

예측 제어기법을 이용한 자기동조 PID 제어기의 구현

·유연운* 김종만* 김성중* 이창구**

* 전북대학교 제어계측 공학과

** 한국전자통신연구소

Implementation of self-tuning PID-Controller based on predictive control technique

· Y.W-Yu*, J.M-Kim*, S.J-Kim* C.K-Lee**

· Dept. of Control & Instrumentation Eng.
Chunbuk National University

** ETRI

Abstract

In this paper, We propose a PID-type of self-tuning algorithm which is based on the parameter estimation and the minimization of the cost function. We use the CARIMA model for parameter estimation and determine the discrete PID controller parameters by minimizing the cost function which considers the quadratic deviations of the predicted output over the set-point as well as the control efforts. Also, The algorithm is extended by incorporating constraints of the control signal. Simulations are performed to illustrate the efficiency of the proposed method.

1. 서론

PID 제어기는 구현의 단순성, 효율성 그리고 넓은 적용성으로 인해 산업현장에서 가장 널리 사용되는 제어기이다. 그러나 장시간 지연시간이나 심한 비선형 특성을 갖는다면 제대로 동작하지 못할 뿐 아니라 부하 외란이 랜덤(random)하게 동작할 때는 동조가 어렵고, 경험있는 운전자의 시행착오 절차에 의해 동조가 된다 할지라도 동작 후반부에서 성능이 저하될 것이다. 현대 적응 제어 알고리즘이 이런 문제에 좋은 해결책을 제시하지만, 제어기 구조가 PID 형태를 갖지 못해 내부 기구에 관한 현장 운전자의 지식부족으로 인하여 적응 제어 알고리즘이 산업 현장에 보급되지 못하고 있다. [1-2] 그래서 공정의 입, 출력 정보를 이용하여 온라인으로 최적의 파라미터를 결정할 수 있는 알고리즘과 널리 보급된 PID 제어기를 결합하는 것이 좋은 대안이다.

자기 동조형 제어기는 Astrom과 Wittenmark의 최소 분산 제어 이후 Clarke와 Gawthrop이 확장된 개념을 도입하였고 페루프 특성근이 주어진 위치에 놓이게 하는 극배치 방법이 Astrom과 Wittenmark에 의해 제시되었다. 그리고 PID 구조를 갖는 자기 동조 제어기는 Iserman, Gawthrop등이 연구하였

고, 기존의 극배치 방법이 PID 제어기를 동조하기 위해 적용되었으나 적용범위가 협소하다. Banyasz와 Keviczky는 지연 시간이 있는 2차 플랜트에서 플랜트 극점을 삭제하고 규정된 위상 마진을 얻기 위해 PID의 다항식 $G(z^{-1})$ 를 사용하였고, Cameron과 Seborg는 GMV(Generalized Minimum Variance) 기법을 사용하여 PID 구조를 갖는 적응 제어기를 제시하여 이산 시간 제어기를 연속 시간 파라미터 집합으로 변형하는 기법을 도입하였으며, Vega와 Zarop[4]는 이산 시간 제어기 파라미터를 최적화하기 위해 LQG 형태의 성능 지수를 도입하였다.

그러나 적응 제어기를 도입할 때 극 배치 방법은 지연 시간이 변하는 경우에는 잘 대처할 수 있지만 모델 차수의 가정에 견실하지 못하고 GMV 방법은 모델 차수의 가정에 견실하지만 지연 시간이 변하면 제대로 동작할 수 없다. [5] 그래서 최대도 가능한 플랜트의 지연 시간보다 더 큰 시간 영역에 대해 출력을 예측하고 명백한 플랜트 형성을 통해서 지연 시간과 모델 차수의 가정에 더욱 견실한 GPC(Generalized Predictive Control) 기법을 이용하여 PID 파라미터를 선정하는 것이 필요하다. 또한, 부하 외란(load disturbance)이 랜덤(random)하게 동작하고 있는 공정 제어에서 오프셋(offset)이 없는 페루프 동작을 얻기 위해 제어기가 적분 동작을 포함하도록 CARIMA (controlled autoregressive integrated moving average) 형태의 공정 모델을 사용하고 이산 PID 제어기 파라미터를 연속 시간 파라미터에 대응시키는 것이 중요하다.

이 논문에서는 CARIMA 형태의 공정 모델을 최소 자승 오차법으로 추정하며, 추정된 파라미터 다항식을 이용하여 Diophantine 방정식을 순환적으로 해결하고 플랜트의 출력을 예측한다. 예측한 플랜트의 출력이 미래의 설정치에 가깝게 도달하도록 하고 제어 입력이 최소가 되는 성능 지수를 사용하여 PID 제어기의 이산 파라미터를 결정하고 이를 연속 시간 파라미터에 대응되게 하였다.

2. 공정 모델과 출력 예측

공정의 동특성과 잡음 환경의 영향이 연속 시간 모델의 적절한 이산화로 다음과 같은 SISO CARIMA 모델로 표현된다고 가정하자.

$$A(q^{-1}) y(t) = B(q^{-1}) u(t-1) + C(q^{-1}) \varepsilon(t)/\Delta \quad (1)$$

단, A, B, C는 후향 추이 연산자 q^{-1} 의 다항식이다.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_n q^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_n q^{-n}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_n q^{-n}$$

공정 모델이 지연 시간을 갖는다면 다항식 $B(q^{-1})$ 의 첫 번째 요소들이 영이 되며, (1)식에서 $y(t)$ 는 측정된 출력, $u(t)$ 는 제어 입력, $\varepsilon(t)$ 는 평균이 영이고 분산이 σ^2 인 백색 잡음이다. 전계 과정의 계산을 간단하게 하기 위해 $C(q^{-1})$ 의 다항식은 1로 선택한다. (1)식의 모델에 근거한 미래의 j 스텝 출력 예측자를 얻기 위해 다음 항등식을 해결해야 한다.

$$1 = E_j(q^{-1}) A \Delta + q^{-j} F_j(q^{-1}) \quad (2)$$

여기에서 E_j 와 F_j 는 주어진 $A(q^{-1})$ 와 예측 구간 j 에 의하여 유일하게 정의되는 다항식이며, (1)식에 $E_j A \Delta$ 를 곱하면

$$E_j A \Delta y(t+j) = E_j B \Delta u(t+j-1) + E_j \varepsilon(t+j)$$

이 되며, (2)식의 관계를 이용하여 정리하면 (3)식과 같은 출력 예측자를 얻을 수 있다.

$$y(t+j) = E_j B \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) + E_j \varepsilon(t+j) \quad (3)$$

위 식에서 $E_j(q^{-1})$ 는 $j-1$ 차이고 잡음 성분이 모두 미래값이므로 최적의 출력 예측자 $\hat{y}(t+j)$ 는 $G(q^{-1}) = E_j B(q^{-1})$ 라 하면 (4)식을 얻을 수 있다.

$$\hat{y}(t+j) = G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) \quad (4)$$

다항식 $G(q^{-1})$ 를 계산하는 방법은

$$G(q^{-1}) = B(q^{-1}) [1 - q^{-j} F_j(q^{-1})] / A(q^{-1}) \Delta \quad (5)$$

(5)식의 관계로부터 폴란트 스텝 응답의 j 개의 항을 취할 수 있다. [7] j 의 전구간에 대해 E_j 와 F_j 를 수치적으로 해결하는 방법이나 각 구간에 대한 예측자를 따로 구하는 방법보다는 Diophantine 방정식을 순환적으로 해결하는 것이 더 간단한 방법이다.

다음과 같은 표현을 가정하고

$$E = E_j, \quad R = E_{j+1}, \quad F = F_j, \quad S = F_{j+1}, \quad \tilde{A} = A \Delta$$

두개의 Diophantine 방정식을 생각하면

$$1 = E \tilde{A} + q^{-j} F \quad (6a)$$

$$1 = R \tilde{A} + q^{-(j+1)} S \quad (6b)$$

(6)식이 되고 이 식으로부터 E_j, F_j, G_j 를 반복적으로 구할 수 있는 알고리즘이 얻어진다.

$$r_j = f_0$$

$$s_j = f_{j+1} - \tilde{a}_{j+1} r_j$$

$$R(q^{-1}) = E(q^{-1}) + q^{-j} r_j$$

$$G_{j+1} = B(q^{-1}) R(q^{-1})$$

반복 수행을 위한 초기값을 구하기 위해 $j = 1$ 에 대해 항등식 (2)식을 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$1 = E_1 \tilde{A} + q^{-1} F_1$$

\tilde{A} 의 첫 번째 항이 1이므로

$$E_1 = 1, \quad F_1 = q(1 - \tilde{A})$$

이 되어 E_j, F_j, G_j 를 순환적으로 계산할 수 있다.

3. PID 제어와 구속 조건

연속 시간에서 표준형 PID 제어기는 (7)식으로 표현된다.

$$u(t) = K \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{d e(t)}{d t} \right] \quad (7)$$

단, K, T_i, T_d 는 각각 이득, 적분 시간, 미분 시간이다.

시간 t 에서 $u(t)$ 는 제어 신호이고 $e(t)$ 는 설정치와 출력간의 오차이며, 샘플링 주기 T_s 로 (7)식을 이산화하면 다음 식과 같이 속도형으로 표현된다.

$$u(t) = \frac{G(z^{-1})}{1 - z^{-1}} e(t) \quad (8)$$

$$G(z^{-1}) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} \quad (9)$$

연속 시간 PID 계수값과 이산형 PID 계수값간의 관계를 표시하면

$$K = -(g_1 + 2g_2) \quad (10a)$$

$$T_d = -T_s g_2 / (g_1 + 2g_2) \quad (10b)$$

$$T_i = -T_s (g_1 + 2g_2) / (g_0 + g_1 + g_2) \quad (10c)$$

이 되며, K, T_i, T_d 의 계수값들은 유한한 양의 스칼라값이어야 하므로 이산 PID 제어기 파라미터 값은 다음과 같이 구속된다.

$$g_2 > \varepsilon_1 > 0 \quad (11a)$$

$$g_1 + 2g_2 < -\varepsilon_2 < 0 \quad (11b)$$

$$g_0 + g_1 + g_2 > \epsilon_3 > 0 \quad (11c)$$

단, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 는 작은 수

PID 동작을 보장하기 위해 (11)식의 조건을 만족해야 하며, 그렇지 못한 경우에 최적의 이산 파라미터를 얻기 위해 이산 값 $g(t)$ 는 무시되어야 한다. 위 식의 부등식은 다음의 행렬 형태로 표현된다.

$$g^T h_1 > \epsilon_1$$

단,

$$h_1 = (0 \ 0 \ 1)^T \quad (12a)$$

$$h_2 = (0 \ -1 \ 2)^T \quad (12b)$$

$$h_3 = (1 \ 1 \ 1)^T \quad (12c)$$

시간 t 에서 최적의 이산 파라미터를 결정하는 단계는 다음과 같다.

1. $g = g(t)$ 라 놓고,
2. g 가 위 식을 만족하면 4로 가라.
3. $g = g + \frac{P(t-1) h_i}{h_i^T P(t-1) h_i} (\epsilon_i - g^T h_i)$
4. $g(t) = g$ 라 놓는다.

$P(t-1)$ 행렬에는 단위 행렬을 사용하여 이산 시간 제어기 파라미터가 연속 시간 파라미터에 대응하지 않는 경우에는 위의 4 단계를 통해서 최적의 연속 시간 파라미터에 대응되게 하였다.

4. 자기 동조 PID 제어기

출력 예측자 $y(t+j)$, 제어 오차 e , 과거의 제어 신호 $u(t-1)$ 등에 의해 PID 파라미터를 반복적으로 결정하기 위해 다음과 같은 GPC 사상을 생각하자.

$$J(N1, N2) = E \left[\sum_{j=N1}^{N2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \sum_{j=N1}^{N2} \lambda(j) \Delta u(t+j-1)^2 \right] \quad (13)$$

단, $N1$ 은 최소 출력구간

$N2$ 는 최대 출력구간

$\lambda(j)$ 는 제어 가중치 수열

시간 $t+j$ 에서 원하는 설정값 $w(t+j)$ 는 사전에 모든 값이 알려져지는 프로그램 제어를 가정하고, $j > Nu$ 인 동안은

$\Delta u(t+j-1) = 0$ 으로 생각하는 후퇴구간제어(receding horizon control)를 사용한다. 또한 PID 제어기는 $du(t)$ 만을 결정하므로 제어구간 Nu 는 1로 선택하고 $\lambda(j)$ 는 λ 로 선정하면, 제어기 파라미터 g 에 대하여 최소화되는 GPC 사상은 다음과 같이 된다.

$$J(g) = E \left[\sum_{j=1}^{N2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \right] \quad (14)$$

$$J(g) = \sum_{j=1}^{N2} [y(t+j) - w(t+j)]^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \quad (15)$$

파라미터 추정 θ 에 의해 계산된 예측자를 사용하면

$$J(g, \theta) = \sum_{j=1}^{N2} [G_j \Delta u(t+j-1) + F_j y(t) - w(t+j)]^2 + \lambda \Delta u(t)^2 \quad (16)$$

이 되고, 제어기 파라미터 g 에 관한 식을 유도하기 위해 (16)식에 $G_{j-1} \Delta u(t)$ 를 더하고 맨후 식을 정리하면 (17)식과 같이 되고,

$$J(g) = \sum_{j=1}^{N2} [y(t+j) - w(t+j) - G_{j-1} \Delta u(t) + G_{j-1} \Delta u(t)]^2 + \lambda \Delta u(t)^2$$

$$g = \min [b_t^T g + 1/2 g^T C_t g] \quad (17)$$

비용함수를 최소화시키는 g 는

$$g = -b_t / C_t \text{가 된다.}$$

여기서 b_t 와 C_t 는 다음과 같이 주어지고,

$$b_t = \pi_b(t) e_t, \quad C_t = \pi_c(t) e_t e_t^T \quad (18)$$

$\pi_b(t)$ 와 $\pi_c(t)$ 를 계산하는 과정은

$$\pi_b(t) = 2 \sum_{j=1}^{N2} G_{j-1} [y(t+j) - G_{j-1} \Delta u(t) - w(t+j)] \quad (19)$$

$$\pi_c(t) = 2 \left[\sum_{j=1}^{N2} G_{j-1}^2 + \lambda \right] \quad (20)$$

이 되며, π_b 는 제어 오차를 반영하고 π_c 는 제어 신호의 가중치를 반영한다. 이렇게 구한 제어기 파라미터 g 는

$$g = - \frac{\pi_b(t)}{\pi_c(t)} (e_t e_t^T)^{-1} e_t$$

가 되며 역행렬을 구하는 과정을 피하기 위해 역행렬에 관한 명제를 사용하면 이산 제어기 파라미터를 순환적으로 계산할 수 있다. [8]

$$g(t) = g(t-1) - \frac{\pi_c(t) P(t-1) e_t}{1 + \pi_c(t) e_t^T P(t-1) e_t} [e_t^T g(t-1) + \frac{\pi_b(t)}{\pi_c(t)}] \quad (21)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{\pi_c(t) P(t-1) e_t e_t^T P(t-1)}{1 + \pi_c(t) e_t^T P(t-1) e_t} \quad (22)$$

5. 모의 실험

제안한 자기 동조 PID 제어기의 출력 특성을 알아보기 위해 임의의 공정 모델을 대상으로 모의실험하였다.

$$\text{(공정모델 1)} \quad G_1(s) = 1/(1+10s+25s^2) \quad (22)$$

$$\text{(공정모델 2)} \quad G_2(s) = 1/(1+10s)(1+5s) \quad (23)$$

샘플링 시간을 1초와 4초로 각각 이산화하였고, 최소자승오

차법에서 망각요소(forgetting factor)는 0.98로 선택하였으며 $t=0$ 인 순간에 0.28의 초기 입력을 가하고 파라미터 추정을 하였다. 제어 입력에 대한 기증요소는 4.98, 출력 구간을 각각 5와 10으로 선정하였을 때 최적의 PID 다항식은

$$G_1^*(z^{-1}) = 0.256 - 0.267z^{-1} + 0.133z^{-2}$$

$$G_2^*(z^{-1}) = 0.256 - 0.267z^{-1} + 0.133z^{-2}$$

가 되었으며 지연 시간이 없는 경우와 2초의 지연 시간이 있을 때 출력 특성은 다음과 같다.

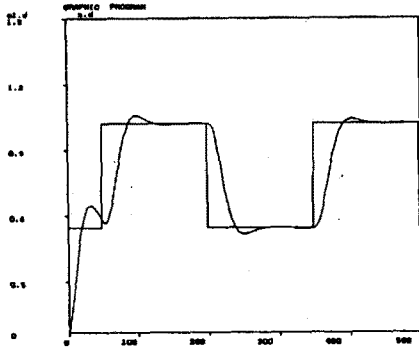


그림 1. 공정모델 1의 응답
FIG. 1. Response of the process model 1

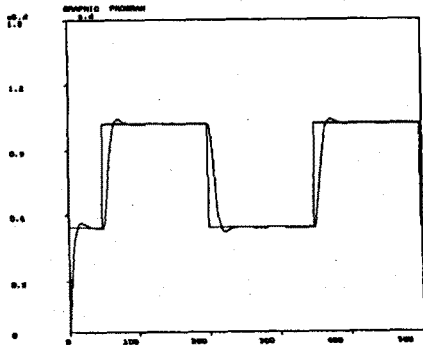


그림 2. 공정모델 2의 응답
FIG. 2. Response of the process model 2

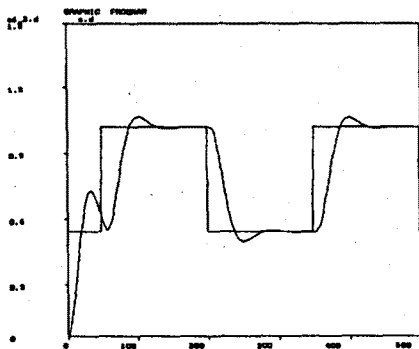


그림 3. 지연시간이 있는 공정모델 1의 응답
FIG. 3. Response of the process model 1 with delay

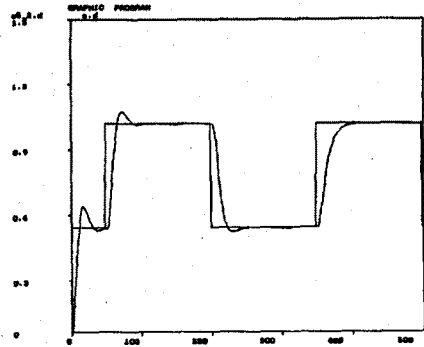


그림 4. 지연시간이 있는 공정모델 2의 응답
FIG. 4. Response of the process model 2 with delay

6. 결론

공정의 동특성을 CARIMA 모델로 가정하여 최소자승오차법으로 파라미터를 추정하고, 추정한 파라미터를 이용하여 GPC 사양을 최소화하는 이산 PID 파라미터를 결정하여 연속 시간 파라미터에 대응되게 하였다.

임의의 공정 모델을 가지고 모의실험한 결과 설정치에 잘 도달하는 우수한 성능을 보였다. 따라서 제안한 동조 방법은 산업 현장에서 널리 사용되는 PID 제어기의 설계에 유용하리라 생각하며, 차후의 연구 방향은 1) 견실한 추정으로 시변인 경우에 대처하고, 2) 출력구간과 가중치 요소의 선택에 관한 경험규칙을 개발하여야겠다.

참고 문헌

- [1] Cameron, F. and D.E. Seborg, "A self-tuning controller with a PID structure", *Int. J. Control*, 38, PP. 401, 1983.
- [2] P. Vega, C. Prada and V. Alexandre, "Self-tuning predictive PID controller", *IEE Proc.*, Vol. 138, No. 3, May 1991.
- [3] P. J. Gawthrop, "Self-Tuning PID controller : Algorithms and Implementation", *IEEE Tr. on A.C.*, Vol. 31, No. 3, March 1986.
- [4] Vega, P. and M. B. Zarrop, "Optimal approaches to self-tuning PID control", *Proc. Adaptive systems in control and signal processing*, Glasgow 1989.
- [5] Arne Henningsen and Anders Christensen, "A PID Autotuner utilizing GPC and constraint optimization", *Proc. 29th Conference on Dision and Control*, 1980.
- [6] Clarke, K. W., C. Mohtadi and P. S. Tuffs, "Generalized Predictive Control", *Automatica*, Vol. 23, NO. 2, pp. 137, 1987.
- [7] K. J. Astrom and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1989.
- [8] Goodwin, G. C. and K. S. Sin, *Adaptive Filtering, Prediction and control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.