

# 불어내기식 풍동의 정체실 압력제어 시스템 모델링

◦김영준, 권정태

국방과학연구소

## Mathematical Modeling Study for the Stagnation Pressure Control System of the Blow-down Type Wind Tunnel

Young Joon Kim, Jung Tai Kwon

Agency for Defense Development

### Abstract

A mathematical model of the blow-down type wind tunnel is developed in order to design the controller which controls the stagnation pressure being used to obtain the setpoint Mach Number. The motion of compressible fluids in the tunnel is modeled using the one-dimensional gasdynamics. The time responses of the wind tunnel states, such as pressures, mass flow rates, and valve open area, are investigated by digital computer simulation. By the simulation study it is shown that the real blow-down type wind tunnel can be simulated by the obtained mathematical model.

### 기 호

- |                            |               |                   |            |
|----------------------------|---------------|-------------------|------------|
| a                          | : 음속          | A                 | : 면적       |
| $C_A$                      | : 제어밸브 유량계수   | $C_p, C_v$        | : 비열       |
| $C_S$                      | : 서어보밸브 크기 계수 | $e(t)$            | : 오차신호     |
| h                          | : 엔탈피         | i                 | : 제어신호     |
| $K_p, K_i, K_d$            | : PID 계수      | M                 | : 마하수      |
| $\dot{m}$                  | : 질량 유량을      | n                 | : 폴리트로픽 상수 |
| P                          | : 풍동 내의 각 압력  | $P_L = P_1 - P_2$ | : 부하 압력    |
| $Q_L = Q_1 - Q_2$          | : 부하 유량       | R                 | : 기체상수     |
| T                          | : 온도          | U                 | : 속도       |
| V                          | : 체적          | $X_p$             | : 피스톤 이동거리 |
| x                          | : 제어밸브 개도     | $\rho$            | : 밀도       |
| $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ | : 비열비         |                   |            |
- 
- |     |          |   |       |
|-----|----------|---|-------|
| 첨 자 |          | 0 | : 정체실 |
| T   | : 공기저장탱크 | * | : 노즐목 |
| V   | : 제어 밸브  |   |       |
| atm | : 대기압    |   |       |

### 1. 서 론

풍동은 제어된 조건을 갖는 공기 흐름을 제공해 주는 장치로서, 비행체등의 공기 역학적 특성을 추측하기 위하여 사용되고 있다. 고속풍동이란 공기의 흐름이 압축성 유체 효과를 갖게되는 유속에서 작동하는 풍동을 말하며 일반적으로 마하속도 0.5 이상의 유속을 고속(high speed) 이라고 한다.[1] 이러한 고속풍동은 연속적(continuous) 풍동과 간헐적(intermittent) 풍동으로 구분할 수 있는데, 본 연구에서 사용한 불어내기식(blow-down type) 풍동은 간헐적 풍동의 한 종류이다. 불어내기식 풍동의 개략도를 Fig. 1 에 도시하였으며 기본적으로 압축기, 공기저장탱크, 정체실, 노즐, 시험부, 확산부등으로 구성되어 있다. 작동원리는 공기저장탱크에 저장되어 있는 압축공기가 공기유량제어밸브(앞으로 제어밸브라 약칭함)를 통하여 정체실에 유입되며, 정체실의 압력은 제어 밸브의 개도에 의하여 변화되게 된다. 정체실에 유입된 공기는 노즐을 통하여 시험부로 흐르게 되며, 노즐의 형상에 따라 시험부의 마하속도가 결정이 된다. 시험부에 유입된 공기는 확산부를 통하여 대기중으로 방출된다. 따라서 시험부에서 원하는 마하속도를 얻기 위해서는 노즐의 형상을 설정한 후, 정체실의 압력을 미리 계산 되어진 압력까지 높여 일정하게 유지시켜 주어야 한다.

본 연구의 목적은 정체실의 압력을 제어하기 위한 정체실 압력 제어 시스템을 수학적으로 모델링 하는 것이다. 정체실 압력 제어 시스템의 모델링은 압축성 공기역학에 근거한 공기역학(aerodynamic) 모델링과, 제어 밸브를 구동하기 위한 제어 시스템 모델링으로 대별할 수 있다. 본 연구에서는 공기역학 모델링에 주 관점을 두었으며 공기의

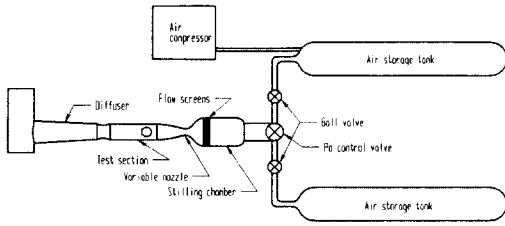


Fig. 1 Schematic of a Blow-Down Type Wind Tunnel

유동을 기하학적인 일차원 유동으로 가정하여 각 보존법칙들에 근거하여 비선형 지배 방정식들을 구하였다. 제어 시스템은 제어기, 밸브 작동장치, 제어 밸브 등으로 구성이 된다. 여기서 밸브 작동장치는 전기식, 유압식, 공압식 등이 있으나 본 연구에서는 일반적으로 많이 사용하고 있는 서어보밸브와 유압 실린더로 구성된 유압식 작동장치를 사용하였다.

모델링된 풍동의 응답 특성을 고찰하기 위하여 풍동 정체실 압력 제어부의 디지털 컴퓨터 시뮬레이션을 실시하였다. 정체실 압력 제어기로서 PID 제어기를 구성하여 풍동 각 상태(state)의 시간 응답 특성을 고찰하였다. 적분 방법은 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하였으며 적분시간은 0.1 ms, 배정도(double precision)로 시뮬레이션 하였다.

## 2. 수학적 모델링

불어내기식 풍동의 정체실 압력을 제어하기 위하여, 정체실 압력제어 시스템 수학적 비선형 모델을 구하였다. 이때 공기저장탱크와 정체실의 두 검사 체적(control volume)을 선택하였고, 모델링 과정에서의 가정은

1. 유동은 기하학적으로 일차원이며, 각 검사 체적 내에서 온도, 압력, 밀도의 분포는 연속적(continuous)이고 균일(uniform) 하다.
2. 공기저장탱크에서 정체실로의 유동은 폴리트로픽(polytropic) 과정으로 가정하고 정체실에서 노즐로의 유동은 등엔트로피 과정으로 가정한다.

여기서 공기저장탱크에서 정체실로의 유동은 일반적인 불어내기식 풍동의 경우 풍동 작동중 공기저장탱크 내의 공기가 급작스러운 단열팽창에 의해 온도가 급격하게 하락하게 되므로 이를 방지하기 위하여 공기저장탱크 내에 열질량(thermal mass)을 사용하여 공기가 열을 흡수하기 때문에 폴리트로픽 과정으로 가정하였다.

### 2.1 공기저장탱크에서의 모델 방정식

질량보존의 법칙과 위의 가정 1.로부터 공기저장탱크에서의 질량 감소율은 제어밸브를 통과하는 질량 유출과 같으므로 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$V_T \frac{d\rho_T}{dt} = -\dot{m}_v \quad \text{----- (1)}$$

따라서

$$\frac{d\rho_T}{dt} = -\frac{1}{V_T} \dot{m}_v \quad \text{----- (2)}$$

여기서  $\dot{m}_v$  는 제어밸브를 통과하는 질량유량율이며, 압축성 유체의 흐름에서 가능한 최대 질량 유량율은 흐름의 목(throat)에서 임계(음속) 조건이 될때 발생하게 된다. 이때 흐름은 초킹(choking) 되었다고 하고 목의 면적이 넓어지지 않는 한 더 이상의 추가 질량 유량은 없게된다.[1,2] 이 임계조건은 등엔트로피 과정의 경우 식(3)과 같다.[2]

$$\frac{P}{P_T} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.5283 \quad \text{----- (3)}$$

이 조건은 일반적으로 압력차가 존재하는 목의 흐름에서 만족하게 되는 조건이므로 에너지 방정식으로부터

$$c_p T_T = c_p T + \frac{1}{2} U^2 \quad \text{----- (4)}$$

$$\frac{T_T}{T} = 1 + \frac{U^2}{2c_p T} \quad \text{----- (5)}$$

여기서  $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$  ,  $a_0 = \sqrt{\gamma R T}$  이므로

$$c_p T = \frac{\gamma R}{\gamma-1} T = \frac{a^2}{\gamma-1} \quad \text{----- (6)}$$

따라서

$$\frac{T_T}{T} = 1 + \frac{U^2(\gamma-1)}{2a^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \quad \text{---- (7)}$$

여기서  $M = \frac{U}{a}$  : 마하수

임계조건인 경우  $M=1$  이므로

$$\frac{T^*}{T_T} = \frac{2}{\gamma+1} \quad \text{----- (8)}$$

$$\frac{P^*}{P_T} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{----- (9)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_T} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{---- (10)}$$

따라서 밸브를 통과하는 제어 유량은

$$\dot{m}_v = \rho^* A^* U^*, \quad A^* = A_v, \quad U^* = a^* = a_T \left( \frac{T^*}{T_T} \right)^{1/2}$$

이므로 식(7)~(10)으로부터 다음 식(11)을 구할 수 있다.

$$\dot{m}_v = \gamma^{1/2} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \right\}^{1/2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{P_T A_v}{\sqrt{RT_T}} \quad (11)$$

여기서  $A_v$ 는 제어밸브의 열림 면적이며 제어밸브의 종류에 따라 제어입력에 대한 열림면적의 함수가 달라지게 된다. 본 연구에 사용한 제어 밸브의 개략도는 Fig. 2에 나타나 있으며, 이 제어밸브의 경우 밸브 위치에 대한 열림면적을 계산하면 식(12)를 얻을 수 있다.

$$A_v = 108 C_A \left[ \frac{x}{2} \sqrt{D^2 - x^2} + \frac{D}{2} \sin^{-1} \left\{ \frac{x}{D} \right\} \right] \quad (12)$$

여기서  $C_A$ 는 유량계수(discharge coeff.)로써 본 제어밸브의 경우  $C_A \approx 0.85$ 을 사용할 수 있다.[3]

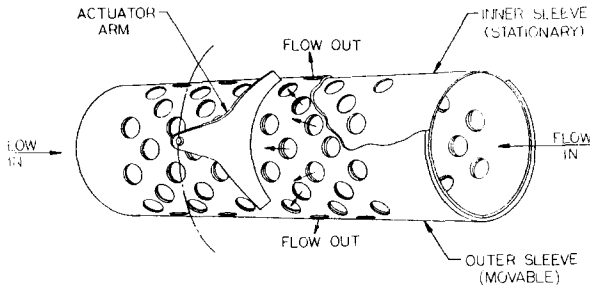


Fig. 2 Schematic of a Perforated Sleeve Control Valve

공기저장탱크의 압력 변화는 폴리트로픽 과정으로 가정하였으므로 다음의 관계식(13)으로부터 구할 수 있다.

$$\frac{\rho_T}{\rho_{Ti}} = \left( \frac{P_T}{P_{Ti}} \right)^{1/n} \quad (13)$$

여기서  $\rho_{Ti}$ 와  $P_{Ti}$ 는 각각  $\rho_T$ 와  $P_T$ 의 초기값이다. 식(13)의 양변을 미분하면

$$\frac{1}{\rho_{Ti}} \frac{d\rho_T}{dt} = \frac{1}{nP_T} \left( \frac{P_T}{P_{Ti}} \right)^{1/n} \frac{dP_T}{dt} \quad (14)$$

따라서 (2), (13), (14)로부터

$$\frac{dP_T}{dt} = \frac{nP_T}{\rho_T} \frac{d\rho_T}{dt} = - \frac{nP_T}{\rho_T V_T} \dot{m}_v \quad (15)$$

유사한 과정을 통하여

$$\frac{dT_T}{dt} = - \frac{(n-1)T_T}{\rho_T V_T} \dot{m}_v \quad (16)$$

## 2.2 정체실에서의 모델 방정식

공기저장탱크와 연결되어 있는 제어밸브로부터 정체실로 공기가 유입되며 이 공기는 노즐을 통하여 시험부로 유출되게 된다. 따라서 질량 보존의 법칙으로부터 정체실 내의 질량 변화율은 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{m}_o = V_o \frac{d\rho_o}{dt} = \dot{m}_v - \dot{m}^* \quad (17)$$

따라서

$$\frac{d\rho_o}{dt} = \frac{1}{V_o} (\dot{m}_v - \dot{m}^*) \quad (18)$$

여기서  $\dot{m}^*$ 은 노즐을 통과하는 질량 유량율이며,

$$\frac{P^*}{P_o} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{인 경우 흐름이 초음속이므로}$$

식(4)~(11)과 같은 과정을 통하여 다음 식(19)를 얻을 수 있다.

$$\dot{m}^* = \gamma^{1/2} \left\{ \frac{2}{\gamma+1} \right\}^{1/2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \frac{P_o A^*}{\sqrt{RT_o}} \quad (19)$$

여기서  $A^*$ 는 노즐 목 면적으로서 식(20)과 같이 구할 수 있다.[2]

$$A^* = A_{TM} \left[ \frac{\gamma+1}{2 + (\gamma-1)M^2} \right]^{1/2} \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \quad (20)$$

에너지 보존 법칙으로부터 정체실의 에너지의 변화율은 제어밸브를 통하여 정체실로 들어오는 에너지의 변화율과 노즐을 빠져나가는 에너지의 변화율을 고려함으로써 구할 수 있다. 따라서 정체실 내부의 엔탈피의 변화율은

$$\begin{aligned} \frac{dH_o}{dt} &= \frac{d}{dt} (m_v h_T) - \frac{d}{dt} (m^* h_o) \\ &= \dot{m}_v h_T + m_v \dot{h}_T - \dot{m}^* h_o - m^* \dot{h}_o \end{aligned} \quad (21)$$

$$h_T = c_p T_T \quad \text{이므로} \quad \frac{dT_T}{dt} \text{는 식(16)이므로}$$

$$\frac{dH_o}{dt} = \dot{m}_v c_p T_T \left[ 1 - \frac{(n-1)m_v}{\rho_T V_T} \right] - c_p [\dot{m}^* T_o + m^* \frac{dT_o}{dt}] \quad (22)$$

또한

$$\frac{dH_o}{dt} = \frac{d(m_o c_p T_o)}{dt}$$

$$= \frac{dm_o}{dt} c_p T_o + m_o c_p \frac{dT_o}{dt} \quad \text{----- (23)}$$

식(22)와 (23)으로부터

$$\frac{dT_o}{dt} = \frac{m_v T_o}{m_o + m_*} \left[ \frac{T_T}{T_o} \left\{ 1 - \frac{(n-1)m_v}{\rho_T V_T} \right\} - 1 \right]$$

----- (24)

상태 방정식  $P_o = \rho_o R T_o$  로 부터

$$\frac{dP_o}{dt} = \frac{d\rho_o}{dt} R T_o + \rho_o R \frac{dT_o}{dt}$$

$$= \frac{R T_o}{V_o} (\dot{m}_v - \dot{m}_*) + \frac{\rho_o R T_o}{m_o + m_*} \dot{m}_v \left[ \frac{T_T}{T_o} \left\{ 1 - \frac{(n-1)m_v}{\rho_T V_T} \right\} - 1 \right]$$

$$= \frac{P_o}{\rho_T V_T + m_*} \left[ \frac{T_T}{T_o} \left\{ 1 - \frac{(n-1)m_v}{\rho_T V_T} \right\} \dot{m}_v - \dot{m}_* + \frac{m_*}{\rho_o V_o} (\dot{m}_v - \dot{m}_*) \right]$$

----- (25)

이상의 수학적 유도 과정을 통하여 불어내기식 풍동의 유동 특성을 기술할 수 있는 방정식을 유도하였다.

### 2.3 제어기 설계

식(12)의 압력 제어 밸브의 개도  $x$  를 제어함으로써, 제어 밸브를 통과하는 질량유량을  $\dot{m}_v$  (식 (11)) 를 제어할 수 있으며, 이로써 정제실의 압력  $P_o$  를 제어할 수 있게 된다. 따라서 본절에서는 개도  $x$  를 제어하기 위한 PID 제어 알고리즘과 서어보 밸브와 유압 실린더를 이용한 유압 작동기에 대한 모델링에 대하여 기술한다. 먼저 PID 제어기는 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$i(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^T e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (26)$$

여기서  $e(t) = P_{ref} - P_o$  : 오차신호

$i(t)$  는 제어 입력 [mA] 이다.

유압 작동기에 대한 개략도는 Fig. 3 에 나타나 있으며 이에 대한 모델링 결과는 다음과 같다. [5]

서어보 밸브의 유량 방정식은

$$Q_L = C_s i \sqrt{P_s - P_L} \quad \text{----- (27)}$$

서어보 밸브의 동특성은 일반적으로 유압 작동 장치의 동특성에 비하여 매우 빠르므로 서어보 밸브의 동특성은 상

수로 가정한다. 유압 실린더내의 연속 방정식으로부터

$$Q_L = A_p \dot{x}_p + C_{tp} P_L + \frac{V_{nt}}{4\beta_e} \dot{P}_L \quad \text{----- (28)}$$

여기서  $C_{tp} = C_{ip} + \frac{C_{ep}}{2}$  : 흡누설 유량계수

$V_{nt}$  : 유효 체적

$\beta_e$  : 유효 체적 탄성 계수

실린더에서의 힘에 대한 관계식으로부터 식(29)를 구할 수 있다.

$$A_p P_L = M_t \dot{x}_p + B_p \dot{x}_p + F_L \quad \text{----- (29)}$$

여기서  $M_t$  : 총질량

$B_p$  : 점성감쇠계수

$F_L$  : 외력

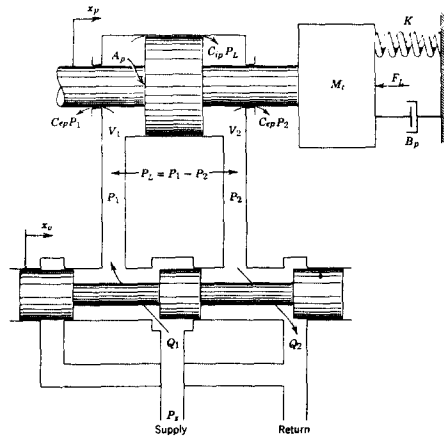


Fig. 3 Schematic of a Hydraulic System

제어 밸브(Fig. 2)와 실린더(Fig. 3)가 결합되어 있는 경우 Fig. 2 에서 보는 바와 같이 제어 밸브의 개도는 실린더의 이동거리와 거의 선형적 관계에 있음을 알 수 있으므로 제어 밸브의 개도는 식(30)과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_p = r x \quad \text{----- (30)}$$

여기서  $r$ 은 상수로서 레버의 비율 나타낸다.

### 3. 시뮬레이션 및 결과 고찰

2장에서 구한 풍동 정체실 압력 제어부 모델의 타당성을 보이기 위하여 PID 제어를 구성하여 풍동 각부의 시간 응답을 구하기 위한 시뮬레이션을 실시하여 각 응답 특성을 고찰하였다. 본 시뮬레이션의 목적은 제어기의 응답 특성을 보여 주기위한 것이 아니라 모델링 되어진 정체실 압력 제어부의 각 상태 값들이 물리적인 타당성을 보여주고 있는지를 검토하기 위한 것이다. 적분 방법은 4차 Runge-Kutta 방법을 사용하였으며 적분시간은 0.1 ms, 배정도(double precision)로 시뮬레이션 하였다.

Fig. 4, Fig. 5, Fig. 6은 각각 마하수가 0.7, 2.6, 4.0 인 경우의 시간 응답 특성에 대한 그림이다. 각 마하수를 얻기 위한 정체실의 기준압력은 각각 1.7, 3.75, 12.6 bar 이다. 각 그림에서의 a) 는 공기 저장 탱크와 정체실 에서의 압력 변화를 나타낸 그림이며, b) 는 제어 밸브를 통하여 정체실로 유입되는 질량유량율과 노즐을 통하여 시험부로 유출되는 질량유량율의 시간에 따른 변화이고, c) 는 제어 밸브의 개도 면적이며, d) 는 공기 저장 탱크와 정체실에서의 온도 변화를 나타낸 그림이다. 정체실의 압력 제어를 위하여 사용한 제어입력은 0~2 초 구간에서는 경사, 그외 구간에서는 계단인 제어입력을 사용하였다. PID제어기는 이 제어입력을 추종하도록 설계하였으며, 각 그림에서 보는 바와 같이 정체실 압력이 제어입력을 잘 추종하고 있음을 알 수 있다. 공기저장탱크의 초기 압력은 일반적인 불어내기식 풍동의 탱크 압력인 35 bar 를 사용하였고, 정체실의 초기압력은 대기압을 사용하였다. 공기저장탱크의 초기온도는 30 °C, 정체실의 초기 온도는 20 °C 를 사용하였다. 그림에서 보는 바와 같이 초기 약 2 초간이 과도응답상태로서 정체실의 압력이 기준압력에 도달하는 구간이다. 공기저장탱크의 압력 변화나 질량 유량율, 제어밸브 열림면적, 온도변화들이 실제현상과 유사하게 변화하고 있음을 보여주고 있다. 따라서 구해진 정체실 압력제어부의 수학적 모델은 실제로 다른 풍동에도 적용할 수 있음을 알 수 있다.

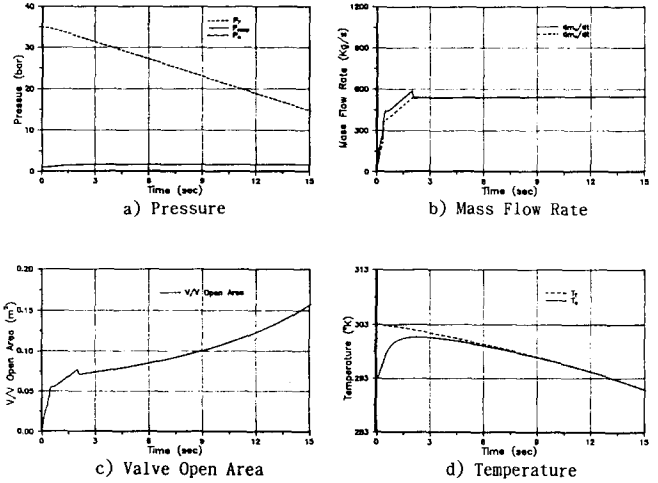


Fig. 4 Time Responses of Wind Tunnel Charateristics (M=0.7)

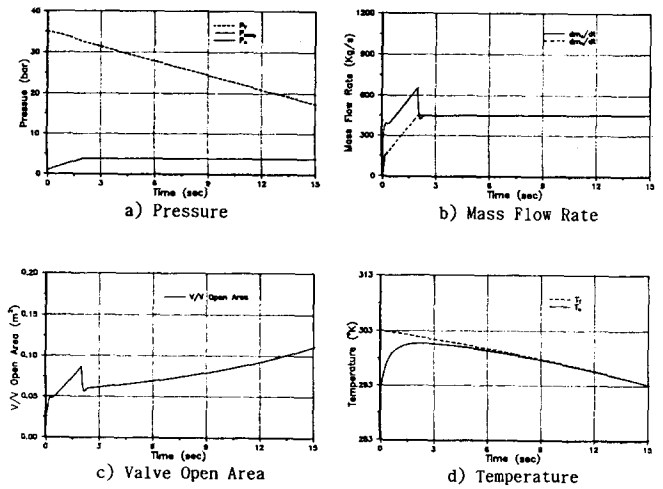


Fig. 5 Time Responses of Wind Tunnel Charateristics (M=2.6)

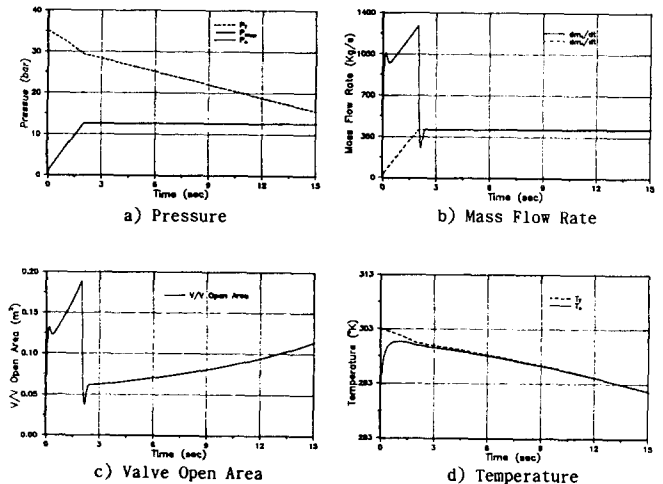


Fig. 6 Time Responses of Wind Tunnel Charateristics (M=4.0)

#### 4. 요약

본 연구에서는 정체실의 압력을 제어하기 위한 정체실 압력 제어 시스템을 수학적으로 모델링하였다. 불어내기식 풍동의 공기역학적 모델링 과정에 주 관점을 두었으며 공기의 유동을 기하학적인 일차원 유동으로 가정하여 각 보존법칙들에 근거하여 비선형 지배 방정식들을 구하였다. 구해진 수학적 모델을 이용하여 시뮬레이션을 실시하였으며, 구해진 수학적 모델이 물리적인 타당성이 있는 응답 특성을 보여줄 수 있었다. 추후 풍동 제어기 설계에 관한 연구와 실제 시스템에 실현하는 연구, 실험 결과와의 비교 연구 등의 추가적인 연구가 요망된다.

#### Reference

1. A. Pope, K.L. Goin, "High-Speed Wind Tunnel Testing", 1965, John Wiley & Sons.
2. F.M. White, "Fluid Dynamics", 1979, McGraw-Hill
3. B.W. Andersen, "The Analysis & Design of Pnenmatic System", 1967, John Wiley & Sons.
4. Y.T. Fung, G.S. Settles, A.Ray, "Microprocessor Control of High-Speed Wind Tunnel Stagnation Pressure", AIAA, 1988, pp429~435.
5. H.E. Merritt, "Hydraulic Control Systems", 1967, John Wiley & Sons