

# 이노베이션 상관관계 테스트를 이용한 잡음인식

박 성 옥<sup>\*</sup>  
구미 전문대학

## Identification of Noise Covariance by using Innovation Correlation Test

Seong-Wook Park  
Kumi Junior Collage

**Abstract** - This paper presents a technique, which identifies both process noise covariance and sensor noise covariance by using innovation correlation test. A correlation test, which checks whether the square root Kalman filter is workingly optimal or not, is given. The system is stochastic auto regressive moving-average model with auxiliary white noise input. The linear quadratic Gaussian control is used for minimizing stochastic cost function. This paper identifies  $Q, R$ , and estimates parametric matrices  $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$  by means of extended recursive least squares and model reference control. And The proposed technique has been validated in simulation results on the fourth order system.

**Key Words:** Square Root Kalman Filter,  
Linear Quadratic Control,  
Extended Recursive Least Squares,  
Auto Regressive Moving-Average Model,  
Correlation test,  
Model Reference control.

### 1. 서 론

제어계를 구성하기 위해서는 시스템의 특성을 나타내는 파라미터와 잡음에 대한 정확한 정보를 알고 있어야 한다. 실제적인 경우에 잡음의 영향으로 프로세스의 파라미터와 출력의 특성을 알 수 없는 경우가 많다. 이러한 경우에 단지 시스템의 입, 출력 정보만을 이용하여 미지의 파라미터를 식별(Identification)하고 동시에 잡음을 추정(Estimate)하는 적응 칼만 필터의 구성이 필요하다.

신호와 잡음의 스펙트럼이 겹쳐있는 경우, 신호가 Gaussian-markov process, 잡음이 백색일때 필터의 설계는 Kolmogrove<sup>(1)</sup>, Wiener<sup>(2)</sup>에 의해 처음으로 연구되었다. 이들은 확률제어 이론을 가지고 주파수 영역에서 필터설계를 했었다. 그 후에 상태 공간 모델과 조건부 기대치 이론을 가지고 반복적인 기법을 가진 칼만필터가 Kalman<sup>(3)</sup>에 의해 설계되었다. 칼만필터의 구성시 프로세스, 센서잡음의 공분산을 안다고 가정하지만 실제의 경우에 있어서 잡음의 확률적 특성을 알지 못하므로 이 문제에 대한 연구가 계속되고 있다.

본 연구는 기존 모델 적응 제어를 사용하여 잡음이 포함된 시스템의 파라미터를 식별하고 동시에 제공된 칼만 필터로부터 출력을 추정하는 기법을 제시한다. 그리고 본 연구에서 개발된 기법을 4차 시스템에 적용시켜 보므로써 그 유용성을 입증했다.

### 2. 본 론

#### 2.1 시스템의 구성

선형이고 완전 제어 가능, 완전 관측가능인 이산 선형 시스템을 고려하자.

$$x_{i+1} = A x_i + B u_i + \Gamma w_i \quad (1)$$

$$y_i = H x_i + v_i \quad (2)$$

여기서  $x_i \in R^n$  는 상태벡터,  $u_i \in R^m$  는 제어벡터, 그리고  $y_i \in R^p$  는 출력벡터이다.

$$E(w_i) = 0; E(w_i w_j^T) = Q \delta_{ij}$$

$$E(v_i) = 0; E(v_i v_j^T) = R \delta_{ij}$$

$$E(w_i v_j^T) = 0, \text{ for all } i, j$$

확률 선형 시스템의 블록선도는 그림 1과 같다. 전체 적응제어계의 블록선도는 그림 2와 같다.

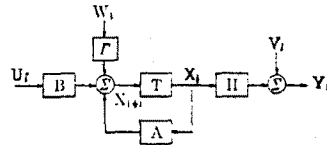


그림 1 확률 선형 시스템의 블록선도  
Fig. 1 Block Diagram of Stochastic Linear System

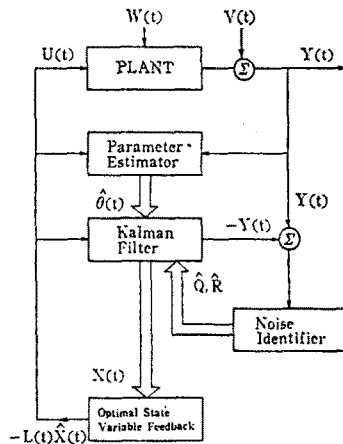


그림 2 전체 적응 제어계의 블록선도  
Fig. 2 Block Diagram of Main Adaptive Control System

#### 2.2 파라미터 식별

시스템의 파라미터 식별은 입, 출력간의 정보로부터 얻어진다. 본 연구에서는 적응 기존모델 제어<sup>(4)</sup>를 도입

하여 시스템의 출력을 모델의 출력에 일치하도록 제어입력을 인가하면서 파라미터를 확장 최소 자승법<sup>(5)</sup>으로 추정했다. 그림 3은 적응 기준모델 제어의 블록선도이다. 시간 t에서 Z(t)는 y\*(t+d)이고 기준입력 r(t)가 시스템과 모델에 인가된다. 확률 비용함수 J(t+d)를 최소로 하는 제어입력 U\*(t)가 y와 r의 선형 조합으로 정해진다.

$$J(t+d) = E\{[y(t+d) - y^*(t+d)]^2 | y(t), y(t-1), \dots, u(t), u(t-1), \dots\} \quad (3)$$

관측 잡음이 포함되어 있는 경우에 파라미터( $\theta$ )를 확장 최소 자승법을 이용하면 아래 식으로 표현된다.

$$y(t) = \Phi^T(t-1)\theta(t) \quad (4)$$

$$\Phi^T(t-1) = \{-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-d), \dots, u(t-d-n)\} \quad (5)$$

$$\theta(t) = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_p\} \quad (6)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_nq^{-n} \quad (7)$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m} \quad (8)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_pq^{-p} \quad (9)$$

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})w(t) \quad (10)$$

$$E\{w^2(t)\} = \lambda\sigma^2$$

여기서  $\Phi^T(t-1)$ 은 입력과 출력값의 조합벡터이고  $\theta$ 는 입, 출력계수의 조합벡터이다.  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$ ,  $C(q^{-1})$ 은 이산 선형 시스템의 ARMAX 형태로 표현한 것이다.

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t)[y(t) - \Phi^T(t)\hat{\theta}(t)] \quad (11)$$

$$K(t) = p(t)\Phi(t)[\Phi^T(t)p(t)\Phi(t) + \hat{\lambda}^2(t+1)]^{-1} \quad (12)$$

$$p(t+1) = p(t) - K(t)[\Phi^T(t)p(t)\Phi(t) + \hat{\lambda}^2(t+1)]K(t) \quad (13)$$

$$\hat{\lambda}^2(t+1) = \hat{\lambda}^2(t) + [e^2(t) - \hat{\lambda}^2(t)] \quad (14)$$

### 2.3 제곱근 칼만필터의 구성

칼만필터의 기법<sup>(6,7,8,9,10,11)</sup>에 Square root filter<sup>(8,10,12)</sup>을 적용하여 제곱근 칼만필터를 구성하였다. 제곱근 칼만필터의 반복식을 관측잡음의 공분산이 스칼라인 경우, 아래 식으로 유도된다.

$$P(k/k) = W_k W_k^T \quad (15)$$

$$S_k = H_k W_k \quad (16)$$

$$r_k = S_k S_k^T + R_k \quad (17)$$

$$K_k = W_k S_k^T / r_k \quad (18)$$

$$a_k = (I - R_k / r_k) / S_k S_k^T \quad (19)$$

$$W_k = W_k^- (I - a_k S_k^T S_k) \quad (20)$$

$$W_{k+1}^- W_{k+1}^- = (A_k W_k^-) (A_k W_k^-)^T + Q_k \quad (21)$$

여기서  $W_k^-$ 는  $P(k/k)$ 를 Cholesky 분해식으로 분해된 하단 삼각행렬이다. 식(15)-(21)이 제곱근 칼만필터 반복식이며 계산순서는 그림 4와 같다.

### 2.4 2차 선형 가우시안 제어

확률 시스템에 대한 제어기법<sup>(13,14,15)</sup>은 확률 비용함수를 최소로 하도록 제어입력  $u^*(t)$ 을 시스템에 인가하는 제어법칙을 말한다. 본 연구에서는 2차 선형 가우시안 제어를 사용하여 시스템을 제어했다. 확률 평가함수를 아래 식으로 정의 할 때 제어입력  $u(t)$ 을 구하기도 한다.

$$E \min_{u^*} E\{x^T(N)Q_0x(N) + \sum_{s=0}^{N-1} [x^T(s)Q_1x(s) + u^T(s)Q_2u(s)] | y_{t-1}\} \quad (15)$$

$$y_{t-1}^T = [y^T(t_0), y^T(t_0+1), \dots, y^T(t-1)]$$

$$W(x(t), t) = \min_{u^*} E\{x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t) + W(x(t+1), t+1) | y_{t-1}\}$$

$$= \min_{u^*} E\{x^T(t)Q_1x(t) + u^T(t)Q_2u(t) + W(x(t+1), t+1) | x(t)\}$$

위 식으로부터 최적 입력  $u^*(t)$ 을 구하면  $x(t) | t-1$ 와  $L(t)$ 의 곱이 되고 수식으로 표현하면 아래와 같다.

$$L(t) = [Q_2 + B^T S(t+1)B]^{-1} B^T S(t+1)A \quad (22)$$

$$S(t) = A^T S(t+1)A + Q_1 - L^T(t)[Q_2 + B^T S(t+1)B]L(t) \quad (23)$$

$$= [A - BL(t)]^T S(t+1)A + Q_1$$

$$= [A - BL(t)]^T S(t+1)[A - BL(t)] + L^T(t)Q_2L(t) + Q_1$$

$$u(t) = -L(t)x(t | t-1) \quad (24)$$

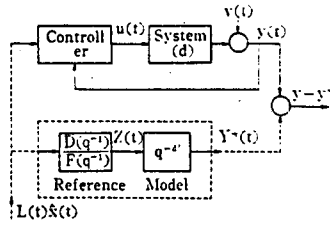


그림 3 적응 기준모델 제어의 블록선도  
Fig. 3 Block Diagram of Adaptive Model-Reference Control

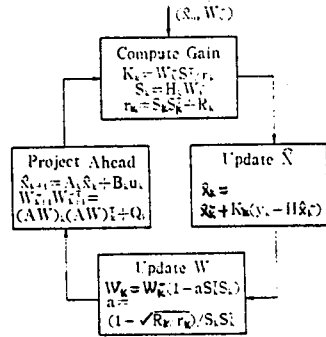


그림 4 제곱근 칼만 필터 기법의 계산 순서도  
Fig. 4 Computational Flow Chart of Square root Kalman Filter Algorithm

### 2.5 잡음인식과 추정

가우시안 잡음이 입, 출력에 존재할때 칼만필터의 출력이 실제 시스템 출력과의 차이 즉 이노베이션(Innovation)으로부터 잡음의 공분산 크기를 구할 수 있다. (16,17) 칼만필터가 최적(Optimal)이면 이노베이션이 가우시안 잡음의 특성을 가지므로 필터의 이득과 애러 공분산이 최적이고 Q, R이 실제값이다. 임의의 초기값 Q\_0, R\_0로부터 식제 Q, R을 추정하는 기법<sup>(16)</sup>을 요약하면 아래 식과 같다.

$$z_i = y_i - Hx_{i-1} \quad (25)$$

$$e_i = x_i - x_{i-1}$$

$$z_i = He_i + v_i$$

$$E\{z_i z_j^T\} = E\{(He_i + v_i)(He_j + v_j)^T\} \quad (26)$$

$$C_k = E\{z_i z_{i-k}^T\} \quad (27)$$

$$C_k = PH^T + R, \quad k=0 \quad (28)$$

$$C_k = H[A(I-KH)]^{k-1}A[PH^T - KC], \quad k>0$$

$$C_{-k} = C_k$$

칼만필터의 최적성 테스트에 대해 알아보면  $C_k$ 의 추정용  $\hat{C}_k$ 라 하고 시 불변 랜덤 수열의 에르고딕 원리(Ergodic principle)를 수식으로 표현하면 아래 식이 된다.

$$\hat{C}_k = (1/N) \sum_{i=k}^N z_i z_{i-k}^T \quad (29)$$

$$-1.96 / (N)^{1/2} < [C_k]_{ii} / [C_0]_{ii} < 1.96 / (N)^{1/2} \quad (30)$$

여기서 N은 샘플수이고 C\_0에 대한 C\_k의 정규 자기 상관계수가 신뢰도 95% 테스트에 식(30)을 만족하면 최적이고 만족하지 않으면 비최적으로 판정되어 Q, R을 아래 식으로 추정한다.

$$\hat{R} = \hat{C}_0 - H(PH^T) \quad (30)$$

$$\sum_{j=0}^{k-1} HA^j \hat{Q}^T (A^j - K^j) TH^T =$$

$$AP(A-k)TH^T - HA^k PH^T - \sum_{j=0}^{k-1} HA^j \hat{Q}^T (A^j - K^j) TH^T \quad (31)$$

$$\Omega = A[-KH^T - PH^T K' + KC_0 K']A', \quad k=1, \dots, n$$

### 2.6 사례연구와 검토

사례연구로 입, 출력에 가우시안 랜덤 잡음이 있는 SISO인 4차 확률시스템에 대해 시뮬레이션해보고 결과를 검토하면 아래와 같다.

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.654 \\ 1 & 0 & 0 & 0.784 \\ 0 & 1 & 0 & -0.180 \\ 0 & 0 & 1 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.34 \\ -0.16 \\ -0.40 \\ 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

$$y_i = [0 \ 0 \ 0 \ 1.] x_i + v_i$$

$$Q = 1. \quad R = .25$$

$$\hat{Q}_0 = 2. \quad \hat{R}_0 = 1.$$

시스템을 ARMAX 모델로 표현하면 아래 식이 된다.

$$A(q^{-1}) = 1 - q^{-1} + 0.18q^{-2} - 0.784q^{-3} + 0.656q^{-4}$$

$$B(q^{-1}) = q^{-1} - 0.4q^{-2} - 0.16q^{-3} - 0.34q^{-4}$$

$$C(q^{-1}) = 1 + q^{-1} + q^{-3}$$

먼저 적응 기준모델 제어계를 구성하여  $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ 의 계수를 구하면 그림 5와 같다. 잡음의 공분산의 추정이 표 1에 제시하였다. 본 연구에서는 이노베이션 샘플수를 500개와 950개로 하였다.

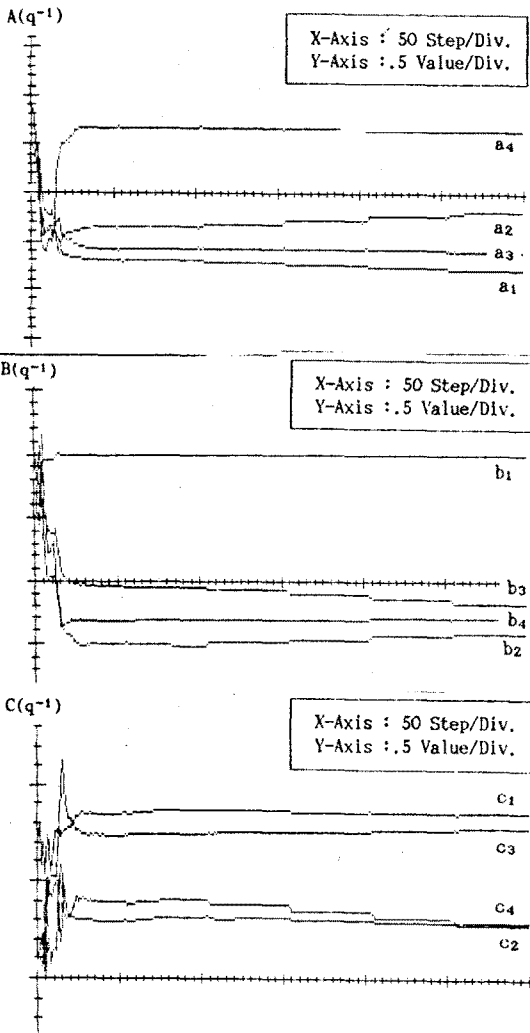


그림 5 시스템 파라미터 계수( $A(q^{-1}), B(q^{-1}), C(q^{-1})$ )  
Fig. 5 Coefficients of System Parameter( $A(q^{-1}), B(q^{-1})$ )  
and Noise Parameter( $C(q^{-1})$ )

표-1 잡음 공분산에 대한 추정 결과

Table-1 Estimate Results of Noise Covariance

Iteration No.	$\hat{Q}$	$\hat{R}$
0	2.000	1.000
1	0.619	0.346
2	0.508	0.321
3	0.583	0.318
4	0.463	0.237
5	0.614	0.349
6	0.654	0.353
7	0.811	0.327
8	0.593	0.390
9	0.507	0.368
10	0.619	0.310

### 3. 결 론

본 연구에서 얻은 결론을 요약하면 아래와 같다.

1. 시스템에 잡음이 포함되어 있는 경우, 파라미터 추정을 수행하면서 잡음의 공분산을 인식하였다.
2. 이노베이션을 이용한 공분산 테스트의 기법을 제시하였다.
3. 백색 잡음의 계수를 확장 최소 자승법과 기준모델 제어기를 설계하여 추정하였다.
4. 스칼라 자승근 칼만 필터를 통해서 출력 센서의 사양과 대칭성 파괴의 염려를 극복하였다.

### 참 고 문 헌

- [1] A.N.Kolmogrove, "Interpolation and extrapolation of stationary rando sequence," Bull. Acad. Sci USSR Ser. Mata Vol. 5, Transl: RanCorp., Santa Monica, Calif., Memo RM-3090 Press, 1941
- [2] N.Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series MIT press, Cambridge, Mass., 1949
- [3] R.E. Kalan, "A new approach to linear filtering and predication problems," Trans. Asme, J.basic Eng. Vol.82, pp.35~45, Mar., 1960
- [4] Y.D.Landau, Adaptive control, Marcel dekker, Inc., 1979
- [5] V.Panuska, "A new form of the extend Kalman filter for parameter estimation in linear systems with correlated noise," IEEE Trans. Automat. control, Vol.AC-25, pp.229~235, apr., 1980
- [6] S.M. Bozic, Digital and Kalman filtering, Edward Arnold, 1979
- [7] W.S. Harold, Kalman filtering: Theory and application, IEEE Press selected reprint series, 1985
- [8] G.B. Robert, Introduction to random signal analysis and Kalman filtering, John Wiley & Sons, Inc., 1983
- [9] P.S. Andrew & L.M. James, Estimation theory with applications to communications and control, McGraw-hill, 1971
- [10] P.S. Mayback, Stochastic models, estimation, and control, Academic Press, Inc., 1979
- [11] D.O. Anderson & J.B. Moor, Optimal filtering, Prentic-Hall, Inc., 1979
- [12] G.K. Paul, E.B. Arthur & F.S. Stanley, "Discrete square root filtering: A survey of current techniques," IEEE trans. Automat. Control, Vol.AC-16, pp.727~735, Dec., 1971
- [13] K.J. Astron, Introduction to stochastic control theory, Academic Pree, Inc., 1970
- [14] A.P. Sage & C.C. White, "Optimal system control 2-nd., Prentice hall, Inc., 1970
- [15] K.J. Astron & B. Wittemark, Computer controlled system, Prentice hall, Inc., 1984
- [16] R.K. Merha, "On the identificatin of variance and adaptive Kalman filtering," IEEE Trans. Automat. contr. Vol.15, pp.175~184, Apr., 1970

[17] R.K. Mehra, "On-line identification of linear dynamic system with application to Kalman filtering," IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, pp.12~21, Feb., 1971