

최적한 시변 수렴인자 결정법에 의한 적응 모델링

안 두 수* · 김 중 부** · 김 재 일* · 임 국 현***

* 성균관대학교 전기공학과 ** 인덕전문대학 전자과
 * 동의공업전문대학 전산과 *** (주)태산정밀 기술연구소

Adaptive Modeling by Determination Algorithm of Optimal Time-varying Convergence Factor

Ahn, Doo-Soo* · Kim, Jong-Boo** · Kim, Jae-Il* · Yim, Kook-Hyun ***

* Dept. of Electrical Eng., Sung Kyun Kwan Univ.
 ** Dept. of Electronic Eng., In Duk Institute of Design.
 * Dept. of Computer Science, Dong Eui Technical College.
 *** Research & Development Center, Tae San Precision Co.

A B S T R A C T

This paper presents an algorithm for improvement of convergence in Adaptive Filter. The proposed algorithm employs the time-varying Convergence Factor to Block LMS adaptation algorithm. Computer simulation for Adaptive Modeling of time-invarying and time-varying unknown systems has been performed.

Performance comparisons between LMS, BLMS algorithms which have fixed Convergence Factors obtained by trial and error and the proposed algorithm which has time-varying Convergence Factor show that the proposed algorithm is superior to LMS and BLMS algorithm with respect to speed and accuracy of adaptation.

1. 서 론

횡단형 적응필터의 가중치(Weight Values)를 조정하기 위한 적응 알고리즘인 그라디언트에 기초한 기법은 계산이 복잡하지 않아서, 실제에의 구현이 용이 하지만 수렴 속도가 느리다는 문제점이 존재한다[1-2].

Widrow 와 Hoff가 최소 평균자승(Least Mean Square, LMS)기법을 개발한 이후 이에 관한 연구는 수렴속도의 향상에 목적을 두고 있다[3]. 따라서, 본 논문은 수렴속도의 향상을 위해 기존의 적응 알고리즘이 시행착오에 의한 시불변 수렴인자를 사용하는 것과는 달리 수렴인자의 시변치를 결정하는 기법을 제시하고자 한다.

2. 적응 필터

횡단형 적응필터의 출력 y_k 는 다음과 같다[3].

$$y_k = \sum_{l=1}^N w_{kl} x_{k-l+1} = X_k^T W_k = W_k^T X_k \quad (2.1)$$

이때, k 는 시간, N 은 결합기의 탭 수이다. 적응 필터의 목적은 횡단형 필터 출력이 요구응답(Desired Response) 신호와 같아지도록 하중벡터를 조정하는데 있다.

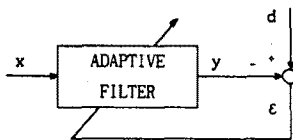


그림 2-1 적응 필터
 Fig. 2-1 Adaptive Filter

그림 2-1로 부터 k 시간에서의 요구응답신호를 d_k 라고 할때 e_k , d_k , 와 X_k 는 Stationary 라고 가정하면 다음과 같은 평균 자승오차를 구할 수 있다[4].

$$\xi = E\{e_k^2\} = E\{d_k^2\} + W_k^T R W_k - 2P^T W_k \quad (2.2)$$

행렬 R 은 입력에 대한 $N \times N$ Autocorrelation행렬이며, 벡터 P 는 요구응답과 입력 요소들 사이의 Cross-correlation이다.

식(2.2)를 전개해보면 입력과 요구응답이 Stationary 라는 가정하에 평균 자승오차 ξ 는 하중 계수 벡터의 볼록함수 형태(Quadratic Form)라는 것을 알 수 있다. 적응처리 과정은 이러한 볼록함수의 최소값을 구하는 과정이다.

3. 적응 기법

3-1. 최소 평균 자승 (Least Mean Square, LMS) 기법

기술기에 기초한 적응 알고리즘 중 가장 전형적인 기법이 최소 평균자승 기법이다. 이 기법은 다음의 Steepest Descent기법에서[1-2, 5] 도입되었다.

$$W_{k+1} = W_k + \mu(-V_k) \quad (3.1)$$

여기서 μ 는 수렴인자이며, V_k 는 평균 자승오차의 가중치에 대한 Gradient이다. 이때, 평균 자승오차의 Gradient를 사용함에 있어 기대값 계산의 문제점을 해결하기 위해 Widrow와 Hoff는 Gradient의 추정치로 다음과 같은 자승오차(Squared Error)의 Gradient 를 사용하였다.

$$\hat{V}_k = \frac{\partial(SE_k)}{\partial W_k} = -2e_k X_k \quad (3.2)$$

Steepest Descent 기법에 식(3.2)와 같은 Gradient 의 추정치를 사용하면 다음의 최소 평균자승(Least Mean Square, LMS) 기법이 유도된다.

$$W_{k+1} = W_k + \mu(-\hat{V}_k) = W_k + 2\mu e_k X_k \quad (3.3)$$

3-2. 블럭 (Block) 최소 평균자승 기법

블럭 평균자승오차(Block MSE, BMSE)의 목적함수를 정의하고 BMSE Gradient추정치를 결정하여 적응기법을 유도하고자 한다. 블럭 처리기법에 의해 출력 y 는 블럭형태로 표현된다[3].

$$Y_j = G_j W \quad (3.4)$$

여기서 j 는 블럭 차폐이고, Y_j 는 블럭길이 L 의 j 번째 출력 벡터이며, G_j 는 입력 벡터의 $L \times N$ 행렬이다.

$$Y_j = [y_{(j-1)L+1} \cdots y_{jL}]^T, \quad G_j = [X_{(j-1)L+1} \cdots X_{jL}]^T$$

블럭 평균 자승 오차 (BMSE) 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{BMSE} = E &= \frac{1}{L} E[e_j^T e_j] = E \left[\frac{1}{L} \sum_{k=(j-1)L+1}^{jL} \epsilon_k^2 \right] \\ &= \frac{1}{L} \left[E[d_j^T d_j] - P^T W - W^T P + W^T R W \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$R = E[G_j^T G_j], \quad P = E[G_j^T d_j]$$

$$V_{Bj} = \frac{1}{L} \frac{\partial E[e_j^T e_j]}{\partial W_j} = -\frac{2}{L} G_j^T e_j \quad (3.7)$$

j 번째 블럭에서의 Gradient와 그 추정치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_{Bj} &= \frac{\partial E}{\partial W_j} = \frac{1}{L} \frac{\partial E[e_j^T e_j]}{\partial W} \bigg|_{W=W_j} \quad (3.6) \\ &= \frac{1}{L} \left[-2P + 2R W_j \right] \end{aligned}$$

따라서, 구하고자 하는 블럭 적응기법은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W_{j+1} &= W_j + \frac{2\mu_B}{L} G_j^T e_j \\ &= W_j + \frac{2\mu_B}{L} \sum_{k=(j-1)L+1}^{jL} \epsilon_k X_k \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. 시변 수렴인자

적절한 수렴인자를 구하려면, 입력 신호에 대한 통계적 사전 지식이 필요하며 [1-5], 사전에 알수 있는 것은 식(3.1)의 좌 표면환식에서 얻어지는 다음과 같은 필요충분조건 뿐이므로 적절한 값을 구하기가 쉽지 않다.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad (4.1)$$

수렴인자를 좀더 손쉽게 구하기 위해 수렴을 위한 필요 충분 조건을 만족하지 않더라도 다음과 같은 충분조건을 만족시키는 수렴인자를 찾는 방법이 시도되었다[5].

$$0 < \mu < \frac{1}{\text{Trace } R} \quad (4.2)$$

그렇지만, 식(4.2) 또한 수렴인자의 최적치를 구하기 위해서는 수많은 시행착오가 필요하다. 또한 시행착오로 구한 수렴인자는 값이 고정되기 때문에, 시스템이 비정상(Nonstationary) 특성을 가질 때에는 더이상 최적한 값이 아니며, 시스템이 발산할 우려도 존재한다.

본 장에서는 수렴인자의 시변치를 통계적 사전지식 없이 구하는 방법으로 $k+1$ 번째 오차를 최소화 하는 k 번째 수렴인자를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

4-1. LMS 기법에서의 시변 수렴인자

k 번째 평균 자승오차는 다음과 같다.

$$\xi_k = E[d_k^2] + W_k^T R W_k - 2P^T W_k \quad (4.3)$$

식(4.3)에서 요구 응답 신호를 Stationary 라 가정하여 $k+1$ 번째 평균 자승오차를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\xi_{k+1} = \xi_k + W_{k+1}^T R W_{k+1} - 2P^T W_{k+1} \quad (4.4)$$

식(4.4)에 식(4.3)과 식(3.1)을 대입하여 전개하면 다음과 같이 우변이 k 번째 시간에서의 항만을 갖는 식으로 된다.

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \xi_k - W_k^T R W_k + 2P^T W_k + (W_k + \mu_k (-V_k))^T R (W_k + \mu_k (-V_k)) \\ &\quad - 2P^T (W_k + \mu_k (-V_k)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

이 식을 전개하여 정리하면 다음과 같이 표현된다.

$$\xi_{k+1} = \xi_k - \mu_k V_k^T R V_k + \mu_k^2 V_k^T R V_k \quad (4.6)$$

따라서, $k+1$ 번째 최소 평균 자승오차 ξ_{k+1} 은 k 번째 수렴인자 μ_k 에 관한 2차함수이며 유일한 최소값을 갖게된다. 이제 ξ_{k+1} 을 최소화 하는 μ_k 를 구하기 위해서는 다음과 같이 ξ_{k+1} 을 μ_k 에 대해 편미분하여 그것을 0 으로 하는 μ_k 를 구하면 된다.

$$\frac{\partial \xi_{k+1}}{\partial \mu_k} = -\|V_k\|^2 + 2\mu_k V_k^T R V_k = 0 \quad (4.7)$$

그러므로 k 번째 시변 수렴인자 μ_k^* 는 다음과 같다.

$$\mu_k^* = \frac{\|V_k\|^2}{2V_k^T R V_k} \quad (4.8)$$

식(4.8)의 k 번째 시변 수렴인자가 $k+1$ 번째 평균 자승오차를 줄이는지의 여부를 알아보기 위해 식(4.8)을 식(4.6)에 대입해보면 다음과 같은 결과를 얻을수 있다.

$$(\xi_{k+1} - \xi_k)^* = -\frac{1}{4} \frac{\|V_k\|^4}{V_k^T R V_k} < 0 \quad (4.9)$$

식(4.9)에서 $\|V_k\|^4$ 와 $V_k^T R V_k$ 는 항상 양의 값이므로 우변은 음의 값이 된다. 즉, k 번째 시변 수렴인자 μ_k^* 는 ξ_k 보다 ξ_{k+1} 을 식(4.9)의 우변의 크기만큼 줄여주는 역할을 한다.

4-2. 블럭 (Block) LMS 기법에서의 시변 수렴인자

최소 평균자승 기법에서의 시변 수렴인자를 블럭 최소 평균 자승(BLMS) 기법에 확장 적용하고자 한다. 먼저 $j+1$ 번째 블럭에서의 블럭 평균 자승오차 (BMSE) 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= \frac{1}{L} \left[Z - P^T W_{j+1} - W_{j+1}^T P + W_{j+1}^T R W_{j+1} \right] \quad (4.10) \\ Z &= E[d_j^T d_j] \end{aligned}$$

식(4.10)의 우변에 식(3.5)와 식(3.8)을 대입하여 E_{j+1} 가 j 번째 블럭의 항만으로 표현되게 하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} E_{j+1} &= E_j + \frac{1}{L} \left[P^T W_j + W_j^T P - W^T R W - P^T (W_j + \mu_B (-V_{Bj})) \right. \\ &\quad \left. - (W_j + \mu_B (-V_{Bj}))^T P + (W_j + \mu_B (-V_{Bj}))^T R (W_j + \mu_B (-V_{Bj})) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

P 를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$E_{j+1} = E_j - \mu_{Bj} V_{Bj}^T V_{Bj} + \frac{1}{L} \mu_{Bj}^2 V_{Bj}^T R V_{Bj} \quad (4.12)$$

식(4.12)에서 E_{j+1} 은 E_j 에 대한 2차 함수이다. 그러므로 j 번째 블럭에서의 시변 수렴인자는 다음조건을 만족하는 값이다.

$$\frac{\partial E_{j+1}}{\partial \mu_{Bj}} = 0 \quad (4.13)$$

따라서, 구하고자하는 시변 수렴인자는 다음과 같다.

$$\mu_{BJ}^* = \frac{\|V_{BJ}\|^2}{V_{BJ}^T R V_{BJ}} = \frac{L \|V_{BJ}\|^2}{2 V_{BJ}^T R V_{BJ}} \quad (4.14)$$

V_{BJ} 와 R 의 추정치를 사용하면 시변 수렴인자는 다음과 같다.

$$\mu_{BJ}^* = \frac{Le_j^T G_j G_j^T e_j}{2e_j^T (G_j G_j^T)^2 e_j} \quad (4.15)$$

이러한 수렴인자를 사용했을 경우 알고리즘의 수렴을 알아보기 위해 식(4.14) 를 식(4.12)에 대입하면 다음과 같다.

$$E_{j+1} - E_j = - \frac{\|V_{BJ}\|^4}{4V_{BJ}^T R V_{BJ}} \quad (4.16)$$

식(4.16) 의 우변은 0 보다 적으므로 $j+1$ 번째 평균 자승오차는 j 번째의 그것보다 항상 작다는 것을 알 수 있다.

5. 시뮬레이션

미지 필터의 적응 모델링[4.5]을 이상의 방법에 적용하여 시뮬레이션하였다. 필터 차수는 안다고 가정하고, 적응필터와 미지 필터의 차수는 같게 놓았다. 입력은 평균 0, 표준편차 0.3의 Gaussian 백색잡음과 색잡음을 사용하였다. 색잡음은 백색잡음을 다음의 대역필터를 통과시켜 나온 잡음을 사용하였다.

$$F_{BP} = 1 - 0.9375z^{-2} + 0.3281z^{-4} + 0.0244z^{-6} \quad (5.1)$$

부가잡음으로는 SNR 40데시벨(Decibel)인 백색잡음을 사용하였고, 수렴능력의 평가지표로 정규화된 자승오차를 사용하였다.

$$SE (dB) = 10 \log_{10} \frac{(y-d)^2}{d^2} \quad (5.2)$$

예제1) 8차 시뮬변 시스템 입력 : 백색잡음

$$F_1(z) = 0.157 + 0.1342z^{-1} + 0.1147z^{-2} + 0.0980z^{-3} + 0.0838z^{-4} + 0.716z^{-5} + 0.0612z^{-6} + 0.0523z^{-7} + 0.0447z^{-8} \quad (5.3)$$

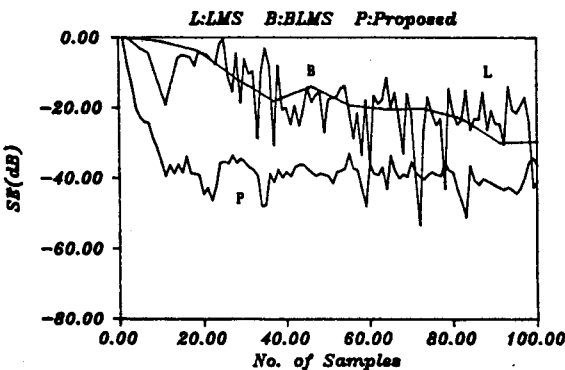


그림 5-1 예제1)에 대한 학습곡선
Fig. 5-1 Learning Curves of Example 1)
입력: 백색잡음, 부가잡음: 유(40dB)

예제2) 4차 시변 시스템 입력 : 2-1)백색잡음, 2-2)색잡음

$F_1(z)$ 에 대해 적용한 후, 미지 시스템은 $F_2(z)$ 로 변한다.

$$F_1(z) = 1 - 1.2z^{-1} - 0.04z^{-2} + 0.768z^{-3} - 0.384z^{-4} \quad (5.4)$$

$$F_2(z) = 1 - 0.45z^{-1} + 0.55z^{-2} - 0.35z^{-3} \quad (5.5)$$

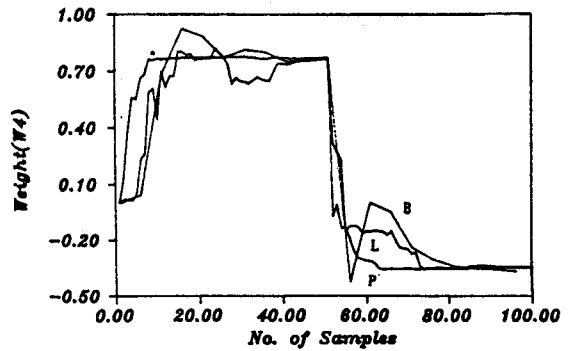


그림 5-2 예제 2-1)에 대한 가중치 궤적
Fig. 5-2 Weight Trajectories of Example 2-1)
입력: 백색잡음, 부가잡음: 유(40dB)

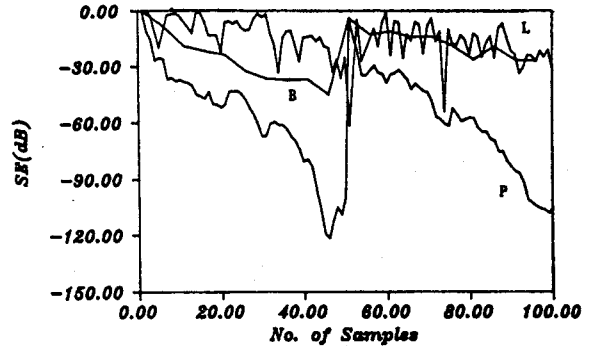


그림 5-3 예제 2-2)에 대한 학습곡선
Fig. 5-3 Learning Curves of Example 2-2)
입력: 색잡음, 부가잡음: 무

6. 결론 및 결론

본 논문은 횡단형 적응 필터의 수렴속도를 개선하기 위한 시변 수렴인자의 결정에 대해서 연구하였다. 본 논문에서 제시한 시변 수렴인자 결정은 $j+1$ 번째 평균 자승오차를 최소로 하는 j 번째 시변 수렴인자를 구하는 방법을 취하였다.

이러한 방법으로 결정된 시변 수렴인자를 사용하여 미지 필터에 대한 적응모델링에 적용한 결과 시행착오로 구한 고정된 수렴인자(LMS, BLMS)를 사용할 때보다 수렴속도가 매우 빨랐다.

특히 시변 시스템에 대해서도 수렴인자가 매시간 같으로 변하여, 고정된 수렴인자를 사용할 때보다 변한 미지 시스템의 가중치에 빨리 도달함을 알 수 있었다. 이러한 시변 시스템에서의 성능 향상은 적응 필터의 실제 적용 시스템이 대부분 시변 혹은 비정상(Nonstationary) 특성을 가지므로 실제에서 많이 적용되어질 것으로 예상된다.

아울러 시스템의 차수가 클 때 연산횟수가 증가되는 문제점을 해결하는 것이 필요하다고 보며, 이를 위한 알고리즘 개발은 계속 연구하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] B. Widrow et al., " Stationary and non - stationary learning characteristics of the LMS adaptive filter, " Proceedings of IEEE, Vol.64, AUG, 1976, pp.1151-1161
- [2] J.B.Foley, " Comparison between steepest descent and LMS algorithms in adaptive filters, " IEE Proceedings, Vol.134, JUNE, 1987, pp.283-289
- [3] H.B.Voelcker, E.E. Hartquist, " Digital Filtering via Block Recursion, " IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-18, no.2, JUNE, 1970, pp.169-176
- [4] O.Macchi, " Optimization of Adaptive Identification for Time Varying Filters, " IEEE Trans. Automatic Control, MARCH, 1986 , pp.283-287,
- [5] B.Widrow and S.D.Stearns, " Adaptive Signal Processing" Prentice-Hall, 1985