

입력제한이 있는 경우의 예측제어

지규인

건국대학교 공과대학 전자공학과

Predictive Control with Input Constraints

Gyu-In Jee

Dept. of Electronics Engineering, KonKuk University

Abstract

In this paper, we derive the optimal input-constrained control law which minimizes predictive control objective function subject to input constraints. In order to obtain the closed form of control law, three suboptimal methods are proposed and evaluated by simulation.

1 서론

실제 시스템에서 시스템의 입력은 종종 제한된다. 시스템을 구동 시키도록 계산된 제어기 출력은 구동기의 물리적인 제약때문에 충실하게 시스템에 인가될 수 없다. 대부분의 제어이론은 이 중요한 사항을 고려하지 않은 채로 개발되었다. 흔히 쓰이는 방법은 최적 제어치를 결정 한 후, 입력신호에 제한을 두는 것이다. 그러나 임의로 입력에 제한을 가하는 것은 심각한 제어성능의 저하를 가져올 수 있다.

본 논문에서는 예측제어기를 설계할 때, 어떻게 하면 입력제한을 적절하게 고려할 수 있을 것인가에 대해 살펴본다. 입력제한을 처리하기 위해, 제한된 다중시스템 목적함수에 근거한 예측제어기의 사용을 고려한다. 이것은 결과적으로 정해진 구간에서 제한된 연속적인 제어입력들이 계산되는 다중시스템 예측제어기를 일컫는다. 단일시스템 목적함수에 근거한 제어기와는 달리 입력에 주어지는 제한은 현재입력은 물론 미래의 제어입력들에도 인가된다. 제한된 미래입력의 함수인 미래출력들 역시 현재 제어입력을 계산하는데 이용된다.

2 블럭예측제어

입력 $u(t)$ 이고 출력이 $y(t)$ 로 주어지는 다음과 같은 선형이산시스템을 생각하자.

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + \bar{C}(q^{-1})\omega(t) \quad (1)$$

이때, $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ 그리고 $\bar{C}(q^{-1})$ 는 backward shift operator q^{-1} 로 주어지는 다항식이며 $\omega(t)$ 는 independent stationary random variables이다:

$$\bar{A}(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n} \quad (3)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_nq^{-n} \quad (4)$$

$$E\{\omega(t)|\mathcal{F}_{t-1}\} = 0 \quad E\{\omega(t)^2|\mathcal{F}_{t-1}\} = \sigma^2 \quad (5)$$

여기서 정수 n 은 A , B 그리고 C 중에서 가장 높은 차수이며 이미 알려져 있다고 가정한다. 만약 시스템이 영이 아닌 deadtime (input-output delay)을 갖는다면 다항식 $B(q^{-1})$ 의 앞에 오는 계수들은 영이다.

예측제어문제는 다음과 같이 서술될 수 있다:

시간 t 에서 시스템 변수 A , B , C 그리고 미래로 k -스텝 horizon 동안의 요구되는 출력신호 $y^*(t+i)$ 의 제적이 주어졌다고 하고 시스템의 변수가 예측 horizon k 동안 변하지 않는다고 가정한다. 이러한 가정하에서 horizon k 동안의 예측출력 $y(t+i)$ 과 요구되는 출력 $y^*(t+i)$ 사이의 편차가 가능한 작도록 제어입력 순열 $u(t), u(t+1), \dots, u(t+k)$ 을 구하라.

Dong에 의해 제시된 블럭표현(the block representation) [1]을 이용하면 시스템수식 (1)은 다음과 같이 써질 수 있다.

$$A(d^{-1})Y(t) = B(d^{-1})U(t) + C(d^{-1})\Omega(t) \quad (6)$$

단,

$$U(t) = ((u(t), u(t+1), \dots, u(t+k))^T \quad (7)$$

$$Y(t) = ((y(t+1), y(t+1), \dots, y(t+k))^T \quad (8)$$

그리고 $A(d^{-1})$, $B(d^{-1})$, $C(d^{-1})$ 들은 $(k+1)$ -fold backward shift operator $d \triangleq q^{k+1}$ 로 표현되는 $(k+1) \times (k+1)$ 다항식 행렬이다. 여기서 이 세 다항식행렬들은 *Dynamic Shift Toeplitz* (DST) 행렬이며 DST 행렬들은 곱셈에 대해 교환가능하다 [1]. 수식 (6)은 시스템 (1)의 블럭시스템 표현이라 한다. 수식 (6)으로 부터 출력블럭 $Y(t)$ 는 다음과 같이 표현된다:

$$Y(t) = F(d^{-1})Y'(t-1) + G(d^{-1})U'(t) + A_0^{-1}C_0\Omega(t) \quad (9)$$

단,

$$F(d^{-1}) = A_0^{-1}[C'(d^{-1})A_0 - A'(d^{-1})C_0] \quad (10)$$

$$G(d^{-1}) = A_0^{-1}C_0B(d^{-1}) \quad (11)$$

$$Y'(t) = C'(d^{-1})^{-1}Y(t) \quad (12)$$

$$U'(t) = C'(d^{-1})^{-1}U(t) \quad (13)$$

그러면 최소분산 출력블럭 예측 $Y(t)$ 는 다음과 같다:

$$\hat{Y}(t) = F(d^{-1})\hat{Y}(t-1) + G_0U'(t) + G'(d^{-1})U'(t-1) \quad (14)$$

여기서

$$G(d^{-1}) \triangleq G_0C'(d^{-1}) + d^{-1}G'(d^{-1}) \quad (15)$$

일반적인 선형예측제어기는 자연적으로 블럭표현으로 표현될 수 있다.

$$L(d^{-1})U'(t) = M(d^{-1})Y^*(t) - N(d^{-1})Y(t) \quad (16)$$

여기서 $L(d^{-1})$, $M(d^{-1})$ 그리고 $N(d^{-1})$ 는 모두 크기가 $(k+1)$ 인 d^{-1} 의 다항식이다.

$$L(d^{-1}) = L_0 + L_1d^{-1} + \dots + L_md^{-m} \quad (17)$$

$$M(d^{-1}) = M_1d^{-1} + \dots + M_md^{-m} \quad (18)$$

$$N(d^{-1}) = N_0 + N_1d^{-1} + \dots + N_md^{-m} \quad (19)$$

여기서 L_i , M_i 그리고 N_i 들은 $(k+1) \times (k+1)$ 상수 행렬이다. $U(t)$, $Y(t)$ 그리고 $Y^*(t)$ 는 각기 입력블럭, 출력블럭 그리고 기준입력블럭을 나타내는 $(k+1)$ 벡터이다. L_0 는 비정칙(nonsingular)으로 가정되므로 식 (16)은 블럭제어입력 $U'(t)$

을 유일하게 결정한다. 시간 t 에서 블럭제어식 (16)은 예측 horizon 동안의 $k+1$ 제어입력 $(u(t), u(t+1), \dots, u(t+k))$ 을 결정한다.

출력 horizon k 과 다항식 L_i , M_i 그리고 N_i 들은 Minimum Variance Control [2], Generalized Predictive Control [3], Model Reference Control [4], Pole Assignment Control [5], Block Predictive Control [1]등과 같은 각기 다른 제어법칙의 선택에 따라 다른 값들을 갖는다.

3 제한된 블럭예측제어

입력이 제한된 일반적인 예측제어문제가 제시되고 풀려진다. 고려되는 목적함수는 다음과 같은 다중스텝 자승함수이다:

$$J = E \left[\|P(d^{-1})Y(t) - S(d^{-1})Y^*(t)\|_{W_1}^2 + \|R(d^{-1})U(t)\|_{W_2}^2 | \mathcal{F}_{t-1} \right] \quad (20)$$

여기서 $\|X\|_W^2 \triangleq X^T W X$; W_1 와 W_2 는 diagonal constant weighting 행렬이며 $P(d^{-1})$, $S(d^{-1})$ 그리고 $R(d^{-1})$ 는 다항식 행렬이다:

$$P(d^{-1}) = P_0 + P_1d^{-1} + \dots + P_md^{-m} \quad (21)$$

$$S(d^{-1}) = S_0 + S_1d^{-1} + \dots + S_md^{-m} \quad (22)$$

$$R(d^{-1}) = R_0 + R_1d^{-1} + \dots + R_md^{-m} \quad (23)$$

행렬 P_i , S_i 그리고 R_i 는 크기가 $(k+1) \times (k+1)$ 이다. 여기서 $P(d^{-1})Y(t)$, $S(d^{-1})Y^*(t)$ 그리고 $R(d^{-1})U(t)$ 는 모두 $(k+1)$ 벡터이다. 예로서,

$$P(d^{-1})Y(t) = P_0Y(t) + P_1Y(t-1) + \dots + P_mY(t-m) \quad (24)$$

식 (20)의 \mathcal{F}_{t-1} 는 시간 $t-1$ 까지 얻어진 과거의 입력과 출력들에 의해 만들어진 sigma subalgebra이다. $U(t)$ 가 정해진 범위내에 존재하도록 하기 위해 다음과 같은 제한된 최적해가 고려된다:

$$J^* = \min_{U(t) \in C} J \quad (25)$$

여기서 C 는 다음의 조건들을 만족하는 함수군을 나타낸다:

- (a) $U(t)$ 는 단지 블럭관측치 $\{Y(t-1), Y(t-2), \dots, U(t-1), U(t-2), \dots\}$ 만의 함수이다.
- (b) $M_L \leq U(t) \leq M_U$

여기서 \bar{M}_L 과 M_U 는 $(k+1)$ 벡터이다:

$$\bar{M}_L = [M_L, \dots, M_L]^T \quad (26)$$

$$M_U = [M_U, \dots, M_U]^T \quad (27)$$

위의 최소화문제도 시스템 (6)의 불리표현이 만족해야하는 제한에 구속된다.

이제 목적함수 (25)이 최소화되도록 $U(t)$ 를 구한다. 문제를 간략히 하기 위해서 앞으로 $S(d^{-1}) = P(d^{-1})$ 이라 가정한다. 수식 (20)은 다음과 같이 써질 수 있다:

$$\begin{aligned} J = & E \left[[Y(t) - Y^*(t)]^T P_0^T W_1 P_0 [Y(t) - Y^*(t)] \right. \\ & + 2[Y(t) - Y^*(t)]^T P_0^T W_1 P'(d^{-1}) \\ & \cdot [Y(t-1) - Y^*(t-1)] + U(t)^T R_0^T W_2 R_0 U(t) \\ & \left. + 2U(t)^T R_0^T W_2 R'(d^{-1}) U(t-1) | \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ & + J_0 \end{aligned} \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} J_0 = & \|P'(d^{-1})[Y(t-1) - Y^*(t-1)]\|_{W_1}^2 \\ & + \|R'(d^{-1})U(t-1)\|_{W_2}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

$$P(d^{-1}) = P_0 + d^{-1}P'(d^{-1}) \quad (30)$$

$$R(d^{-1}) = R_0 + d^{-1}R'(d^{-1}) \quad (31)$$

불리입력 $U(t)$ 와 $\Omega(t)$ 가 서로 stochastically 독립이라고 가정한다;

$$E\{U(t)^T \Omega(t) | \mathcal{F}_{t-1}\} = 0 \quad (32)$$

\mathcal{F}_{t-1} 에 대해 조건부 기대치를 취하면 식 (20)은 다음과 같이 간략화 된다:

$$J = J_1 + J_0 + \text{Tr}\{C_0^T A_0^{-T} P_0^T W_1 P_0 A_0^{-1} C_0\} \sigma^2 \quad (33)$$

식 (33)의 마지막 두항이 시간 t 에서 알려진 값이기 때문에 $U(t)$ 의 결정에 영향을 주지 않으며, 식 (25)에 주어진 최소화문제는 다음의 식과 동가이다:

$$J^* = \min_{M_L \leq U(t) \leq M_U} J_1 \quad (34)$$

$Y(t)$ 를 (14)로 치환하면 다음의 quadratic programming 문제를 얻게된다:

$$J^* = \min_{M_L \leq U(t) \leq M_U} U(t)^T \Sigma U(t) + 2U(t)^T \Gamma_t + \Psi_t \quad (35)$$

여기서 Σ 는 상수행렬이고 Γ_t 와 Ψ_t 는 그것의 요소가 시간 t 에서 알려진 값이며 Σ 는 positive definite 행렬이라고 가정되었다.

4 준최적화 방법

위의 quadratic programming 문제는 simplex type quadratic programming (QP) 알고리즘과 같은 수치해석적 방법에 의해 매 시간 t 에서의 제한된 제어입력 $u(t)$ 를 얻기 위해 풀려질 수 있다.

의용생체 제어시스템과 화공 제어시스템 등의 실제 제어시스템에서는 제어입력 사이에 종종 충분한 계산시간을 가질 수 있다. 이러한 경우에는 제한된 최적제어입력 $u(t)$ 를 얻기 위해 quadratic programming 문제 (35)를 매 시간 수치해석적 방법에 의해 풀 수 있다. 그러나 어떤 실시간 제어문제에 있어서는 이러한 방법이 매 순간 허용될 수 있는 시간에 비해 긴 계산시간을 가져올 수도 있다.

하나의 대응책으로, 입력불러 $U(t)$ 에 대한 특정한 단순화에 의해 closed-form으로 표현되는 제한된 최적입력을 다음과 같이 제안한다. 비록 이것이 QP 문제 (35)에 대한 제한된 최적해는 아니지만, 그것의 closed-form 때문에, 매 시간 제한되지 않은 제어입력 $v(t)$ 으로부터 손쉽게 제한된 제어입력 $u(t)$ 을 구할 수 있다. 즉, 해의 최적성을 잃는 대신 계산의 간편성을 얻게된다.

방법 1: 포화

매 순간 하나 혹은 다수의 미래입력이 예측제어기에 의해 결정되더라도, 종종 단지 현재의 입력만이 실제로 시스템으로 인가되고 있다. 다음 순간 새롭게 측정된 출력정보에 의해서 새로운 입력들이 결정되고 다시 현재의 입력만이 인가된다. 이러한 receding horizon 제어방법이 실제응용에서 일반적으로 쓰이고 있다. 제어입력불러의 첫번째 요소만이 실제로 인가된다는 사실을 이용한다면, receding horizon 구현을 위하여 $U(t)$ 의 미래입력들에 가해지는 제한들을 해제시킬 수 있다. 즉, 현재의 제어입력 $u(t)$ 를 구할 때, $U(t)$ 의 모든 요소에 제한을 두는 것이 아니라 오로지 첫번째 요소인 현재 제어입력에만 제한을 두는 것이다.

이러한 단순화 가정하에서, 최소화 문제 (35)는 다음과 같이 변한다:

$$J^* = \min_{M_L \leq u(t) \leq M_U} U(t)^T \Sigma U(t) + U(t)^T \Gamma_t + \Psi_t \quad (36)$$

그러므로 식 (36)를 만족하는 현재 제한된 최적입력 $u(t)$ 는 다음과 같이 얻어진다:

$$u(t) = \text{sat}(v(t), M_L, M_U) \quad (37)$$

여기서 $v(t)$ 는 (36)의 gradient를 영으로 하는 비제한 최적입력 벡터 $V(t)$ 의 첫번째 요소이다:

$$\Sigma V(t) + \Gamma_t = 0 \quad (38)$$

만약 Σ 가 invertible이라 하면, $V(t)$ 는 다음과 같이 유일하게 정해진다.

$$\begin{aligned} V(t) &= -\Sigma^{-1}\Gamma_t \quad (39) \\ &= -\Sigma^{-1}\left[G_0^T P_0^T W_1 [P_0 F(d^{-1})C(d^{-1})^{-1} \right. \\ &\quad \cdot Y(t-1) + P_0 G'(d^{-1})C(d^{-1})^{-1}U(t-1) \\ &\quad \left. + P'(d^{-1})Y(t-1) - P(d^{-1})Y^*(t)] \right. \\ &\quad \left. + R_0^T W_2 R'(d^{-1})U(t-1)\right] \quad (40) \end{aligned}$$

양변에 $C(d^{-1})$ 의 determinant를 곱하면,

$$\begin{aligned} |C(d^{-1})|V(t) &= \\ &= -\Sigma^{-1}\left[G_0^T P_0^T W_1 [P_0 F(d^{-1})C^\alpha(d^{-1})Y(t-1) \right. \\ &\quad \left. + P_0 G'(d^{-1})C^\alpha(d^{-1})U(t-1) \right. \\ &\quad \left. + P'(d^{-1})|C(d^{-1})|Y(t-1) \right. \\ &\quad \left. - P(d^{-1})|C(d^{-1})|Y^*(t)] \right. \\ &\quad \left. + R_0^T W_2 R'(d^{-1})|C(d^{-1})|U(t-1)\right] \quad (41) \end{aligned}$$

여기서 $C^\alpha(d^{-1})$ 는 $C(d^{-1})$ 의 adjoint를 나타낸다. 식 (37)과 식 (41)를 이용하여, 구현할 수 있는 제어기형태를 얻는다:

$$\begin{aligned} |C(d^{-1})|v(t) &= \\ &= -\Sigma_1^{-1}\left[[G_0^T P_0^T W_1 P_0 F(d^{-1})C^\alpha(d^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + P'(d^{-1})|Y(t-1) \right. \\ &\quad \left. + [G_0^T P_0^T W_1 P_0 G'(d^{-1})C^\alpha(d^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + R_0^T W_2 R'(d^{-1})|C(d^{-1})|]U(t-1) \right. \\ &\quad \left. - G_0^T P_0^T W_1 P(d^{-1})|C(d^{-1})|Y^*(t)] \right] \quad (42) \end{aligned}$$

$$u(t) = \text{sat}[v(t), M_L, M_U] \quad (43)$$

여기서 Σ_1^{-1} 는 Σ^{-1} 의 첫번째 행을 나타낸다. 이 제어기식은 매 t 시간마다 계산되어 $u(t)$ 를 시스템에 인가한다.

방법 2: 선형성

다른 하나의 방법은 입력벡터 $U(t)$ 내의 미래입력들이 현재입력 $u(t)$ 의 선형함수이라고 가정하는 것이다:

$$U(t) = \alpha u(t) + \beta \quad (44)$$

여기서

$$\alpha = [1, \alpha_1, \dots, \alpha_k]^T \quad (45)$$

$$\beta = [0, \beta_1, \dots, \beta_k]^T \quad (46)$$

만약 $\alpha_i = 1$ 그리고 $\beta_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$), 즉, 모든 미래입력이 현재입력 $u(t)$ 와 같다고 가정한다면, 이것은 일반형 예측제어에서 쓰이는 가정과 같은 것이다 [3].

이러한 가정하에서 $(k+1)$ -차원 quadratic programming 문제 (35)는 다음과 같은 일차 문제가 된다:

$$\begin{aligned} \bar{J}^* &= \min_{M_L \leq v(t) \leq M_U} \left\{ u(t)\alpha^T \Sigma \alpha u(t) + \Gamma_t \right. \\ &\quad \left. + 2u(t)\alpha^T [\Sigma\beta] + \beta^T \Sigma \beta + 2\beta^T \Gamma_t + \Psi_t \right\} \quad (47) \end{aligned}$$

그러므로 (47)을 만족하는 제한된 최적해는 다음과 같다:

$$u(t) = \text{sat}[v(t), M_L, M_U] \quad (48)$$

여기서 $v(t)$ 는 (47)의 gradient를 영으로 하는 비제한 최적해이다:

$$\alpha^T \Sigma \alpha u(t) + \alpha^T [\Sigma\beta + \Gamma_t] = 0 \quad (49)$$

위와 같은 과정을 통해 구현가능한 제어기형태를 얻는다:

$$\begin{aligned} |C(d^{-1})|v(t) &= \\ &= -\frac{\alpha^T}{\alpha^T \Sigma \alpha} \left[[G_0^T P_0^T W_1 P_0 F(d^{-1})C^\alpha(d^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + P'(d^{-1})|Y(t-1) \right. \\ &\quad \left. + [G_0^T P_0^T W_1 P_0 G'(d^{-1})C^\alpha(d^{-1}) \right. \\ &\quad \left. + R_0^T W_2 R'(d^{-1})|C(d^{-1})|]U(t-1) \right. \\ &\quad \left. - G_0^T P_0^T W_1 P(d^{-1})|C(d^{-1})|Y^*(t) \right. \\ &\quad \left. + |C(d^{-1})|\Sigma\beta \right] \quad (50) \end{aligned}$$

$$u(t) = \text{sat}[v(t), M_L, M_U] \quad (51)$$

방법 3: 방향성

입력벡터 $U(t)$ 에 제한을 가하는 또 하나의 방법은 이 벡터의 방향성을 유지한 채로 입력벡터를 포화시키는 것이다. 즉, 입력벡터의 두 성분인 크기와 페이스 중에서 단지 크기만을 제한시켜, 페이스는 그대로 유지한 채 벡터를 제한경계내로 구속하는 것이다. 이렇게 함으로써 제어가 시스템출력을 원하는대로 구동하기 위해서 만들어낸 입력벡터의 방향을 유지시킬 수 있다.

제안된 방법들은 평가하기 위하여 시뮬레이션이 시행되었으며 그림 1-3에 결과가 보여진다. 그림 3의 제어입력은 결코 입력제한 경계를 넘지않고 있다.

5 결론

입력에 제한이 있는 경우의 예측제어문제가 고려되었다. Closed-form 형태의 제어법칙을 얻기위해 세가지의 준최적 방법들이 제안되었으며 시뮬레이션에 의해 평가 비교되었다. 이러한 방법들의 해석적인 비교와 특성의 파악이 앞으로의 연구과제이다.

참고 문헌

- [1] Dong, Y., and H. Chizeck (1989). "A Unified Approach to Predictive Control," in preparation for publication.
- [2] Astrom, K.J., and E. Wittenmark (1984). *Computer Controlled Systems: Theory and Design*, Prentice-Hall, New Jersey.
- [3] Clarke, D.W., C.Mohtad, and P.S. Tuffs (1987). "Generalized Predictive Control-Part I. The Basic Algorithm," *Automatica*, vol.23, No.2, 137-148.
- [4] Landau, I.D. (1979). *Adaptive Control-The Model Reference Approach*, Marcel Decker, New York.
- [5] Wellstead, P.E., D. Prager, and P. Zanker (1979), "Pole Assignment Self-Tuning Regulator," *Proc. IEE*, vol. 126, No.8, 781-787.
- [6] Voss, G.I., H.J. Chizeck, and P. Katona (1987). "Regarding Self-Tuning Controller for Nonminimum-phase Plants," *Automatica*, vol.2.

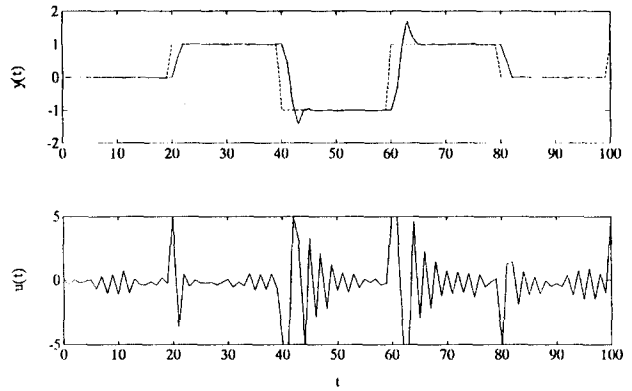


그림 1: 방법 1

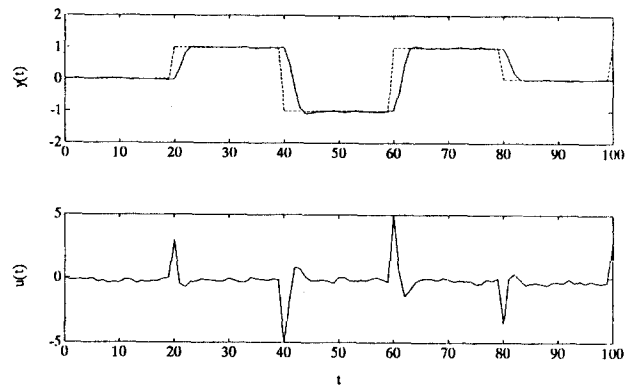


그림 2: 방법 2

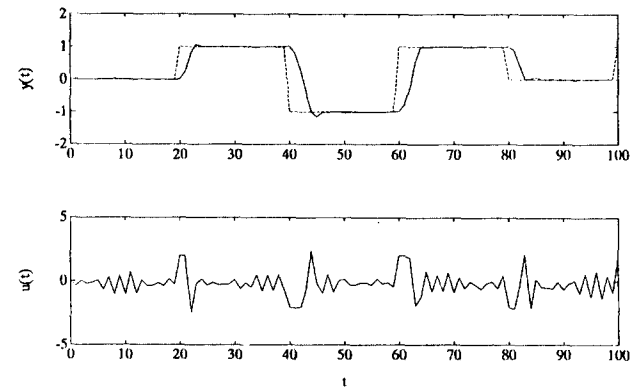


그림 3: 방법 3