

유연성 관절 로보트 매니퓰레이터에 대한 적응 PD 제어기에 관한 연구

• 강지원 김용석 양해원
한양대학교 전기공학과

A Study on the Adaptive PD Controller for robot manipulator with Elastic Joints

• Ji-Won Kang Eung-Seok Kim Hai-Won Yang
Dept. of Electrical Eng. Han-Yang Univ.

Abstract - This note is concerned with the point to point control of manipulators having elastic joints. We present a PD control algorithm which is adaptive with respect to the gravity and elastic parameters of robot manipulators. While the conventional control law is used, a new adaptive law is used to improve the performance. The proposed controller is shown to be stable. It is shown that steady-state position error converges to zero through some simulations concerning the manipulator with three revolute elastic joints.

1. 서론

로보트 매니퓰레이터를 모델링함에 있어서 관절의 탄성도 고려되어야 함이 여러 실험적인 결과들로부터 알 수 있다. 로보트 모델링에서 관절 유연성의 도입으로 운동 방정식이 상당히 복잡하게 되며, 특히 관련된 운동 방정식의 차수는 강체 로보트 경우의 두 배가 된다[1]. 결과적으로 유연성 관절 로보트에 대해서 제시되어온 제어칙들은 강체 토보트의 경우보다 더욱 복잡해진다. 한 예로 방정식은 동적 상태 재환(dynamic state feedback)에 의한 재환 선형화(feedback linearization)에 근거를 두는 것이고[2], 다른 유용한 접근방법으로는 특이 성동 이론(singular perturbation theory)[1]과 integral manifold [3][4]의 개념에 근거를 둔 것들이 제시되어 왔다. 만약 중력 항이 보상되어진다면 간단한 PD제어기가 기준위치에 대해서 강체 매니퓰레이터를 안정화시켜줄 수 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 비록 이러한 강체 로보트(rigid robot)가 static-state feedback에 의하여 정확히 선형화 되어질지라도[5] PD제어기의 안정성은 이러한 성질에 의존하지 않고 토보트 매니퓰레이터의 passivity 성질에 더욱 관련되어져 있다. 그래서 제시된 PD제어기[7]는 passivity 성질과 운동 방정식의 특별한 구조적인 이점을 취했으며 실질적으로 기준위치에 대해서 대국적이며 점근적인 안정도(global asymptotic stability)가 만족됨을 보였다. 그러나 중력과 탄성 파라미터들에 대한 불확실성(uncertainty)이 존재하는 경우[7]에서 제시된 제어기는 안정도는 보장할 수 있지만 정상상태 위치오차를 제거시키기 못한 것이 문제점으로 제시되었다. 이와 같은 어려움에 대처하는 효율적인 방법은 적용제어기법을 적용하는 것이다. 적용제어기는 이를 불확실성을 자동적으로 보상하도록 설계된다.

따라서 본 논문에서는 새로운 적용칙을 도입하므로써 이러한 중력과 탄성 파라미터의 불확실성이 존재하는 경우에도 시스템 내의 모든 신호들의 유계성을 보장하는 적용제어기를 설계하고자 한다.

2. 문제의 정식화

마찰력을 고려한 유연성 관절 매니퓰레이터 시스템은 다음과 같은 미분 방정식으로 표현될 수 있다[7].

$$B(q_1)q + C(q, \dot{q})q + K_F q + e(q_1) + f(q, \dot{q}) = m \quad (1)$$

여기서 $1) q_1, q_2 \in R^n$ 은 각각 속도와 전동기 회전축의 변위.

2) $B(q) : R^{2n} \rightarrow R^{2n \times n}$ 은 모든 $q \in R^n$ 에 대해서 symmetric positive definite인 관성행렬로서 구조는 다음과 같다[1].

$$B(q) = B(q_1) = \begin{bmatrix} B_1(q_1) & B_2(q_1) \\ B_2^T(q_1) & B_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

여기서 B_1 과 B_2 는 $n \times n$ 행렬, B_3 는 actuator의 관성과 기어비에 관계되는 상수의 대각 행렬이다.

3) $C(q, \dot{q})q : R^{2n \times 2n} \rightarrow R^{2n}$ 은 전향력 및 구심력벡터.

4) $K_F = \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_3 \end{bmatrix}$ 로 정의, $K_i = \text{diag}[k_1, \dots, k_n]$ 이며, k_i 는 i 번째 관절의 탄성 상수이다.

5) $e(q_1) = \frac{\partial U_1(q_1)}{\partial q} = \begin{bmatrix} e_1(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$ 인 중력 벡터. (3)

여기서 $e_1 = U_1 / \partial q_1$, $U_1(q_1)$ 은 중력에 의한 위치에너지.

6) $f(q, \dot{q})$: 다음을 만족한다.

$$f(q, 0) = 0 \quad (4)$$

$$\dot{q}^T f(q, \dot{q}) \geq 0 \quad (5)$$

7) $m = [0, \dots, 0, u_1, \dots, u_n]^T$ 로서 u_i 는 i 번째 전동기 actuator로부터 발생되는 토크 입력.

위치벡터 q 와 속도벡터 \dot{q} 는 측정 가능하다고 가정한다.

식(1)로 주어진 유연성 관절 매니퓰레이터에 대한 가정은 다음과 같다.

(A1) $C(q, \dot{q})$ 을 적절히 선정하므로서 $B - 2C$ 가 skew-symmetric 성질을 만족하게 된다[6].

(A2) 아래 식을 만족하는 양의 상수 a 가 존재하므로

$$\|\partial e_1(q_1) / \partial q_1\| \leq a \quad \forall q_1 \in R^n \quad (6)$$

평균치 정리에 의해 부등식 (6)은 아래와 같이 된다.

$$\|e_1(q_1) - e_1(\bar{q}_1)\| \leq a \|q_1 - \bar{q}_1\|, \quad \forall q_1, \bar{q}_1 \in R^n \quad (7)$$

3. 기존의 PD제어기 고찰

이 절에서는 기존의 PD제어기의 문제점에 대해서 논한다. P.Tomei[7]가 제시한 제어칙은 다음과 같다.

$$u = -K_p(q_2 - q_{20}) - K_d \dot{q}_2 + e_1(q_{10}) \quad (8)$$

여기서 K_p 와 K_d 는 $n \times n$ symmetric positive definite matrix이며, q_{10} 은 링크의 원하는 위치이고 q_{20} 은 q_{10} 와

$$q_{20} = q_{10} + K_a^{-1} e_1(q_{10}) \quad (9)$$

의 관계에 있다. 행렬 K 를

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & -K_2 \\ -K_2 & K_3 + K_d \end{bmatrix}$$

와 같이 정의하면 다음 정리가 만족된다.

정리 1 : 만약 $K_a > a$ (K_a 는 행렬 K 의 최소 고유치)가 만족되면 시스템 (1), (8)은 $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $\dot{q} = 0$ 인 평형점에 대하여 대국적이며 점근적으로 안정하다.(증명은 [7] 참조)

그러나 중력과 탄성 파라미터의 불확실성이 존재하는 경우에는 $u = -K_p(q_2 - q_{20}) - K_d \dot{q}_2 + e_1(q_{10}) \quad (10)$ 로 구성되며, 여기서 $q_{20} = q_{10} + K_a^{-1} e_1(q_{10})$ 이다.

정리 2 : 만약 $K_a > a$ 가 만족되면 시스템 (1), (10)은 $q = q_0$, $\dot{q} = 0$ 인 평형점에 대하여 대국적이며 점근적으로 안정하다.(증명은 [7] 참조)

위에서 P.Tomei가 제시한 제어칙 (8)은 대국적이며 점근적인 안정도는 만족하지만(정리 1), 중력과 탄성 파라미터의 불확실성이 존재하는 경우 q_1, q_2 는 원하는 위치인 q_{10}, q_{20} 와는 다른 $q = \bar{q}$ 즉 $q_0 - \bar{q}$ 만큼의 정상상태 위치오차가 발생한다.(정리 2)

이러한 문제점을 보완하는 효율적인 방법으로는 적용제어 기법을 적용하는 것이다. 다음 절에서는 본 논문에서 제시한 알고리즘에 대해서 고찰하기로 한다.

4. 제시된 적용 PD 제어기의 구조

식(8)에서 알 수 있듯이 P.Tomei가 제시한 PD제어기는 관성과 마찰 파라미터의 불확실성에 대해서는 접근적인 안정도를 만족할 수 있지만, 중력과 탄성 파라미터의 불확실성은 제어기의 안정도에 영향을 미칠 수 있음을 알 수 있다. 따라서 이 절에서는 중력과 탄성 파라미터의 불확실성이 존재하는 경우에도 시스템내의 모든 신호들의 유계성을 보장할 수 있는 적용 PD제어기를 제시한다.

P.Tomei가 제시한 제어기

$$u = -K_p(q_2 - q_{20}) - K_d \dot{q}_2 + e_1(q_{10}) \quad (10)$$

에서 $q_{20} = q_{10} + K_e e_1(q_{10})$ 인 점을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u = -K_p(q_2 - q_{10}) - K_d \dot{q}_2 + (K_p K_e^{-1} + 1)e_1(q_{10}) \quad (11)$$

식(11)의 우변에서 중력벡터의 추정치 $e_1(q_{10})$ 는 미지의 파라미터에 대해서 선형이므로 본 논문에서는 식(10)으로부터 제어식을 다음과 같이 재구성 한다.

$$u = -K_p(q_2 - q_{10}) - K_d \dot{q}_2 + Y(q_{10})\theta \quad (12)$$

여기서 $Y(q_{10})$ 는 링크의 원하는 위치로 이루어진 행렬이며, $\theta = \theta + \Delta\theta$ 로서 θ 는 사전에 계산한 값, $\Delta\theta$ 는 실제 값 θ 와 사전에 계산한 값 θ 의 오차에 대한 추정치이다. 따라서 식(10)의 제어입력을 사전에 계산한 값 θ 로만 구성되지만, 본 알고리즘에서는 $\Delta\theta$ 를 추정하기 위하여 Gradient Method를 사용하여 적용식을 다음과 같이 제시한다.

$$\Delta\theta = -\Gamma Y(q_{10})^T \dot{q}_2 \quad (\text{여기서 } \Gamma = \Gamma^T > 0) \quad (13)$$

5. 안정도 해석.

이제 식(1), (12)의 시스템에서 본 논문에서 제시한 적용식(13)을 사용하였을 경우의 안정도에 대해서 살펴보기로 한다. $K_m > a$ 라 가정한다. 다음과 같은 $P_1(q)$ 를 정의하자.

$$P_1(q) = 1/2(q - q_0)^T K(q - q_0) + U_1(q_1) - q^T e(q_{10})$$

$P_1(q)$ 의 stationary point는 아래 식의 해가 된다.

$$\partial P_1(q)/\partial q = 0 \quad \text{즉 } K(q - q_0) = e(q_{10}) - e(q_1)$$

여기서 식(7)을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\|K(q - q_0)\| \geq K_m \|q - q_0\| > a \|q - q_0\|$$

$$\geq \|e(q_{10}) - e(q_1)\|, \quad \forall q \neq q_0$$

그러므로 $P_1(q)$ 의 유일한 stationary point는 $q = q_0$ 이며,

$\partial^2 P_1(q)/\partial q^2 = K + \partial e(q_1)/\partial q_0$ 으로 식(6)과 가정 $K_m > a$ 에 의하여 첫 식의 우변에 있는 행렬은 positive definite이다. 결론적으로 $q = q_0$ 는 $P_1(q)$ 의 absolute minimum point가 된다.

이제 신호들의 유계성을 보이기 위하여 Lyapunov함수 후보를 다음과 같이 선정한다.

$$V(q, \dot{q}, \theta) = 1/2 \dot{q}^T B(q_1) \dot{q} + P_1(q) - P_1(q_0) + 1/2 \theta^T \Gamma^{-1} \theta$$

여기서 $\theta = \theta - \theta_0$ 로 정의하며 θ 는 파라미터 오차벡터를 나타낸다. (A1)과 식(3)을 이용하면 위의 함수 V 의 1계 도함수는

$$\dot{V}(q, \dot{q}, \theta) = -\dot{q}_2^T K_D \dot{q}_2 - \dot{q}^T f(q, \dot{q}) - \dot{q}^T K_E q - \dot{q}_2^T K_p (q_2 - q_{20}) \\ + \dot{q}^T K(q - q_0) + \dot{q}_2^T Y(q_{10})\theta - \dot{q}_1^T e_1(q_{10}) + \theta^T \Gamma^{-1} \theta$$

와 같이 된다. 식 (10)에서 $q_{10} = q_{20} - K_e e_1(q_{10})$ 이므로 첫 식은

$$\dot{V}(q, \dot{q}, \theta) = -\dot{q}_2^T K_D \dot{q}_2 - \dot{q}^T f(q, \dot{q}) + (q_1 - q_2)^T K_e (q_{20} - q_{10}) \\ - \dot{q}_2^T K_p (q_{20} - q_{10}) + \dot{q}_2^T e_1(q_{10}) - \dot{q}_1^T e_1(q_{10}) + \theta^T \Gamma^{-1} \theta \quad (14)$$

와 같이 된다. 식(14)의 우변에 $\dot{q}_2^T e_1(q_{10})$ 을 더하고 빼면

$$\dot{V}(q, \dot{q}, \theta) = -\dot{q}_2^T K_D \dot{q}_2 - \dot{q}^T f(q, \dot{q}) + (q_1 - q_2)^T [K_e (q_{20} - q_{10}) \\ - e_1(q_{10})] - \dot{q}_2^T K_p \widetilde{q}_{20} - \dot{q}_2^T e_1(q_{10}) + \theta^T \Gamma^{-1} \theta \quad (15)$$

와 같이 되며 식(15)의 우변항 중에서

$$-\dot{q}_2^T K_p \widetilde{q}_{20} - \dot{q}_2^T e_1(q_{10}) = -\dot{q}_2^T Y(q_{10}) \theta \quad (16)$$

로 쓸 수 있다. 식(9)와, 적용식(13)에서 파라미터가 상수인 경우 $\theta = \Delta\theta$ 의 관계를 이용하면 식(15)는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{V}(q, \dot{q}) = -\dot{q}_2^T K_D \dot{q}_2 - \dot{q}^T f(q, \dot{q}) \quad (17)$$

식(5)를 이용하면 \dot{V} 가 negative semidefinite임을 알 수 있다. 즉 식(17)에서 \dot{q}_2 가 절근적으로 0이 되며, 다른 모든 신호들이 유계가 됨을 알 수 있다.

6. 컴퓨터 모의실험 및 결과

앞 절에서는 제시된 알고리즘의 타당성을 Lyapunov 안정도 이론에 입각하여 입증하였다. 따라서 본 절에서는 이를 뒷받침하기 위하여 파라미터 불확실성이 존재하는 경우 참고문헌[7]에서 제시한 알고리즘과 본 논문에서 제시된 알고리즘을 세계의 회전 유연성 관절 미니플레이터에 대해서 컴퓨터 모의실험을 통하여 비교해 보기로 한다.

B, e, K_p, K_d의 0이 아닌 요소들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} B_{11} &= a_1 + a_2 \cos q_{1,2} + a_3 \cos(q_{1,2} + q_{1,3}) \\ &+ a_4 \cos q_{1,2} \cos(q_{1,2} + q_{1,3}), \quad B_{22} = a_5 + a_6 \cos q_{1,3} \\ B_{23} &= a_8 + a_7 \cos q_{1,3}, \quad B_{26} = a_9, \quad B_{32} = B_{23}, \quad B_{62} = B_{26} \\ B_{33} &= a_8, \quad B_{44} = a_{10}, \quad B_{55} = a_{11}, \quad B_{66} = a_{10} \end{aligned}$$

$$e_2 = a_{12} \cos q_{1,2} + a_{13} \cos(q_{1,2} + q_{1,3})$$

$$e_3 = a_{13} \cos(q_{1,2} + q_{1,3})$$

$$k_1 = 14210, \quad k_2 = 29800, \quad k_3 = 14210$$

$$C_{11} = -1/2(r(q_1)q_{1,2} + s(q_1)q_{1,3}), \quad C_{12} = -1/2r(q_1)q_{1,1}$$

$$C_{13} = -1/2s(q_1)q_{1,1}, \quad C_{21} = 1/2r(q_1)q_{1,1}$$

$$C_{22} = -1/2t(q_1)q_{1,3}, \quad C_{23} = -1/2t(q_1)(q_{1,2} + q_{1,3})$$

$$C_{31} = 1/2s(q_1)q_{1,1}, \quad C_{32} = 1/2t(q_1)q_{1,2}$$

여기서,

$$r(q_1) = 2a_2 \sin q_{1,2} \cos q_{1,2} + a_3 \sin 2(q_{1,2} + q_{1,3}) \\ + a_4 \sin(2q_{1,2} + q_{1,3})$$

$$s(q_1) = a_3 \sin 2(q_{1,2} + q_{1,3}) + a_4 \cos q_{1,2} \sin(q_{1,2} + q_{1,3})$$

$$t(q_1) = a_4 \sin q_{1,3}$$

그리고 초기조건: $q_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$ 이며 각 링크 길이는 0.5m이다.

모의실험은 제안한 알고리즘의 강인성을 보이기 위하여 실제 탄성 상수가 nominal 탄성 상수보다 50 * 크고, 실제 부하는 5 Kg이며 nominal 부하가 0 Kg인 경우에 대해서 행하였으며 다음의 두 경우를 고려하였다.

(1) 그림 1 ~ 2 : $K_p = \text{diag}[3000], K_d = \text{diag}[1000]$.

계산된 파라미터 참값은 $\theta_1 = 19.8, \theta_2 = 24.37, \theta_3 = 33.91$

(2) 그림 3 ~ 4 : $K_p = \text{diag}[400], K_d = \text{diag}[200]$.

$\theta_1 = 23.87, \theta_2 = 24.48, \theta_3 = 24.47$ 이다.

물론 제어기는 nominal 파라미터들로 구성된다.

nominal 부하 0 Kg, 5 Kg에 대한 파라미터 a_i 의 값은 아래 표 1에 주어진다.

표 1. 부하 = 0 Kg, 5 Kg에 대한 로보트 파라미터

Table 1. Robot parameters for different payloads.

부하 = 0 Kg	부하 = 5 Kg
$a_1 = 0.0840$	$a_1 = 0.0840$
$a_2 = 9.2063$	$a_2 = 10.456$
$a_3 = 2.4515$	$a_3 = 3.7015$
$a_4 = 5.4000$	$a_4 = 7.9000$
$a_5 = 11.743$	$a_5 = 14.243$
$a_6 = 2.6274$	$a_6 = 3.8774$
$a_7 = 2.7000$	$a_7 = 3.9500$
$a_8 = 2.4817$	$a_8 = 3.7317$
$a_9 = 0.1456$	$a_9 = 0.1456$
$a_{10} = 23.296$	$a_{10} = 23.296$
$a_{11} = 70.656$	$a_{11} = 70.656$
$a_{12} = 189.17$	$a_{12} = 213.67$
$a_{13} = 52.928$	$a_{13} = 77.432$

그림 1 ~ 4는 참고문헌[7]에서 제시된 알고리즘을 사용한 경우와 본 논문에서 제시한 알고리즘을 end effector의 초기 오차가 55mm, 425mm인 경우에 대한 비교 결과이다. 컴퓨터 모의실험 결과로 부터 알 수 있듯이 참고문헌[7]에서 제시된 알고리즘은 파라미터의 불확실성이 존재하는 경우 정상상태 위치오차가 존재하지만 본 논문에서 제시한 알고리즘을 사용한 경우 end effector의 초기오차와 K_p, K_d 값에 상관없이 정상상태 위치오차가 0으로 수렴함을 알 수 있다.

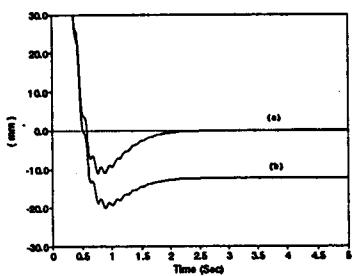


그림 1a. Cartesian space에서의 위치오차. (초기오차=55mm)
(a) 본 논문의 경우 (b) [7]의 경우
Fig 1a. Position error in Cartesian space. (initial error=55mm)
(a) Proposed Algorithm (b) P.Tomei [7]

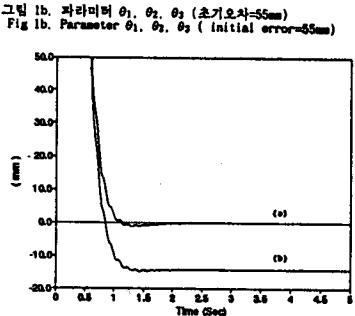
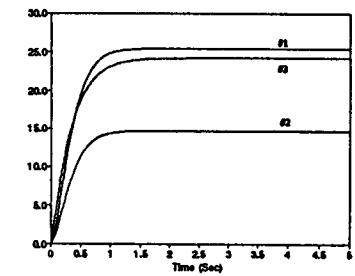


그림 2a. Cartesian space에서의 위치오차. (초기오차=425mm)
(a) 본 논문의 경우 (b) [7]의 경우
Fig 2a. Position error in Cartesian space. (initial error=425mm)
(a) Proposed Algorithm (b) P.Tomei [7]

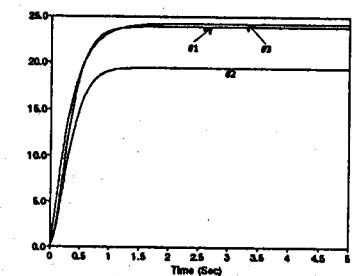


그림 2b. 파라미터 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (초기오차=425mm)
Fig 2b. Parameter $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (initial error=425mm)

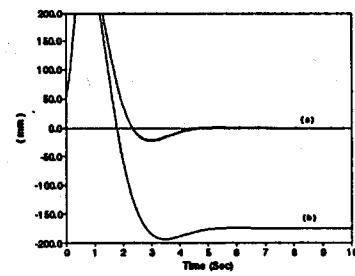


그림 3a. Cartesian space에서의 위치오차. (초기오차=55mm)
(a) 본 논문의 경우 (b) [7]의 경우
Fig 3a. Position error in Cartesian space. (initial error=55mm)
(a) Proposed Algorithm (b) P.Tomei [7]

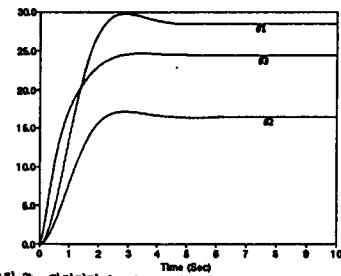


그림 3b. 파라미터 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (초기오차=55mm)
Fig 3b. Parameter $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (initial error=55mm)

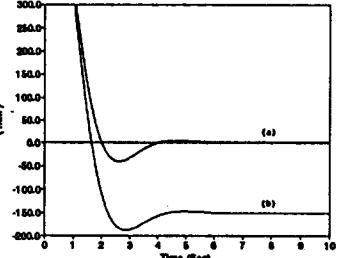


그림 4a. Cartesian space에서의 위치오차. (초기오차=425mm)
(a) 본 논문의 경우 (b) [7]의 경우
Fig 4a. Position error in Cartesian space. (initial error=425mm)
(a) Proposed Algorithm (b) P.Tomei [7]

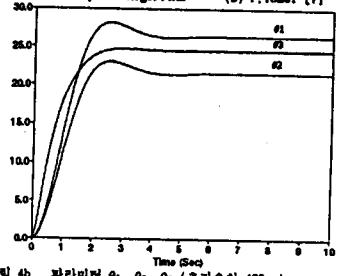


그림 4b. 파라미터 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (초기오차=425mm)
Fig 4b. Parameter $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ (initial error=425mm)

로보트 dynamic model에 관절의 탄성을 도입하면 강체 로보트의 경우에 얻는 성질은 만족되지 않지만 passivity 성질은 보전되므로 P.Tomei[7]는 강체 로보트에 사용한 것과 일치하는 제어칙을 사용하여 안정도는 보장했지만 파라미터 불확실성이 존재하는 경우 정상상태 위치오차의 수렴성은 보장하지 못했다.

본 논문에서는 제어칙은 기존의 것을[7] 재구성하여 사용하였으나 새로운 적용칙을 도입하므로써 중력과 탄성 파라미터들의 불확실성이 존재하는 경우에도 시스템내의 모든 신호들의 유계성이 만족됨을 Lyapunov 안정도 이론을 통해 입증하였다. 그러나 정상상태 위치오차가 0으로 수렴함은 컴퓨터 모의실험만을 통하여 입증하였으므로 수학적인 해석을 통한 안정도 증명이 앞으로의 연구과제로 남는다.

7. 결론

- [1] R. Marino and S. Nicosia, "Singular perturbation techniques in the adaptive control of elastic robots," the IFAC Symp. Robot Contr. Barcelona, Spain, Nov. 1985.
- [2] A. De Luca, A. Isidori, and F. Nicolo, "Control of robot arm with elastic joints via nonlinear dynamic feedback," the 24th Conf. Decision Contr., Ft. Lauderdale, FL, Dec. 1985.
- [3] K. Khorasani and P. V. Kokotovic, "Feedback linearization of a flexible manipulator near its rigid body manifold," Syst. Contr. Lett., vol. 6, pp. 187-192, 1985.
- [4] M. W. Spong, K. Khorasani, and P. V. Kokotovic, "An integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots," IEEE J. Robot. Automation, vol. RA-3, pp. 291-300, 1987.
- [5] E. Freund, "Fast nonlinear control with arbitrary pole placement for industrial robots and manipulators," Int. J. Robot. Res., vol. 1, pp. 65-78, 1982.
- [6] J. E. Slotine and W. Li, "On the adaptive control of robot manipulators," Int. J. Robot. Res., vol. 6, pp. 49-59, 1987.
- [7] P. Tomei, "A simple PD Controller for Robots with Elastic Joints," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-36, No. 10, October 1991.