월쉬 함수에 의한 선형 시불변 고차 시스템의 모델 축소 방법

안 두 수*, 박 준 훈**, 김 민 형*, 임 윤 식*o

*, 성균관 대학교 대학원 전기공학과
**, 충주공업대학 제어계측과

A method to reduce the order of high-order LTI system via Walsh function.

AHN, DOO-SOO* PARK, JUN-HOON** KIM, MIN-HYUNG* LIM, YUN-SIC*o

*, Dept, of Electrical Engineering, Sung-Kyun-Kwan University
**, Dept, of Control and Instrumentation Eng, Chung-Ju Tach, College

ABSTRACT

This paper presents the method to reduce the order of high-order linear time invarient system via Walsh function. It is based on the matrix pseudoinverse algorithm to determine the parameters of the reduced model which minimize the sum of the squares of the errors between the reponses of the high-order system and a reduced model to a given input. This proposed method can be conveniently implemented with a computer. They will be very useful in the study of control system via Walsh function.

I. 서 론

실제적인 물리계는 고차시스템으로 표현되는 경우가 대부분인데 시스템의 차수가 커지면 그 시스템의 동작을 이해하기 어렵고, 또한 제어기 설계가 복잡해진다. 따라서, 주어진 고차 시스템을 그와 유사한 특성을 갖는 저차 시스템으로 변환 한다면 시스템의 해석과 제어기 설계가 용이해 질 것이다. 이러한 모델 축소기법에는 여러가지 많은 방법들이 제시되어 왔는데 이 방법들은 특성상 세가지로 분류할 수 있다. 1) Dominant pole retention 방법으로 S-plane의 허수축 가까이 있는 pole 은 유지시키고 멀리있는 pole은 제거시켜 축소된 시스템을 얻게 된다. 이 방법은 Davison, Marshall, Mitra, Aoki 등에 의해 제시되어 연구되고 있다. 2) 고차 시스템을 연분수 전개 (continued fraction) 하여 고차 시스템과 유사한 특성을 지니는 항만 남기고 나머지 항은 제거시켜 축소된 시스템을 얻는 방법으로 Chen 과 Shieh 에 의해 제시되어 연구되고 있다.[1] 3) 고차 시스템의 응답에 가장 최적한 응답을 갖는 저차 시스템을 얻는 방법으로써 Anderson 이 시간 영역에서 최소 자승 오차를 최소로 줄이는 저차 시스템을 얻기 위해 직교 투영법에 기초한 기하학적 접근 방법에서 시작되었다.[6] 또한, Shinha와 Pille 는 두시스템의 응답 사이의 오차를 최소화하기 위한 matrix pseudoinverse 의 응용을 제시하였다.[2]

현대 제어 이론에서 시스템의 해석, 간단화, 최적 제어 및 설계등의 연구에 월쉬(Walsh), 블럭펄스(Block pulse) 체비쉐브(Chebyshev) 등의 직교 함수가 널리 사용되고 있는데 이는 시스템의 제반 문제들을 대수적 접근 방법에 의해 쉽게 해결 할 수 있다는 장점 때문이다. 본 연구에서는 최적 응답 방법에 기초하여 직교 함수인 월쉬 함수를 적용한 모델 축소 방법을 제시하고자 한다.

II. 평가 함수의 형태 결정

다음을 선형 시불변 고차 시스템이라 하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = H^T x(t) \qquad x(t) \in R^n \tag{2.1}$$

저차 시스템을 다음과 같이 가정하자.

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t) \qquad y_r(t) = H_r^T x_r(t) \qquad x_r(t) \in R^r \ , \ (r < n) \tag{2.2}$$

저차의 출력 y_r 이 임의 입력에 대해 고차의 출력 y 에 접근하도록 파라미터 (A_r, B_r, H_r) 을 결정해야 한다.

임의 입력에 대한 고차와 저차의 출력 간의 오차는 다음과 같다.

$$e(t) = y(t) - y_r(t) \tag{2.3}$$

다음과 같은 자승 형태의 평가 함수를 고려하자.

$$J_o = \int_0^T e^2(t)\, dt \tag{2.4}$$

따라서, 이 평가 함수를 최소화하는 저차 시스템을 결정해야 한다.

월쉬 함수는 $t \in [0,1)$ 에서 정의되므로 월쉬 함수가 적용된 평가 함수를 고려하기 위해 시간 스케일링(time scaling)을 하여 나타내면 다음과 같다.[3]

$$\tau = \frac{t}{T} \ ; \quad dt = Td\tau \tag{2.5}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = T(Ax + Bu) \tag{2.6}$$

$$\frac{dx_r}{d\tau} = T(A_r x_r + B_r u) \tag{2.7}$$

$$J = \int_0^1 e^2(\tau)\, d\tau \tag{2.8}$$

고차의 출력 $y(\tau)$ 를 월쉬 급수 형태로 나타내면

$$y(\tau) = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_{m-1}\phi_{m-1} + \cdots \tag{2.9}$$

c_i : 고차의 월쉬 급수 계수
ϕ_i : 월쉬 함수 $\phi_i(\tau)$

와 같다.

저차의 출력 $y_r(\tau)$ 를 월쉬 급수 형태로 나타내면

$$y_r(\tau) = c_{r0}\phi_0 + c_{r1}\phi_1 + \cdots + c_{rm-1}\phi_{m-1} + \cdots \tag{2.10}$$

c_{ri} : 저차의 월쉬 급수 계수

와 같다.

식 (2.9) 와 (2.10) 을 식 (2.3) 에 대입하면

$$e(\tau) = (c_0 - c_{r0})\phi_0 + (c_1 - c_{r1})\phi_1 + \cdots + (c_{m-1} - c_{rm-1})\phi_{m-1} + \cdots \tag{2.11}$$

식 (2.11) 을 식 (2.8)에 대입하여 평가 함수를 구하면 다음과 같다.[3]

$$J=\int_0^1 [(c_0-c_{r0})\phi_0+(c_1-c_{r1})\phi_1+\cdots+(c_{m-1}-c_{rm-1})\phi_{m-1}+\cdots]^2\, d\tau$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(c_i-c_{ri})^2 \qquad (2.12)$$

식 (2.12) 는 월쉬 함수의 직교 특성에 의해 얻어진다.

$$\int_0^1 \phi_i\phi_j\ d\tau = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ 1 & i=j \end{cases}$$

Ⅲ. 월쉬 함수에 의한 고차 시스템의 해석

다음과 같은 선형 시불변 고차 전달 함수를 고려해 보자.

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1s+a_0} \qquad (3.1)$$

위 시스템을 미분 방정식으로 나타내면

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_1\frac{d}{dt}y(t)+a_0y(t)$$

$$=b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t)+b_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}u(t)+\cdots+b_1\frac{d}{dt}u(t)+b_0u(t) \qquad \cdots\cdots\cdots (3.2)$$

와 같다. 전달 함수를 미분 방정식으로 표현하면 일반적인 상태 방정식 표현에서 n^2+n 개의 파라미터 수가 $2n$개로 감소됨을 알 수 있다. 월쉬 함수를 적용하기 위해 시간 스케일링 하고, 식 (3.2)를 표시하면

$$\frac{d^n}{d\tau^n}y(\tau)+a_{n-1}T\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}y(\tau)+\cdots+a_1T^{n-1}\frac{d}{d\tau}y(\tau)+a_0T^ny(\tau)$$

$$=b_{n-1}T\frac{d^{n-1}}{d\tau^{n-1}}u(\tau)+b_{n-2}T^2\frac{d^{n-2}}{d\tau^{n-2}}u(\tau)+\cdots+b_1T^{n-1}\frac{d}{d\tau}u(\tau) \qquad \cdots\cdots\cdots (3.3)$$

와 같다. 식 (3.3) 양변에 n 회의 적분을 취하면

$$y(\tau)+a_{n-1}Ty^1(\tau)+a_{n-2}T^2y^2(\tau)+\cdots+a_1T^{n-1}y^{n-1}(\tau)+a_0T^ny^n(\tau)$$

$$=b_{n-1}Tu^1(\tau)+b_{n-2}T^2u^2(\tau)+\cdots+b_1T^{n-1}u^{n-1}(\tau)+b_0T^nu^n(\tau) \qquad \cdots\cdots\cdots (3.4)$$

와 같다. 여기서 윗 첨자는 적분 횟수를 의미한다.
$y(\tau)$ 와 $u(\tau)$ 을 월쉬 함수 유한 급수 전개[4] 를 하면

$$y(\tau)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\phi_i(\tau) \qquad (3.5)$$
$$=C^T\Phi(\tau)$$

$$u(\tau)=\sum_{i=0}^{m-1}u_i\phi_i(\tau) \qquad (3.6)$$
$$=U^T\Phi(\tau)$$

와 같고, $y(\tau)$와 $u(\tau)$ 의 월쉬 계수 벡터는 다음과 같다.

$$C^T=[\ c_0\ c_1\ c_2\ \cdots\cdots\ c_{m-1}\ ] \qquad (3.7)$$
$$U^T=[\ u_0\ u_1\ u_2\ \cdots\cdots\ u_{m-1}\ ] \qquad (3.8)$$

미분 방정식을 적분 방정식으로 변환하고 직교함수를 도입할 때 적분 방정식을 대수방정식으로 변환해주는 적분연산자 (operational matrix) 가 필요하다.

$$\int_0^1 \phi(\tau)\ d\tau = P\Phi(\tau) \qquad (3.9)$$

여기서, P는 적분 연산자 (operational matrix) 로 다음과 같은 형태이다.

$$P_{(m\times m)}=\left[\begin{array}{c|c} P_{(m/2\times m/2)} & -\frac{1}{2m}I_{(m/2\times m/2)} \\ \hline \frac{1}{2m}I_{(m/2\times m/2)} & 0_{(m/2\times m/2)} \end{array}\right] \qquad (3.10)$$

단, $P_{(1\times1)}=1/2$

식 (3.5),(3.6),(3.10) 을 식 (3.4) 에 대입하여 전개하면

$$C^T\Phi(\tau)+a_{n-1}TC^TP\Phi(\tau)+\cdots+a_1T^{n-1}C^TP^{n-1}\Phi(\tau)+a_0T^nC^TP^n\Phi(\tau)$$

$$=b_{n-1}TU^TP\Phi(\tau)+b_{n-2}T^2U^TP^2\Phi(\tau)+\cdots+b_0T^nU^TP^n\Phi(\tau) \qquad (3.11)$$

와 같고, 식(3.11)에서 $\Phi(\tau)$를 소거하여 정리하면

$$C^T+a_{n-1}TC^TP+a_{n-2}T^2C^TP^2+\cdots+a_1T^{n-1}C^TP^{n-1}+a_0T^nC^TP^n$$

$$=b_{n-1}TU^TP+b_{n-2}T^2U^TP^2+\cdots+b_0T^nU^TP^n \qquad (3.12)$$

와 같다. 임의 입력이 주어지면 U가 결정되고, 따라서 출력의 계수 벡터 C 가 다음과 같이 구해진다.

$$C^T[\ I+a_{n-1}TP+a_{n-2}T^2P^2+\cdots+a_0T^nP^n\ ]$$
$$=b_{n-1}TU^TP+b_{n-2}T^2U^TP^2+\cdots+b_0T^nU^TP^n$$

$$C^T=[\ b_{n-1}TU^TP+b_{n-2}T^2U^TP^2+\cdots+b_0T^nU^TP^n\ ]$$
$$\times[\ I+a_{n-1}TP+a_{n-2}T^2P^2+\cdots+a_0T^nP^n]^{-1} \qquad (3.13)$$

Ⅳ. 모델 축소 기법

고차 시스템에 대한 축소 모델의 전달 함수를 다음과 같이 가정하자.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)}=\frac{\beta_{r-1}s^{r-1}+\beta_{r-2}s^{r-2}+\cdots+\beta_1s+\beta_0}{s^r+\alpha_{r-1}s^{r-1}+\alpha_{r-2}s^{r-2}+\cdots+\alpha_1s+\alpha_0} \qquad (4.1)$$

단, $r<n$

고차 모델과 같은 절차에 따라 축소 모델을 식 (3.12) 와 같이 나타내면

$$C_r^T+\alpha_{r-1}TC_r^TP+\alpha_{r-2}T^2C_r^TP^2+\cdots+\alpha_1T^{r-1}C_r^TP^{r-1}+\alpha_0T^rC_r^TP^r$$

$$=\beta_{r-1}TU^TP+\beta_{r-2}T^2U^TP^2+\cdots+\beta_1T^{r-1}U^TP^{r-1}+\beta_0T^rU^TP^r \qquad (4.2)$$

여기서, C_r 은 축소 모델의 출력 계수 벡터
식 (2.12) 에 의해 고차와 저차 모델 간의 출력의 최소 자승 오차를 최소화하려면 $\partial J/\partial c_{ri}=0$을 만족해야 한다.[5]
따라서, 식 (4.2)를 정리하면

$$C^T+\alpha_{r-1}TC^TP+\alpha_{r-2}T^2C^TP^2+\cdots+\alpha_1T^{r-1}C^TP^{r-1}+\alpha_0T^rC^TP^r$$

$$=\beta_{r-1}TU^TP+\beta_{r-2}T^2U^TP^2+\cdots+\beta_1T^{r-1}U^TP^{r-1}+\beta_0T^rU^TP^r \qquad (4.3)$$

와 같이되고, 식 (4.3) 을 쉽게 표시해 보면

$$C^T=RQ \qquad (4.4)$$

와 같이 된다.
여기서 미지 파라미터 벡터 R 은 다음과 같고,

$$R = [\ \alpha_{r-1}T \ \ \alpha_{r-2}T^2 \cdots \alpha_1 T^{r-1} \ \ \alpha_0 T^r \ \ \beta_{r-1}T \ \ \beta_{r-2}T^2 \cdots \beta_1 T^{r-1} \ \ \beta_0 T^r\ ] \qquad (4.5)$$

그리고 Q는 mx2r 행렬로 다음과 같다. (m:월쉬 전개항 수)

$$Q = [\ -C^TP \ \ -C^TP^2 \ \cdots \ -C^TP^{r-1} \ \ -C^TP^r \ \ U^TP \ \ U^TP^2 \ \cdots \ U^TP^{r-1} \ \ U^TP^r\ ]^T \qquad (4.6)$$

미지 파라미터 벡터 R를 구하기위해 다음과 같은 자승오차를 고려하자.

$$J_R=(RQ-C^T)^T(RQ-C^T) \qquad (4.7)$$

식 (4.7) 을 최소화하기 위해 $\partial J_R/\partial R = 0$ 를 만족하는 미지 파라 미터 벡터 R 을 결정해야 한다. 여기서 R 은 다음 방정식으로 구할 수 있다.[7]

$$R=C^TQ^T[QQ^T]^{-1} \qquad (4.8)$$

V. 적 용 예

다음은 7차 시스템의 전달 함수이다.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{375000(s+0.08333)}{s^7+83.635s^6+4097s^5+70342s^4+853703s^3+2814271s^2+3310875s+281250} \qquad (5.1)$$

다음과 같이 2차 시스템의 전달 함수로 축소시켜 보자.

$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \qquad (5.2)$$

<결 과>

C = [0.0677 -0.0358 -0.016 -0.0065 -0.0073 -0.0025 0.0006 0.0027]

R = [-3.5232 -4.6743 -0.0406 0.5478]

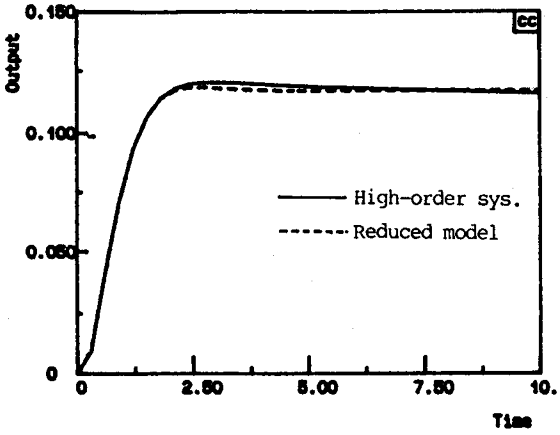
$$\frac{Y_r(s)}{U(s)} = \frac{-0.0406s + 0.5478}{s^2 + 3.5232s + 4.6743}$$

Cr = [0.0322 -0.0231 -0.0102 0.0022 -0.0049 0.0012 0.0009 0.0014]

$$J = \sum_{i=0}^{8} (c_i - c_{ri})^2 = 0.001552$$

Sinha.N.K 와 Bereznai.G.T 가 제시한 방법[2] 과의 비교.

평가함수	축소 모델	Pole위치	평가함수 값
Minimax perpendicular error	$\frac{-0.0406s+0.5478}{s^2+3.5232s+4.6743}$	-1.213 ± j1.043	0.00293
$\Sigma\|e\|$	$\frac{0.1536s-0.01329}{s^2+1.3456s+0.1196}$	-0.0957 , -1.250	0.7690
$\Sigma\ e^2$	$\frac{0.3960}{s^2+2.6569s+3.4191}$	-1.328 ± j1.286	0.001915
$\Sigma\ (c_i-c_{ri})^2$ 본 연구방법	$\frac{-0.0406s+0.5478}{s^2+3.5232s+4.6743}$	-1.7616 ± j2.507	0.001552



단위 입력에 의한 고차와 저차 모델의 출력 비교

Ⅵ. 결론

본 연구에서는, 전달 함수로 표현된 선형 시불변 고차 시스템을 저차의 모델로 축소시킬때, 임의의 저차 모델의 계수를 최소 자승 오차법에 의해 구함으로써 기존의 시행착오법의 번거로움을 피할 수 있었고, 직교 함수인 월쉬 함수를 이용하여 미분 방정식을 대수 방정식으로 변환하여 계산하기 때문에 알고리즘과 계산이 간단해 짐을 보였다.
또한, 적용예에서 볼 수 있듯이 저차의 출력이 고차의 출력을 근접하게 따라감으로써 이 논문에서 제시한 방법이 효과적임을 알 수 있다. 앞으로 비선형, 시변계 뿐만아니라 MIMO 시스템에 대해서도 많은 연구가 있어야 되리라 사료된다.

Ⅶ. 참고문헌

1. Chen.C.F and Shieh.C.S " A novel approach to linear model simplication " Int.J.Control vol 8. No 6, 1968, pp 561-570

2. Shinha.N.K and Bereznai.G.T " Optimum approximation of high-order systems by low-order models " Int.J.Control vol 14. No 5,1971, pp 951-959

3. SUBBAYYAN.R and VAITHILINGAM.M.C " Walsh function for simplification of linear system " Proceedings of the IEEE, vol 67, No 12, 1979, pp 1676-1678

4. Chen.C.F and Hsiao.C.H " A state-space approach to Walsh series solution of linear systems " Int.J. Syst.Sci, vol 6, 1975, pp 833-858

5. Cheng-Chian Liu and Yen-Ping Shih " Model reduction via Chebyshev Polynomials " Comput & Elect. Eng Vol 12, No 3/4, 1986, pp 89-100

6. Shinha.N.K and Kuszta.B " Modeling and Identification of Dynamic System " Van Nostrand Reinhold Company, 1983

7. Strang.G " Linear Algebra and its applications " 2nd ed. Academic Press, 1980.