

참고 문헌

- [1] Y. Nakamura, K. Nagai, T. Yoshikawa, "Mechanics of coordinative Manipulation By Multiple Robotic Mechanisms," Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp.991-998, Raleigh, NC, 1987
- [2] J. Kerr and B. Roth, "Analysis of Multifingered Hands," International Journal of Robotics Research, Vol. 4, 4, pp.3-17, 1986
- [3] F.T. Cheng and D.E. Orin, "Optimal Force Distribution in Multiple Chain Robotic Systems," IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, Vol. 21, No. 1, pp. 13-24, Jan/Feb, 1991
- [4] D.E. Orin and S.Y. Oh, "Control of Force Distribution in Robotic Mechanisms Containing Closed Kinematic Chains," ASME J. of Dyn. Sys. Meas. Control, Vol. 102, pp. 134-141, 1981
- [5] J.Y.S. Luh and Y.F. Zheng, "Load Distribution Between Two Coordinating Robots by Nonlinear Programming," 1988 American Control Conference, pp. 479-482, 1988
- [6] Myung Hwan Choi, Bum Hee Lee and Myoung Sam Ko, "An Application of the Force Ellipsoid to the Optimal Load Distribution of a Dual Robot Arm Holding a Single Object", SICE 91, Japan, 1991
- [7] C.A. Klein and S. Kittivatcharapong, "Optimal Force Distribution for the Legs of a Walking Machine with Friction Cone Constraints", IEEE Trans. Robotics and Automation, Vol. 6, No. 1, pp. 73-85, Feb., 1990
- [8] F.T. Cheng and D.E. Orin, "Efficient Algorithm for Optimal Force Distribution in Multiple-Chain Robotic Systems - The Compact Dual LP Method", Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, pp.943-950, Scottsdale, AZ, 1989

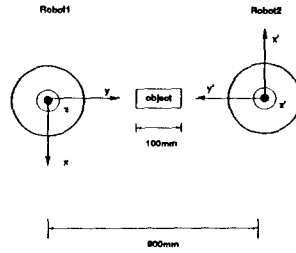


그림10

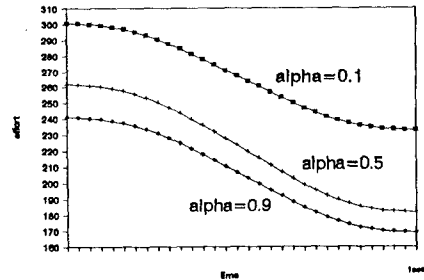


그림11

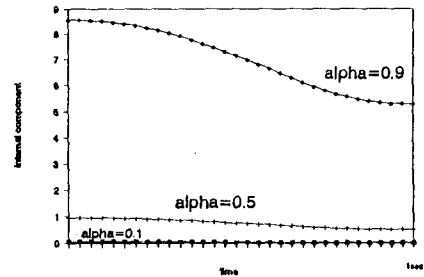


그림12

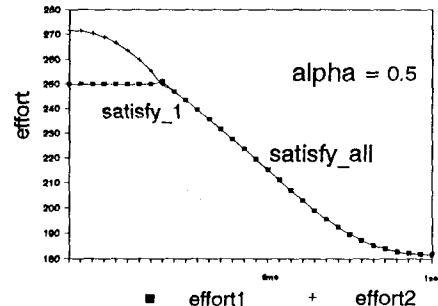


그림13

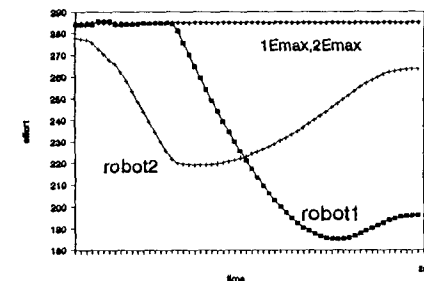


그림14

- [9] Ben Noble and James W. Daniel, "APPLIED LINEAR ALGEBRA", 3rd ed. PRENTICE HALL
- [10] B. Armstrong, O. Khatib, Joel Burdick, "The Explicit Dynamic Model and Inertial Parameters of the PUMA 560 Arm", IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation pp. 510-518, San Francisco, California, 1986