수정된 최소자승법을 이용한 간접 적응 극배치 제어기에 관한 연구

° 한 영 성　　정 영 주　　노 태 석　　조 규 복
효성중공업 기술연구소

A Study on Indirect Adaptive Pole Placement Controller using a Modified Least Squares Method

° Young-Seong Han　Young-Joo Chung　Tae-Seok Nho　Kyu-Bock Cho
Hyosung Industries Co. Ltd.　Research & Development Institute

ABSTRACT

This paper proposes indirect adaptive pole placement adaptive controller using a modified least squares method. If an adaptive controller has good performance, it is necessary that an estimator have fast convergence. This paper presents a modified least squares method which guarantees the stability of estimator and has fast convergence. In this algorithm, information on signal level is obtained from the determinent of covariance matrix and according to it, weighting factor is tuned.

I. 서론

Self Tuning Regulator (STR) 에서는 미지의 파라미터 추정과 제어기의 설계를 별개의 것으로 간주한다. on-line으로 미지의 파라미터를 추정하고, 그 추정된 파라미터가 참값이라고 본다. 사용되는 추정 알고리즘으로는 Stochastic Approximation, Least Squares, Instrumental Variables, Maximum Likelihood 등 여러가지가 있지만 최소자승법이 널리 쓰인다. 최소자승법은 두가지 식으로 구성된다. 그중 하나는 파라미터 update식이고, 또하나는 분산행렬의 update식이다. 분산행렬이 어떻게 update되는가는 알고리즘의 안정성이나 수렴성등에 큰영향을 미친다.

파라미터가 시불변일때 최적성을 갖는 표준형 최소자승법은 수렴속도가 느리고, 시간이 지남에 따라 이득행렬이 영행렬로 되기 때문에 시변 파라미터의 추정에는 쓰일 수 없다. 이득행렬이 영행렬이 되지 않도록 하기 위한 연구중에서 대표적인 것이 가중형 최소자승법이다. 그러나, 이 알고리즘에서는 여기신호가 sufficiently rich하지 않으면 이득행렬이 무한정 커질 수 있다[3]. 그러므로, 파라미터를 제대로 추정하기 위해서는 이득행렬이 singular하게 되거나, 무한정 커지지 않도록 알고리즘을 설계해야 한다. 이러한 문제를 해결하기 위해 제시된 알고리즘으로, Goodwin이 제안한 covariance resetting이 있고, Fortescue등[3]은 분산행렬에 축적된 정보량을 일정하게 유지하려 하였고, Goodwin 과 Lozano[4]는 분산행렬의 trace가 초기치의 trace와 같도록 forgetting factor를 설정하였으며, Kreisselmeier[1]는 forgetting factor대신 signal level에 따라 변화하는 행렬을 사용하였는데 계산이 상당히 복잡하다.

본 논문에서 제시된 방법은 비교적 적은 계산상의 부담으로 이득행렬이 singular하게 되거나, 무한정 커지지 않도록 할 수 있으며, 두 극단적인 상황을 어떻게 피하는지 명확히 알 수 있다.

II. 플랜트의 모델링과 극배치 제어기

프랜트는 다음과 같이, deterministic ARMA 모델로 주어진다.

$$A(q^{-1})\, y(t) = B(q^{-1})\, u(t) \tag{1}$$

여기서, x(t), y(t) 는 각각 입력과 출력을 표시하고, q는 forward operator를 표시한다. 다항식 $A(q^{-1})$와 $B(q^{-1})$ 는 다음과 같다.

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots\cdots + a_n q^{-n} \tag{2}$$

$$B(q^{-1}) = q^{-k} \left(b_0 + \cdots\cdots + b_m q^{-m} \right) \tag{3}$$

다항식 $A(q^{-1})$ 와 $B(q^{-1})$ 는 서로 소이며, 플랜트의 파라미터는 모른다.

제어입력은 다음의 식으로부터 만들어 진다.

$$R(q^{-1})\, u(t) = - S(q^{-1})\, y(t) + T(q^{-1})\, r(t) \tag{4}$$

이 식으로 주어지는 제어기 형태는 여러가지 다른 목적에 알맞게 설계될 수 있다. 여기서 r(t)는 기준신호이다. 이때, 폐루프 시스템은 다음과 같이 된다.

$$y(t) = \frac{T(q^{-1})\, B(q^{-1})}{A(q^{-1})\, R(q^{-1}) + q^{-k}\, B(q^{-1})\, S(q^{-1})}\, r(t) \tag{5}$$

다음 식과 같이 분모 다항식은 적절히 선정된 다항식 $R(q^{-1})$ 과 $S(q^{-1})$ 에 의해 desired polynomial로 만들어 질 수 있다. 즉, 다항식 $R(q^{-1})$ 과 $S(q^{-1})$ 에 의해 원하는 곳에 폐루프 시스템의 극을 위치시킬 수 있다. 다항식 $R(q^{-1})$ 은 monic 이며 다항식 $R(q^{-1})$ 과 $S(q^{-1})$ 의 최소 차수는 다음과 같다.

$$R(q^{-1}) \text{ 의 차수} = m + k - 1 \tag{6}$$

$$S(q^{-1}) \text{ 의 차수} = n - 1 \tag{7}$$

Diophantine equation 에 추정된 플랜트 파라미터를 대입하고, 계수비교에 의해 Sylvester matrix를 구한다. 이 선형 방정식을 풀어 제어기 파라미터를 구한다.

III. 추정 알고리즘

플랜트 출력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$y(t) = \varphi(t)^T\theta \tag{8}$$

여기서,

$\varphi(t) = [\, y(t-1),\cdots\cdots,y(t-n),u(t-k),\cdots\cdots,u(t-k-m)\,]^T$

$\theta = [\, a_1,\cdots\cdots,a_n,b_0,\cdots\cdots,b_m\,]^T$ 이다.

추정된 출력과 출력 오차신호 및 파라미터 오차벡터는 다음과 같다.

$$\hat{y}(t) = \varphi(t)^T\,\hat{\theta}(t) \tag{9}$$

$$e(t) = \hat{y}(t) - y(t) \tag{10}$$

$$\phi(t) = \hat{\theta}(t) - \theta \tag{11}$$

여기서, $\hat{\theta}(t)$ 는 파라미터의 추정치이다.

1. 표준형 최소자승법

R(t) 및 파라미터의 update식과 파라미터 오차방정식은

$$R(t) = R(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)^T \quad , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{12}$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - R(t)^{-1}\varphi(t)e(t) \quad , \quad \hat{\theta}_0 \tag{13}$$

$$\phi(t) = R(t-1)^{-1}R_0\phi_0 \tag{14}$$

으로 된다. 이때, $\varphi(t)$가 Persistently Exciting(PE)하면 시간이 지남에 따라 이득행렬 $R(t)^{-1}$는 영행렬로 되고 $\phi(t)$도 영벡터로 된다. 그러나, $\phi(t)$의 수렴속도는 시간이 감에 따라 점점 느려져서 수렴성이 좋지 못하다.

2. 가중형 최소자승법

R(t)의 update식과 파라미터 오차방정식은 다음과 같다.

$$R(t) = (1-\rho)\,R(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)^T \quad , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{15}$$

$$\phi(t) = (1-\rho)^t\,R(t-1)^{-1}R_0\phi_0 \tag{16}$$

이때 $0 < \rho < 1$ 이다. $\varphi(t)$가 PE하면 R(t)는 positive definite이므로 $R(t)^{-1}$는 유계이고 시간이 지남에 따라 ϕ_t는 영벡터로된다. 그러나, $\varphi(t)$가 PE하지 못하면 R(t)는 singular하게 됨과 동시에 이득행렬 $R(t)^{-1}$가 무한정 커지게 되어 추정자는 적응능력을 상실하는 경우가 발생할 수 있다.

3. Covariance Resetting을 이용한 표준형 최소자승법과 가중형 최소자승법

위에서 설명한 단점을 극복하는 방법으로 어떤 순간에 R_t를 재초기화하는 것이 있다.

$$R(t) = R(t-1) + M(t) + \varphi(t)\varphi(t)^T \quad , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{17}$$

$$M(t) = \begin{cases} R_0 - R(t-1) & t = t_i \quad (\, i = 0,1,2,3,\cdots) \\ -\rho\,R(t-1) & \end{cases} \tag{18}$$

$d = t - t_i$, $t \in (\, t_i\,, t_{i+1}]$ 으로 정의하고, 파라미터 오차방정식을 유도하면 다음과 같이 된다.

$$\phi(t) = R_0^{-1/2}\,[\, I + \sum_{k=0}^{d-1}(1-\rho)^{-k}\,R_0^{-1/2}\,\varphi(t_i+k)\,\varphi(t_i+k)^T\,R_0^{-1/2}\,]^{-1}\,R_0^{1/2}\,\phi(t_i) \tag{19}$$

$[\,\cdot\,]$에서 I를 뺀 부분이 positive semidefinite 이기 때문에 다음과 같은 부등식을 만족하게 되어 파라미터 오차는 점점 줄어들게 된다.

$$R_0^{1/2}\,\phi(t) \le R_0^{1/2}\,\phi(t_i) \tag{20}$$

resetting방법은 어느 순간에 과거의 정보를 모두 버리고 급작스러운 변경을 가하기 때문에 자연스럽지 못하다.

4. Kreisselmeier의 알고리즘

$$R(t) = [\, I - \sigma(R(t-1) - \alpha\, I)^N\,(R(t-1) + \beta\, I)^{-N}]\,R(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)^T \quad , \quad R_0 = R_0^T > 0 \tag{21}$$

$$\phi(t) = R(t-1)^{-1}\,f(t-1) \tag{22}$$

$$f(t) = [\, I - \sigma(R(t-1) - \alpha I)^N\,(R(t-1) + \beta I)^{-N}\,]\,f(t-1) \quad , \quad f_0 = R_0\,\phi_0 \tag{23}$$

여기서 $0 < \sigma < 1$ 이며, $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$ 이고 N은 홀수이다. $R_t \gtrsim \alpha\, I$ 즉, low signal level에서는 $[\,\cdot\,]$부분 $\lesssim I$ 으로 되어 적응속도가 느려지게 되고, high signal level에서는 $[\,\cdot\,]$부분이 적어져서 빠른 수렴성을 보일것이다. 위의 알고리즘은 다음과 같은 성질을 갖는다.

i) $R_0 \ge \alpha I$ 이면 항상 $R(t) \ge \alpha I$ 으로 된다.

ii) $R_0 \ge \alpha I$ 이고 $\varphi(t)$가 유계이면 R(t)도 유계이다.

위의 성질에서 R(t)는 singular 하게 되거나, 무한대로 커지지 않는 것을 알 수 있다. 위의 알고리즘은 signal level에 따라 적응속도가 변화되기는 하지만, 관계식이 복잡하여 어떻게 문제점을 해결했는지 알기 어렵고 역행렬을 구해야 하기 때문에 계산량이 많은 단점이 있다.

5. 수정된 최소자승법

식(15)에서 가중치 ρ를 상수로 하는 대신, signal level에 관한 정보를 R(t)의 행렬식으로 부터 얻고, 그 정보를 이용하여 가중치 ρ를 바꾸어 주고자 한다. ρ의 결정식은 다음과 같다.

$$D \ge m \qquad \rho = K\,\frac{(\,D - m\,)}{1 + (\,D - m\,)}$$

$$D < m \qquad \rho = 0 \tag{24}$$

여기서 D는 R(t)의 행렬식이고

K는 ρ의 상한치 $0 \le K < 1$

m은 margin 값이다.

R(t)가 점점 singular하게 되는 경우 D도 작아지는데, 이때 D가 m이하로 되면 ρ를 0으로 하여 가중치를 가하지 않고 정보를 축적한다. 또한 high signal level에서는 가중치를 충분히 가하여 수렴속도를 빠르게 한다. 제시하고자 하는 알고리즘은 이득행렬이 영행렬이 되거나 무한대로 커지지 않도록 동작하게 된다. proposition에 알고리즘의 특성을 보였다. 증명은 부록에 제시되었다.

PROPOSITION

$R_0 = \alpha I$, $\alpha > 0$ 로 한다. 그러면

i) $R(t) = R(t)^T > 0 \quad \forall t$

ii) $R(t) = \tilde{m} I$ 가 unforced system(즉 $\varphi(t) \equiv 0$)의 점근적으로 안정한 평형상태이다.

여기서 $\tilde{m}^n = m$ 이고, n은 추정파라미터의 갯수이다.

iii) R(t)는 항상 유계이다.

REMARK

m은 R(t)의 행렬식 D의 근사적인 하한치로 생각할 수 있다. 실제로 D의 최소값은 m보다 약간 작거나 같으며 0보다는 항상 크다. 그러므로, 설계자가 원하는 R(t)의 하한치를 고려해서 m을 결정해야 한다.

IV. 컴퓨터 모의실험

$\hat{\theta}_0 = [\ 1,\ -1,\ 0.1,\ 0.4\ ]^T$, $R_0 = 10\ I$ 의 초기치로 샘플링시간 0.01초 1000스텝 실시하였다.

출력오차는 $B(q^{-1})r(t) - y(t)$ 으로 정의한다.

기준입력 $r(t) = \sin 2t + \cos 4t$, 플랜트는 다음과 같다.

$(1 + 3q^{-1} + 2q^{-2})\ y(t) = q^{-2}\ (1 + 0.5q^{-1})\ u(t)$

각 알고리즘에서 사용한 파라미터 값을 표 1에 나타내었다.

알 고 리 즘	파 라 미 터
가중형 최소자승법	ρ=0.1
covariance resetting	매 1초마다 10 I로 reset
Kreisselmeier	α=10, β=1, σ=0.8, N=1
수정된 최소자승법	K=0.9, m=1e5

<표 1> 각 알고리즘에서 사용된 파라미터 값

그림 2에서, 가중형 최소자승법은 과한 weight의 설정으로 불안한 출력을 보이고 있으며, ρ를 0.5로 설정하였을 때 알고리즘이 붕괴되었다. 그림 2에서 알 수 있듯이 분산행렬을 재초기화 하므로써 보다 좋은 출력 특성을 얻을 수 있었고, 가중형 최소자승법의 문제점을 해결하였다. 그림 3에서 알 수 있듯이 본 논문의 알고리즘이 가장 우수한 출력특성을 보이고 있다. 그림 4에서 6까지는 각 알고리즘에 대한 $\mathrm{Log}_{10}\|\phi(t)\|$을 나타내었다. 수렴성 역시 본 논문의 경우가 가장 우수하므로, 우수한 출력특성은 당연한 결과로 생각된다.

V. 결론

본 논문에서는 이득행렬이 항상 positive definite이고 유계인 최소자승법을 이용하여 적응 극배치 제어기를 설계하였다. 제안된 추정 알고리즘에서는 적은 계산상의 부담으로 추정 알고리즘의 안정성을 보장하면서 빠른 수렴성을 갖도록 하였으며, 어떻게 문제점을 해결했는지 명확하게 알 수 있다. 즉 low signal level에서는 가중치를 작게하여 R(t)가 영행렬이 되지 않도록 하고, high signal level에서는 가중치를 충분히 주어 이득행렬이 영행렬이 되지 않도록 설계되었다. 강인성 문제, 시변시스템으로의 확장 등을 검토하고 있으며, 행렬식에 대한 가중치의 이상적인 궤적설계가 과제로 남아 있다.

부록

PROPOSITION 의 증명

i) $R(t) = (1 - \rho)\ R(t-1) + \varphi(t)\ \varphi(t)^T$ 에서, R_0는 symmetric positive definite이고 $\varphi(t)\ \varphi(t)^T$ 는 symmetric positive semidefinite이므로 R(t)는 항상 symmetric positive definite이다.

ii) $\lambda(A)$는 행렬 A의 고유치를 표시한다. $\varphi(t) \equiv 0$ 이므로 R(t)의 고유치는 같게된다. 그러므로, R(t)의 update식을 고유치 형태로 바꾸면

$\lambda(R(t)) = (1 - \rho)\ \lambda(R(t-1))$ 이고 , 이때 ρ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho = K\ \frac{\lambda(R(t-1))^n - \tilde{m}^n}{1 + \lambda(R(t-1))^n - \tilde{m}^n}$$

정리하면

$$\lambda(R(t)) = \left[\ 1 - K\ \frac{\lambda(R(t-1))^n - \tilde{m}^n}{1 + \lambda(R(t-1))^n - \tilde{m}^n}\ \right] \lambda(R(t-1))$$

$\lambda(R(t-1))^n = \tilde{m}^n$ 이 평형 상태이다.

R(t)의 고유치는 $\tilde{m}$ 로 된다.

iii) $(\,)_{ij}$ 는 i행 j열의 요소라 하자.

$R(t) = (1 - \rho)R(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)^T$ 에서 각각의 요소에 대해 생각해 보면

$(R(t-1))_{ij} = [\ q - (1-\rho)\ ]^{-1}\ (\varphi(t)\varphi(t)^T)_{ij}$ 으로 되고 $0 \le \rho < K$, $0 \le K \le 1$ 이다. 행렬식이 m보다 커지면 각 요소는 단위원 내에 극을 갖게 되므로 $\varphi(t)\varphi(t)^T$가 유계이면 R(t) 역시 유계이다. 행렬식이 m보다 작아지면 $\rho = 0$으로 되어 단위원에 극을 갖게 된다. 이때 R_t 의 update식은 $R(t) = R(t-1) + \varphi(t)\ \varphi(t)^T$ 으로 되어 R(t)를 증가시켜 주므로 $R(t) \ge cI\ \forall t$, $c > 0$ 으로 된다.

참고문헌

[1] G. Kreisselmeier , " Stabilized least-squares type adaptive identifiers. " IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-35 , pp. 306-310. 1990.

[2] M. E. Salgado , G. C. Goodwin and R. H. Middleton , " Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting ." Int. J. Contr. vol. 47 , pp. 477-491. 1988.

[3] T. R. Fortescue , L. S. Kershenbaum and B. E. Ydstie, " Implementation of self - tuning regulators with variable forgetting factors." Automatica , vol. 17 , pp. 831-835. 1981.

[4] L. R. Lozano and G. C. Goodwin , " A globally convergent adaptive pole placement algorithm without a persistency of excitation requirement." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-30 , pp. 795-798. 1985.

[5] G. C. Goodwin and D. Q. Mayne , " A parameter estimation perspective of continuous time model reference adaptive control. " Automatica , vol. 23 , pp. 57-70. 1987.

[6] L. C. Fu and S. S. Sastry , " Frequency domain synthesis of optimal inputs for on-line identification and adaptive control." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-36 , pp. 353-358. 1991.

[7] M. Das and R. Cristi , " Robustness of an adaptive pole placement algorithm in the presence of bounded disturbances and slow time variation of parameters." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-35 , pp. 752-756. 1990.

[8] D. Y. Abramovitch and G. F. Franklin , " On the stability of adaptive pole-placement controllers with a saturating actuator." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-35 , pp. 303-306. 1990.

[9] A. Y. Allidina and H. Yin , " Explicit pole-assignment self-tuning algorithms." Int. J. Contr. vol. 42 , pp. 1113-1130. 1985.

[10] S. Bittanti , P. Bolzern and M. Campi , " Recursive least-squares identification algorithms with incomplete excitation : convergence analysis and application to adaptive control." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-35 , pp. 1371-1373. 1990.

[11] F. Giri , M. M'saad , J. M. Dion and L. Dugard , " Pole placement adaptive control for time-varying ill-modeled plants." IEEE Trans. Automat. contr. , vol. AC-35 , pp. 723-726. 1990.

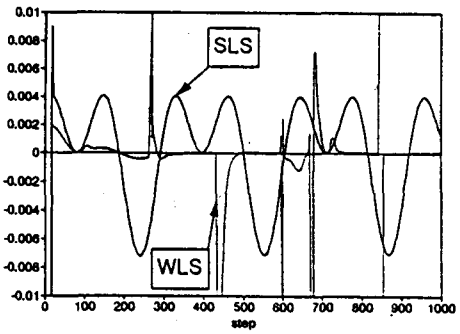

그림 1. 출력오차
SLS : 표준형 최소자승법
WLS : 가중형 최소자승법

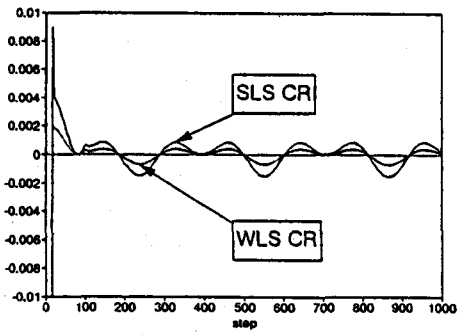

그림 2. 출력오차
SLS CR : 표준형 최소자승법 (covariance resetting)
WLS CR : 가중형 최소자승법 (covariance resetting)

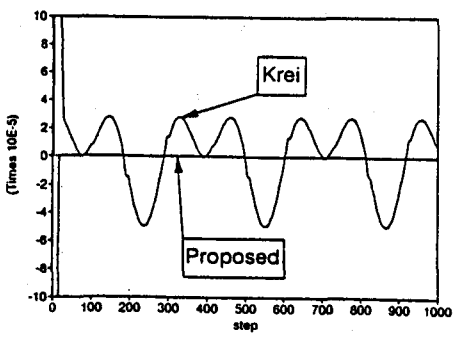

그림 3. 출력오차(확대)
Krei : Kreisselmeier의 알고리즘
Proposed : 제안된 알고리즘

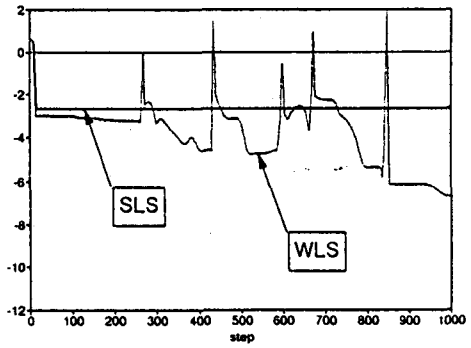

그림 4. 파라미터 오차 벡터의 norm (상용로그값)
SLS : 표준형 최소자승법
WLS : 가중형 최소자승법

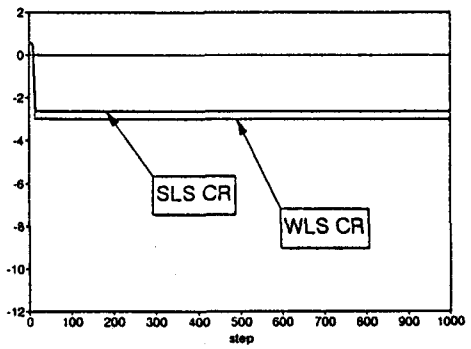

그림 5. 파라미터 오차 벡터의 norm (상용로그값)
SLS CR : 표준형 최소자승법 (covariance resetting)
WLS CR : 가중형 최소자승법 (covariance resetting)

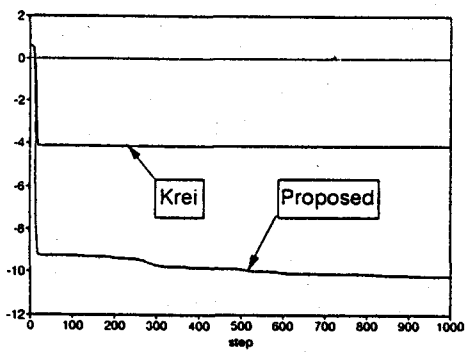

그림 6. 파라미터 오차 벡터의 norm (상용로그값)
Krei : Kreisselmeier의 알고리즘
Proposed : 제안된 알고리즘