데이터 기조의 공분산 행렬로 구성된 EV 방법으로 부터
다중 정현파의 주파수 추정에 관한 통계적 분석 *

안 태 천*, 탁 현 수*, 최 병 윤**

* 원광대 제어계측과, ** 한전 기술연구원 배전연구실

Statistical Analysis on Frequency Estimation of Multiple Sinusoids from EV with a Data based Covariance Matrix

Tae-chon Ahn*, Hyun-su Tak* and Byung-yun Choi**

* Dept. of Control and Instrumentation Eng. Wonkwang Uni.
** Korea Electrotechnology Research Institute

abstract

A Data-based Covariance Matrix(DCM) is introduced in the Eigenvector(EV) method, among subspace methods of estimating multiple sinusoidal frequencies from finite white noisy measurements.

It is shown that the EV with the DCM can obtain the true frequencies from finite noiseless data Some asymptotic results and further improvement on the DCM are also presented mathematically.

Monte-carlo simulations are statistically conducted from the view-points of means and standard deviations in the EV's of DCM and Conventional Covariance Matrix(CCM).

Simulations show a great promise for using the DCM, particularly for the cases of short data records, closely spaced frequencies and high signal-to-noise ratios.

제 1장. 서 론

백색 잡음의 데이터 측정값으로 부터 다중 정현파의 주파수를 측정할 수 있는 여러 가지 기술적인 방법들 중에서 부공간(subspace) 방법은 "super - resolution"능력 때문에 특히 중요시 되고 있다. 부공간 방법은 점근적인 공분산 행렬을 사용하거나 잡음 측정값이 무한이 많으면 실제 주파수 추정값을 얻을 수 있기 때문에 최근에 많은 주목을 받고 있다. 더우기, 이 주파수 추정값은 잡음 데이터 측정값이 백색 가우시안 프로세스일 때 통계적으로 효과적인 값을 주고 있다. 그러나 실질적인 경우에 공분산 행렬이 미지이고, 단지 주어진 유한 잡음 데이터 측정값으로 부터 이를 추정하여야 하기 때문에, 기존의 공분산 함수가 이 공분산 행렬의 추정에 사용된다면 주파수 추정값은 편향(bias)될 것이다. 그 공분산 함수에 근거를 두는 기존의 공분산 행렬(CCM)은 데이터 측정값에 잡음의 유무와 관계없이 편향항을 포함하고 있어, 결국은 편향된 주파수 측정값을 준다.

본 논문에서는 DCM을 부공간 알고리즘인 EV 방법에 적용하고, 이를 전반적으로 분석한다. 그리고 DCM으로 구성된 EV는 잡음이 없는 유한 데이터 측정값으로 부터 실제 주파수를 얻을 수 있다는 것과 CCM으로 구성된 EV는 단지 점근적으로만 편향이 없는 주파수 추정값을 얻을 수 있다는 것을 입증한다. 또한 DCM의 EV는 적은 잡음 측정값과 좁게 이격된 주파수 그리고 높은 SNR의 경우에 더 좋은 주파수 추정도를 줄 수 있다는 것과 CCM의 편향 항인 가제어 오차(controllable error)를 소멸시킬 수 있다는 것도 확인한다. 그리고 DCM에 대한 몇몇의 점근적 특성과 더 나은 개선방안이 분석된다. 끝으로 여러 가지 보기에서 CCM과 DCM의 EV에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 실행하고, 그 성능을 분석 비교한다.

제 2장. 다중 정현파의 주파수 추정 시스템

* 이 연구는 1991년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임. 과제번호 : 911-0707-001-1

다음과 같은 일정한 간격으로 샘플링된 정현파 신호를 고려한다.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sin(\omega_i t + \phi_i) \qquad (1)$$

여기서 α_i, $\phi_i \in R$, $\omega_i \in (0,\pi)$이고 $i \neq j$에 대해서 $\omega_i \neq \omega_j$이다. 또한 ϕ_i의 초기 위상은 $[0,2\pi)$내에 분포된 것으로 가정한다. 식(1)에서 샘플링 간격은 1초와 같다고 가정하고 ω_i는 표준화 된 각주파수로 간주한다.

$y(t)$는 $x(t)$의 잡음 측정값을 나타낸다.

$$y(t) = x(t) + e(t) \qquad t=1,2,\ldots,N \qquad (2)$$

여기서 $e(t)$는 평균이 0이고 분산이 λ^2인 균등 분포의 랜덤(Random) 잡음의 수열로 가정한다. 또한 $x(t)$와 $e(s)$는 어떤 t와 s에 대해서는 상호 관련되어 있지 않은 것으로 생각한다.

식(1)에 있는 미지변수 α_i, ω_i와 ϕ_i는 $t=1,2,\cdots,N$ 에 대한 유한 데이터 측정값 $y(t)$의 집합으로 부터 추정한다. 일단 ω_i의 값을 알면 α_i와 ϕ_i을 추정하는 것은 쉬운 문제이다. 그러므로 본 논문에서는 ω_i을 추정하는 문제에 집중할 것이다.

잘 알려진 것처럼 $x(t)$는 식(3)의 자동회귀(AR) 프로세스를 만족한다.

$$A(q^{-1})x(t) = 0 \qquad (3)$$

여기서 q^{-1}은 단위 지연 연산자 즉, $q^{-1}x(t) = x(t-1)$을 나타내고 $A(q^{-1})$은 식(4)에 주어진 차수 $2m$의 다항식이다.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{2m} q^{-2m} = \prod_{i=1}^{m} (1 - 2\cos\omega_i q^{-1} + q^{-2}) \qquad (4)$$

$A(z)$가 $i=1,2,\cdots,m$에 대해서 $\exp(\pm j\omega_i)$에서 공액 복소 단위 계수 근을 갖기때문에 $\{a_i\}$는 식(5)와 같이 대칭적이어야 한다.

$$a_{n-i} = a_i \qquad i=0,1,\cdots,m \;(a_0=1) \qquad (5)$$

$y(t)$가 다음의 자동회귀 이동평균(ARMA) 프로세스를 만족한다는 것은 식(2)와 식(3)으로 부터 유도된다.

$$A(q^{-1})y(t) = A(q^{-1})e(t) \qquad (6)$$

식(6)은 두 가지 관점에서 퇴화된(degenerated) ARMA 모델이다. 첫째로 모든 극점과 영점은 단 위원 위에 존재한다. 둘째로 모든 극점은 영점과 일치한다. 이상의 두 특징은 스펙트럼 추정에서 중요한 역할을 할 것이다.

다음으로 모델의 차수를 높이기 위해 임의의 0이 아닌 다항식 즉, 단순 증가 다항식 $B(q^{-1})$을 식(3)의 양변에 곱하면 식(3)과 같은 결과를 나타내는 식(7)을 얻을 수 있다.

$$B(q^{-1})A(q^{-1})x(t) = 0 \qquad (7)$$

여기서 식(7)의 계수를 식(8)로 정의한다.

$$C(q^{-1}) = B(q^{-1})A(q^{-1}) \qquad (8)$$

식(8)을 식(6)에 대입하면 식(9)가 된다.

$$C(q^{-1})x(t) = 0 \qquad (9)$$

여기서

$$C(q^{-1}) = 1+c_1q^{-1}+\ldots+c_Lq^{-L} \tag{10}$$

$$B(q^{-1}) = 1+b_1q^{-1}+\ldots+b_{L-n}q^{-L+n} \tag{11}$$

식(12)는 식(6)의 퇴화된 고차 모델이다.

$$C(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t) \tag{12}$$

식(12)는 모델 차수를 선택하는데 있어 더 많은 재량을 주고 있으나, 많은 매개변수를 사용하는 희생을 감수해야 한다. 이 논문의 나머지 부분에서 가능하다면 식(12)를 사용할 것이다. 왜냐하면 식(12)는 식(6)을 포함할 뿐 아니라, 대부분의 경우에 $C(q^{-1})$의 차수를 알맞게 선택하면 보다 정확한 매개변수 추정을 얻을 수 있기 때문이다.

문제는 이용할 수 있는 잡음 측정값 $y(1), y(2),\cdots, y(N)$으로 부터 각 주파수$\{\omega_i\}$을 추정하는 것이다. 다단 정현파의 주파수 추정은 일반적으로 다음 두 단계 절차로부터 얻어진다.

1) 계수 $\{c_i\}$을 추정한다.

2) $C(z)$의 근 중에서 가장 큰 $2m$개의 각 위치 $\rho_i\cdot\exp(\pm j\omega_i)$ $(i=1,2,\cdots,m)$또는 스펙트럼 $1/\|C(\exp(j\omega)\|^2$ 의 피이크 중에서 가장 큰 $2m$개의 위치로부터 주파수 추정값 $\{\omega_i\}$를 계산한다.

특히 데이터 기초의 공분산 행렬로 구성된 EV 방법에서는 첫째로 불변의 부공간을 찾는 것이고, 둘째로 식(36)을 최소(또는 최대)로 하는 스펙트럼 유사 함수(spectrum-like function)(또는 역함수)로 부터 주파수를 추정하는 것이다.

제 3장. 고유벡터(EV) 방법

이 장에서는 주파수 추정 방법 중에서 부공간 알고리즘인 EV 방법을 검토하고, 이 방법이 사용하는 기존의 공분산 행렬(CCM)의 선천적 결함의 개선안으로 데이터 기초의 공분산 행렬(DCM)을 제시한다.

CCM의 선천적 결함은 CCM이 편향 행렬을 포함한다는 사실에 근거를 두고 있다. 이 편향 행렬은 아무리 정확한 데이터 측정값을 측정하더라도 편향된 주파수 추정값의 원인이 된다. 특히 주파수 추정값의 편향은 잡음 데이터 측정값의 수가 적고, 인접 주파수인 경우에 더욱 크게 나타난다. 이러한 편향 항을 소거하는 방법은 DCM을 구성하는 것이다.

우선, 유한의 잡음이 없는 데이터 측정값을 사용하여 구성된 DCM의 EV방법으로 부터 실제 주파수를 얻을 수 있다는 것을 입증할 것이다.

잡음 부공간(noise subspace)를 이용한 DCM의 EV 방법을 개발하고, 다중 정현파의 주파수를 추정하기 위해, 퇴화된 ARMA 시스템인 식(12)를 다시 고려한다.

$$\sum_{i=0}^{L} c_iy(t-i) = \sum_{i=0}^{L} c_ie(t-i) \tag{13}$$

여기서 L는 모델의 차수이다.

데이터 측정값에 잡음이 없다고 가정하여 $x(t) = y(t)$로 쓰고 ,이용 가능한 데이터 측정값 $y(1),y(2),\cdots,y(n)$을 사용하여 식(14)와 같은 방정식을 얻는다.

$$A_xC = 0 \tag{14}$$

여기서

$$A_x = \begin{bmatrix} x(L+1) & x(L) & \cdots x(1) \\ x(L+2) & x(L+1) & \cdots x(2) \\ \vdots & \vdots & \\ x(N) & x(N-1) & \cdots x(N-L) \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$C = [c_0\ c_1\ \ldots\ldots c_L]^T \tag{16}$$

잘 알려진 사실로 A_x는 $2m$의 계수(rank)를 가지므로, A_x는 $(L+1-2m)$개의 영인 특이값을 갖고, 매개변수 벡터 C는 A_x의 null space에 놓인다. 식(14)의 양변에 A_x^H을 곱하면 식(17)이 된다.

$$A_x^HA_xC = 0 \tag{17}$$

여기서 H는 Hermitian Transpose이다. $1/(N-L)$로 식(17)의 $A_x^HA_x$을 규정화하여, 식(18)과 같은 $x(t)$의 DCM을 정의한다.

$$\hat{R}_x = A_x^HA_x/(N-L) \tag{18}$$

여기서 $\hat{R}_x$는 $x(t)$의 공분산 행렬의 추정값으로 사용된다. 식(17)를 식(18)을 이용하여 다시쓰면 식(19)가 된다.

$$\hat{R}_xC = 0 \tag{19}$$

여기서 $\hat{R}_x$는 $2m$의 계수를 가지므로, 매개변수 벡터 C는 $(L+1-2m)$개의 0 고유값 중의 하나에 대응하는 고유 벡터가 된다.

식(19)는 $\lambda^2=0$일 때 EV과 같은 구조를 갖지만 $\hat{R}_x$와 R은 같지 않다. 왜냐하면 데이터 측정값의 수가 무한대로 접근할 때만 R_x가 Toeplitz 행렬을 구성할 뿐, 일반적으로 Toeplitz가 아니기 때문이다.

행렬 $\hat{R}_x$을 사용한 EV 방법이 실제 주파수를 얻을 수 있다는 것을 증명하기 위해 R_x의 null space가 실제 주파수 $\omega=\pm\omega_i$에서 정의되고, 규정화된 정현파 신호 벡터 $S(\omega)$ 에 수직이라는 것을 확립할 것이다. 일반화를 위해 복소 정현파를 사용하여 이를 증명한다.

신호 속에 M개의 복소 정현파를 가진 식(20)을 생각한다.

$$x(t) = \sum_{i=1}^{M} \beta_i\exp(j\omega_it) \tag{20}$$

여기서 $\omega_i\in(-\pi,\pi)$ 와 β_i는 각각 i번째 신호의 각 주파수와 복소 진폭을 의미한다. 그리고 $i\neq j$일 때 $\omega_i\neq\omega_j$인 경우이다. 식 (20)을 근거로 A_x를 식 (21)과 같이 분해할 수 있다.

$$A_x = E_1\Lambda E_2 \tag{21}$$

여기서

$$E_1 = \begin{bmatrix} \exp(j\omega_1) & \exp(j\omega_2) & \cdots\exp(j\omega_M) \\ \exp(j2\omega_1) & \exp(j2\omega_2) & \cdots\exp(j2\omega_M) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \exp(j(N-L)\omega_1) & \exp(j(N-L)\omega_2) & \exp(j(N-L)\omega_M) \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_M\} \tag{23}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} \exp(jL\omega_1) & \exp(j(L-1)\omega_1) & \cdots & 1 \\ \exp(jL\omega_2) & \exp(j(L-1)\omega_2) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \exp(jL\omega_M) & \exp(j(L-1)\omega_M) & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

복소 정현파의 관점에서 식 (18)의 $\hat{R}_x$ 을 분석하면 식 (25)가 된다.

$$\hat{R}_x = E_2^H\Lambda^H E_1^H E_1\Lambda E_2/(N-L) \tag{25}$$

식(25)를 간략화하기 위해 식(26)을 규정하고, 식(25)를 다시쓰면 식(27)이 된다.

$$T = \Lambda^H E_1^H E_1\Lambda \tag{26}$$

$$\hat{R}_x = E_2^H T E_2 \tag{27}$$

여기서 E_1은 full column 계수이고, Λ는 nonsingular이므로 T는 M×M차원의 nonsingalar 행렬이 된다. 식(27)로 부터 식(28)을 유추할 수 있다.

$$R(\hat{R}_x) = R(E_2^H) \tag{28}$$

여기서 $R(\cdot)$은 행렬의 치역(range) (또는 column space)를 나타낸다.

식(18)과 식(25)의 $\hat{R}_x$는 Toeplitz 행렬이 아니지만, $\hat{R}_x$의 null space는 column space (또는 치역에 수직)이다. 즉, $\hat{R}_x$의 null space는 E_2^H의 column space에 수직이다. E_2^H의 i번째 column은 식(29)로 주어진다.

$$\bar{S}(\omega_i) = [\exp(-jL\omega_i)\ \exp(-j(L-1)\omega_i)\cdots 1]^T \tag{29}$$

$\hat{R}_x$에 SVD를 실행하면 식(30)이 된다.

$$\hat{R}_x = U\Sigma U^H \tag{30}$$

여기서

$$U = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_{L+1}] \tag{31}$$

$$\Sigma = \mathrm{diag}[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_{L+1}] \tag{32}$$

식(33)을 정의하고 식(3-12)와 비슷하게 표시한다.

$$Q = \sum_{k=M+1}^{L+1} u_ku_k^H/\sigma_k \tag{33}$$

$$\bar{D}(\omega_i) = \frac{1}{L+1} \bar{S}^H(\omega_i) Q \bar{S}(\omega_i) = 0, \quad i=1,2,\cdots,M \tag{34}$$

식(35)를 이용하여 $D(\bar{\omega}_i) = D(\omega_i)$을 입증할 수 있다.

$$\bar{D}(\omega) = \frac{1}{L+1} \bar{S}^H(\omega) Q \bar{S}(\omega) = \frac{1}{L+1} \mathrm{Tr}(Q \bar{S}(\omega) \bar{S}^H(\omega))$$
$$= \mathrm{Tr}(Q S(\omega) S^H(\omega)) = D(\omega) \tag{35}$$

여기서 $\mathrm{Tr}(\cdot)$은 행렬의 Trace을 나타내고, $S(\omega)$는 식(3-5)에서 정의됐다.

식(34)와 식(35)로 부터 식(36)을 유추할 수 있다.

$$D(\omega_i) = 0 \quad i=1,2,\cdots,M \tag{36}$$

여기서 식(36)은 $\hat{R}_x$의 null space는 $\omega = \omega_i, (i=1,2\cdots M)$에서 $S(\omega)$에 수직이다는 것을 보인다. 즉, EV 방법을 사용하여 R_x로 부터 실제 주파수를 뽑닐 수 있다는 것이다. 이상에서 복소 정현파의 실제 주파수를 얻을 수 있다는 것을 증명한다. 특히, m개의 실수(real) 정현파에서는 각 쌍마다 같은 진폭을 갖는 m쌍의 공액 복소 정현파가 존재하기 때문에, 이것은 식(20)의 특수한 경우에 불가하다.

제 4장 DCM의 점근적 특성과 개선 방안

이 장에서, DCM은 CCM의 이론적인 공분산 행렬과 점근적으로 동일하여, EV의 CCM과 DCM의 데이타 측정값이 무한대로 접근할 때, 같은 주파수 추정도를 갖는다는 것을 입증할 것이다. 그리고 EV의 계수에 대한 추정 공분산 행렬을 알 때, 주파수 추정값의 점근적 분산이 유도될 것이다. 끝으로 전·후항(forward-backward) 개념을 이용하여 DCM의 개선 방안이 제시될 것이다.

우선 잡음이 섞인 $\hat{r}_y(i,j)$을 $\hat{R}_y$의 (i,j)번째 요소로 놓고 이를 구체적으로 다시쓰면, 식(37)이 된다.

$$\hat{r}_y(i,j) = \frac{1}{N-L} \sum_{t=1}^{N-L} y(L+1-i+t)y(L+1-j+t) \tag{37}$$

N이 무한대일 때 식(37)은 식(38)로 변형된다.

$$\begin{aligned}\hat{r}_y(i,j) &\cong \lim \frac{1}{N-L} \sum_{t=1}^{N-L} y(L+1-i+t)y(L+1-j+t) \\ &= E\{y(L+1-i+t)y(L+1-j+t)\} \\ &= r_y(|i-j|) \\ &= r_x(|i-j|) + \lambda^2 \delta_{i,j}\end{aligned} \tag{38}$$

여기서 $\delta_{i,j}$는 Kronecker 델타 함수이다. 식(38)을 유도하는 과정에서, 신호는 $e(t)$와 상호 연관되어 있지 않다. 그리고 $e(t)$는 평균값이 0이고 분산이 λ^2인 백색 잡음이라 가정한다. 식(38)은 정확히 EV의 고유방정식과 같은 형태이므로, DCM은 점근적으로 이론적인 공분산 행렬과 동일 하게 된다.

다음, EV에서 다항식의 계수가 추정되었다고 가정하고, 식(39)로 표시한다.

$$\hat{D}(\omega) = \hat{d}_L \exp(jL\omega) + \ldots + \hat{d}_1 \exp(j\omega) + 1 + \hat{d}_{-1} \exp(-j\omega)$$
$$+ \ldots + \hat{d}_{-L} \exp(-jL\omega) = 1 + 2\beta^T(\omega)\hat{d} \tag{39}$$

여기서

$$\beta(\omega) = [\cos(\omega) \;\; \cos(2\omega) \; \ldots \; \cos(L\omega)]^T \tag{40}$$

$$\hat{d} = [\hat{d}_1 \; \hat{d}_2 \; \ldots \; \hat{d}_L]^T \tag{41}$$

식(39)은 $\omega = \hat{\omega}_i$에서 식(42)를 만족한다.

$$\hat{D}(\hat{\omega}_i) = 0 \tag{42}$$

$\hat{d}$의 공분산 행렬 $P(\hat{d})$을 안다고 가정하고, $\hat{\omega}_i$의 분산이 $P(\hat{d})$에 어느정도 의존하는지를 찾아보면, N이 클 때 ω_i가 $\hat{\omega}_i$에 매우 근접하게 된다. $D(\hat{\omega}_i)$을 ω_i에서 Taylor 급수로 전개하면 식(43)을 얻을 수 있다.

$$\hat{D}(\hat{\omega}_i) \cong 1 + 2\beta^T(\omega_i)\hat{d} + 2\Psi^T(\omega_i)\hat{d}(\hat{\omega}_i - \omega_i) \cong 0 \tag{43}$$

여기서

$$\Psi(\omega_i) = \left.\frac{\partial\beta(\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega_i} = -[\sin(\omega_i) \;\; 2\sin(2\omega_i) \ldots L\sin(L\omega_i)]^T \tag{44}$$

$D(\omega_i)=0$이라는 사실로부터 식(45)를 유도한다.

$$\beta^T(\omega_i)(\hat{d}-d) + \Psi^T(\omega_i)\hat{d}(\hat{\omega}_i - \omega_i) \cong 0 \tag{45}$$

$\hat{d}$가 N이 클 때 d에 접근 하므로, $\hat{d}$을 d로 대입하면 식(45)는 식(46)이 된다.

$$\beta^T(\omega_i)(\hat{d}-d) + \Psi^T d(\hat{\omega}_i - \omega_i) \cong 0 \tag{46}$$

이상을 이용하여 주파수 추정값의 분산을 구하면 식(47)이 된다.

$$\mathrm{var}(\hat{\omega}_i) = \frac{\beta^T(\omega_i) P(\hat{d}) \beta(\omega_i)}{\Psi^T(\omega_i) d d^T \Psi(\omega_i)} \tag{47}$$

끝으로 $y(t)$의 DCM을 개선하는 방법을 생각한다. 첫째로, 식(15)에서 분석한 전항 선형예측(forward linear prediction) 행렬을 사용한 DCM을 이용하여, $e(t)=0$일 때, 후항 선형예측(backward linear prediction) 행렬을 이용한 DCM을 분석한다. 이 방법도 실제 주파수를 DCM으로부터 구할 수 있을 것이다.

식(20)을 다시 고려하여, 후항 DCM을 식(48)로 정의한다.

$$\hat{R}_{xb} = A_{xb}^H A_{xb} / (N-L) \tag{48}$$

여기서

$$A_{xb} = \begin{bmatrix} x(1) & x(2) & \ldots & x(L+1) \\ x(2) & x(3) & \ldots & x(L+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x(N-L) & x(N-L+1) & & x(N) \end{bmatrix} \tag{49}$$

식(49)를 변형하면 식(50)이 된다.

$$A_{xb} = E_1 \Lambda E_3 \tag{50}$$

여기서 E_1과 Λ는 각각 식(22)와 식(23)이고, E_3는 식(51)이다.

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & \exp(j\omega_1) & \cdots & \exp(jL\omega_1) \\ 1 & \exp(j\omega_2) & \cdots & \exp(jL\omega_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \exp(j\omega_M) & \cdots & \exp(jL\omega_M) \end{bmatrix} \tag{51}$$

식(50)을 DCM의 일반식에 대입하면 식(52)를 얻는다.

$$\hat{R}_{xb} = E_3^H \Lambda^H E_1^H E_1 \Lambda E_3 / (N-L) \tag{52}$$

식(25)와 비슷한 식(52)를 SVD 한다.

$$\hat{R}_{xb} = V \Sigma V^H \tag{53}$$

여기서

$$V = [v_1 \;\; v_2 \; \ldots \; v_{L+1}] \tag{54}$$

E_3^H 의 i번째 column을 식(55)로 놓는다.

$$S_b(\omega_i) = [1 \;\; \exp(-j\omega_i) \; \cdots \; \exp(-jL\omega_i)]^T \tag{55}$$

전항 DCM과 비슷한 식(56)을 얻을 수 있다.

$$D_b(\omega_i) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{L+1} S_b^H(\omega_i) \Big(\sum_{k=M+1}^{L+1} \gamma_k v_i v^H \Big) S_b(\omega_i)$$
$$= [S^H(\omega_i) \Big(\sum_{k=M+1}^{L+1} \gamma_k v_i v_i^H \Big) S(\omega_i)]^* = 0 \tag{56}$$

여기서 *는 복소 공액 이다. 이상에서 잡음이 없는 경우는 실제 주파수를 잡음이 있는 경우는 주파수 추정값을 후항 DCM으로부터 구할 수 있다.

둘째로, 전항 또는 후항 DCM으로부터 주파수 추정도를 개

선하기 위해, 상호 보완적인 전·후향(forward-backward) DCM을 제안할 것이다. 전·후향 DCM을 식(57)로 정의한다.

$$\hat{R}_{fb} = A_{fb}^{H} A_{fb}/2(N-L) \qquad (57)$$

여기서

$$A_{fb} = \begin{bmatrix} y(L+1) & y(L) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N) & y(N-1) & \cdots & y(N-L) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(N-L) & y(N-L+1) & \cdots & y(N) \end{bmatrix} \qquad (58)$$

전·후향 선형예측 방법처럼, 이 방법은 데이터 측정값 행렬 A_{fb}의 행(column) 수를 증가시키므로 모델 차수 L을 증가시킬 수 있다. 그러므로 주파수 추정도의 개선 가능성을 보인다. 다음 장에서 EV 방법에 대한 전향 또는 후향 CCM과 전·후향 DCM의 비교 보기가 제시될 것이다.

제 5장. 컴퓨터 시뮬레이션과 결과고찰

제3장에서 부터 4장에 걸쳐 전개된 EV에 대한 CCM과 DCM을 비교하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션 보기들이 주어진다. 모든 보기들에서 정현파의 수는 동등한 진폭을 가지고, 두개의 신호로 구성된다. 특히 이 보기들은 데이터 측정값의 수, SNR 및 모델 차수를 변화시킬 경우의 영향을 고려하여 선택된다. 그리고 보기들에 대한 CCM과 DCM의 성능이 주파수 추정값의 평균값 과 표준 편차 (또는 실효값)에서 평가된다.

보기 1.

시뮬레이션을 위한 데이터 측정 시스템을 식(59)로 놓는다.

$$y(t)= \sqrt{2}\sin(0.25\pi t) + \sqrt{2}\sin(0.3\pi t) + e(t) \qquad (59)$$

여기서 e(t)는 평균이 0이고 분산이 0.01(SNR=20db)인 백색 가우시안 프로세스이다. 또한 데이터 측정 수는 N=50이고, 구현의 수는 50 가지이다. 모델의 차수를 변화 시키면서 주파수 추정을 시도하고, 그 결과를 그림1에 도시한다. 특히, 최소 모델 차수 (L=4)에 대응하는 성능은 불량하여 모든 보기에서 생략한다.

보기1에 대한 결과 고찰은 다음과 같다.

1) DCM으로부터 주파수 추정값은 CCM으로부터 주파수 추정보다 훨씬 덜 편향된다. CCM의 큰 편향은 유한 데이터 측정값으로 부터 구성된 편향된 공분산 함수에 기인한다.

2) L이 클 경우, CCM으로부터 표준 편차는 DCM으로부터 표준 편차보다 일반적으로 더 적다. 이것은 잡음에 대한 교란 항이 CCM에서 더 적기 때문이다. 그러나 적은 데이터 측정값, 인접한 주파수 또는 높은 SNR에서,CCM과 DCM으로부터 표준 편차의 차이는 평균값의 차이보다 일반적으로 크다. 이러한 경우에 DCM을 사용하는 것이 유리하다.

3) CCM에서 성능은 모델 차수 L이 너무 크지 않다면 L의 증가와 함께 개선된다. 반면 DCM에서 성능은 비교적 큰 L에서 나빠진다. 이 사실은 2)의 교란항에 의해 설명될 수 있다. DCM에서 최상의 주파수 추정값은, 편향과 표준 편차의 관점에서 볼 때, L = N/3 근처에서 얻을 수 있다.

4) CCM과 DCM의 시뮬레이션에서 몇몇의 나쁜 추정값을 관찰할 수 있는데, 이는 많이 교란된 잡음 고유 벡터 u_k가 스칼라 하중인자인 γ_k에 의해 크게 하중될 때 일어난다.

보기 2.

SNR은 10, 20, 40 및 60으로 변화시킨 것 이외에는 보기1과 같은 시스템을 사용한다. 모델의 차수는 보기1의 CCM에서 최상의 주파수 추정도를 보인 L=20으로 한다. 계산은 보기1처럼 하고, 그 성능 결과는 그림2에 도시한다. 그림2로 부터 비교적 높은 SNR(이를테면 10dB 이상)에서 DCM이 CCM보다 훨씬 좋은 주파수 추정값을 준다. 이것은 잡음 교란항이 높은 SNR에서 편향 항보다 더 작기 때문이다. 또한 보기2에서 SNR이 무한대로 접근할 때 실제 주파수가 DCM으로부터 얻을 수 있다는 것을 확인시킨다.

보기 3.

전·후향 DCM 으로 구성된 EV 방법이 보기1과 같은 데이터 측정값에서 계산 된다. 또한 추정값의 실효값(RMS)가 L을 변화시키며 계산된다. 그 결과를 전향 DCM의 결과와 함께 그림3에 도시한다. 그림3으로 부터 전·후향 DCM은 전향 DCM보다, 특히 L이 큰 경우, 좋은 주파수 추정값을 공급한다.

이 개선도는 데이터 측정값의 수와 SNR의 값에 주로 의존한다. 또한 그림 3으로 부터 최상의 모델 차수는 전향 DCM에서 N/3~2N/5 근처이고, 전·후향 DCM에서 2N/3 근처라는 것을 알 수 있다.

제 6장 결 론

EV 방법이 기존의 공분산 행렬 (CCM)과 데이터 기조의 공분산 행렬 (DCM)에서 연구되었다. 분석과 시뮬레이션에서 다음과 같은 결론을 도출했다.

잡음이 없는 데이터 측정값에서, 데이터 측정값이 적고, 주파수가 인접할지라도, DCM으로 부터 실제 주파수를 얻을 수 있다는 것이다. 반면, CCM으로부터는 점근적으로만 편향이 없는 주파수 추정값을 얻을 수 있다는 것이다.

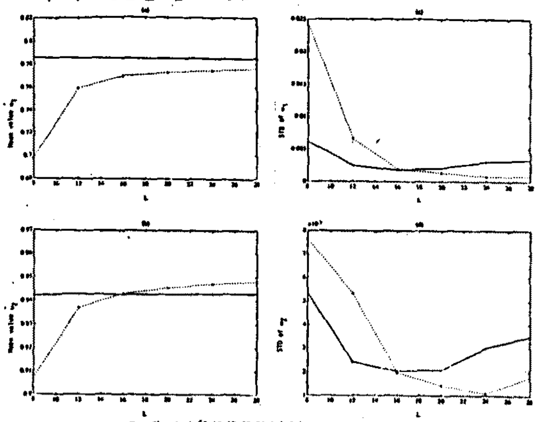
잡음이 있는 데이터 측정값에서 DCM의 사용은, 적은 데이터 측정값, 인접 주파수 및 높은 SNR의 경우에, CCM 사용보다 더 좋은 주파수 추정도를 준다는 것이다.

많은 데이터 측정값에서도 DCM과 CCM은, 이들이 점근적으로 같기 때문인지는 몰라도, 주파수 추정도가 같다는 것이다.

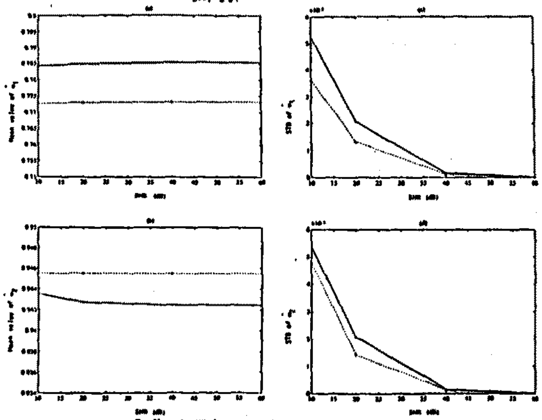
끝으로 데이터 측정값으로 부터 추정 공분산 행렬을 구성한다는 생각은 일반적으로, Yule-Walker 방법들과 같은 방법에서도, 유용한 방법이 될 것이다.

참고문헌

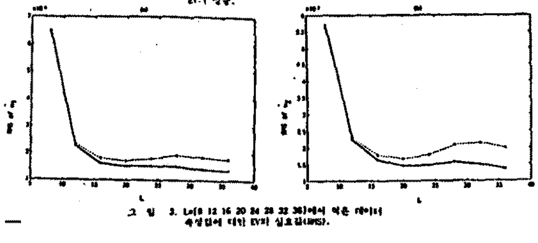
[1] 대한 전기학회에 게재될 "데이터 기조의 공분산 행렬로 구성된 EV방법으로 부터 주파수 추정의 통계적 분석"의 논문을 참고 바람



그 림 1. L=[8 12 16 20 24 28]에서 적은 데이터 측정값에 대한 EV의 성능.



그 림 2. SNR=[10 20 40 60]에서 적은 데이터 측정값에 대한 EV의 성능.



그 림 3. L=[8 12 16 20 24 28 32 36]에서 적은 데이터 측정값에 대한 EV의 실효값(RMS).