비최소위상 시스템을 위한 수정된 LQG/LTR 방법

김 상 우
포항공과대학 전자전기공학과

A Modified LQG/LTR Method for Nonminimum Phase Systems

Kim, Sang Woo
Dept. of Electronic and Electrical Eng., POSTECH

ABSTRACT : In this paper, an LQG/LTR procedure for stable nonminimum phase systems is suggested using predictor scheme. In the method,the performance of the target feedback loop can be easily adjusted and the recovery error is less dependent on the location of NMP zeros than previous methods. The gain and phase margin and the robust ness for modeluncertainty of the suggested control system are obtained.

1. 서 론

Doyle과 Stein [1,2] 에 의하여 제안된 LTR (Loop Transfer Recovery) 설계방법은 여러가지 응용문제를 통하여 SISO 및 MIMO 시스템 설계문제에 있어서 간단하고 효과적인 해로 입증되었다 [2-9]. 근본적으로 LTR방법은 바람직한 성능을 갖는 상태되먹임 루우프(표적시스템,Target System)를 설계하고, 그 후 적당히 선택된 관측기이득을 이용하여 관측기를 이용한 출력되먹임 시스템의 성능을 점근적으로 표적시스템의 성능과 같아지도록하는 방법이다. 특히 플랜트가 좌측역변환(Left Inversion)이 가능하고 최소위상(Minimum Phase)인 경우 관측기를 이용한 제어기의 루우프가 모든 주파수 범위에서 상태되먹임 제어기의 루우프에 점근적으로 같아지게할 수 있다. 이러한 LTR 설계방법은 근본적으로 플랜트 역변환의 일종이므로 최소위상 조건은 필수적이며, 이 조건이 만족되지 않으면 루우프회복(Loop Recovery)을 임의로 좋게 만들 수 없다. 그러나 실제 상황에서 많은 플랜트들이 비최소위상 영점(Nonminimum Phase Zero)을 갖고 있으므로 이러한 성질은 LTR방법의 응용에 있어서 하나의 결점이된다. 또한, 다변수 시스템은 종종 서로 다른 크기의 시간지연을 포함시키며, 서로 다른 루우프를 다른 속도로 샘플하는 경우도 있는데 이러한 상황은 비최소위상 영점으로 모델된다. 그러므로 비최소위상 영점에 기인하는 제약을 LTR 설계과정에 포함시키는 방법이 요구된다.

현재까지 연구된 비최소위상 영점의 제약을 극복하기위한 방법들은 크게 다음의 두가지로 나뉜다. 첫번째는 비최소위상 시스템을 최소위상 시스템과 전역함수(All Pass Function)로 나누고 비최소위상 시스템에 대한 칼만필터의 이득을 조절하여 루우프전달함수가 회복되도록 최소위상 상태변수만 되먹임시키는 표적시스템(target system)을 설계하는 방법으로, 회복오차는 없으나 모든 비최소위상 시스템에 대하여 강인성을 보장하는 표적시스템의 설계가 어려우며 항상가능한 것도 아니다[10]. 두번째는 비최소위상 시스템에 대하여 일반적인 LQG/LTR 방법을 적용한 후 비최소위상 영점의 영향으로 생기는 민감도함수(sensitivity function)의 회복오차를 orthogonal projection으로 없애는 방법인데, 이 경우에는 회복오차가 없는 대신 설계과정이 복잡하고 표적시스템의 강인성을 보장할 수 없다[11].

본 연구에서는 안정한 비최소위상 시스템을 최소위상 시스템과 전역함수로 나누고, 표적시스템을 최소위상 상태변수만 되먹임시키는 제어기로 설계하고 설계과정에서 무시된 전역함수부의 영향을 예측기구조를 이용하여 줄이는 방법을 제시한다. 이 방법을 이용하면 회복오차가 줄어들고 표적시스템의 성능을 쉽게 조절할 수 있다는 장점이 있으며, 제어루우프에 곱하기형 모델 불확실성이 존재하는 경우 이에 대한 강인성 척도가 최소위상시스템 만으로 제어기를 설계했을 때와 같아짐을 보인다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 제어기의 설계방법을 제시하고, 3절에서는 회복오차 및 강인성을 해석하고, 4절에서 결론을 맺는다.

2. 설계방법

다음과 같은 안정한 비최소위상 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$
$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

여기서 xt)는 n차의 상태벡터이고, u(t)는 m차의 제어벡터이고, y(t)는 p차의 출력벡터이고, $p \geq m$ 이다. 이 시스템의 전달함수 모델은 다음과 같다.

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B \quad (3)$$
$$= C\phi(s)B$$

여기서 $\phi(s) = (sI_n - A)^{-1}$ 이다. 이 전달함수는 다음과 같이 비최소위상 시스템과 전역함수로 나뉠 수 있다.

$$G(s) = C\phi(s)B_mB_z(s) = G_m(s)B_z(s) \quad (4)$$

여기서 $G_m(s) = C\phi(s)B_m$는 $\{A,B_m,C\}$의 최소위상 시스템이고 $B_z(s)$는 $B_z(s)B_zT(-s) = I_m$ 을 만족한다.

위의 비최소위상 시스템에 대하여 LQG 제어기는 다음과 같다.

$$u_{LQG}(t) = -K_m\hat{x}(t) \quad (5)$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B_mu(t) + F_m(y-\hat{C}x) \quad (6)$$

여기서 K_m 및 F_m은 LQ 조절기와 Kalman filter의 이득으로 다은의 대수 Riccati 방정식의 해를 사용하여 구한다.

$$A^TP + PA + Q_m - PB_mR_m^{-1}B_mTP = 0 \quad (7)$$
$$A\Xi + \Xi A^T + W_m - \Xi C^TV_m^{-1}C\Xi = 0 \quad (8)$$
$$K_m = R_m^{-1}B_mTP \quad (9)$$
$$F_m = \Xi C^TV_m^{-1} \quad (10)$$

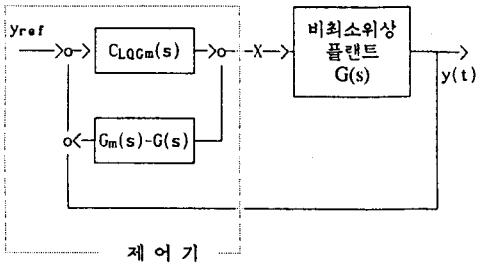
여기서 Q_m과 R_m은 상태변수와 제어량 가중치행렬이고 W_m과 R_m은 상태잡음과 측정잡음의 공분산행렬이다.

위의 최소위상 시스템에 대한 LQG 제어방법을 그림1의 구조를 갖는 제어시스템에 적용한다.

그림1의 제어시스템에서 LQG 제어기의 전달함수는

$$C_{LQGm}(s) = K_m(sI_n - A + B_mK_m + F_mC)^{-1}F_m \quad (11)$$

이고, 제어량 u(s)는



$C_{LQGm}(s)$: 최소위상시스템에 대한 LQG제어기
$G(s) = G_m(s)B_z(s)$

그림1. 수정된 LQG/LTR 제어시스템의 구조

$$u(s) = [I_m+C_{LQGm}(s)\{G_m(s)-G(s)\}]^{-1} C_{LQGm}(s)\{y_{ref}(s)-y(s)\} \quad (12)$$

가 된다. 그러므로 'X' 점에서 루우프가 절단되었을 때 루우프 전달함수는

$$H_m(s)=[I_m+C_{LQGm}(s)\{G_m(s)-G(s)\}]^{-1}C_{LQGm}(s)G(s) \quad (13)$$

가 되고 전달함수는

$$\begin{aligned} T_m(s)&=[I_m+H_m(s)]^{-1}H_m(s)\\ &=[I_m+C_{LQGm}(s)G_m(s)]^{-1}C_{LQGm}(s)G(s)\\ &=[I_m+C_{LQGm}(s)G_m(s)]^{-1}C_{LQGm}(s)G_m(s)B_z(s) \quad (14)\end{aligned}$$

가 된다. $C_{LQGm}(s)$는 $G_m(s)$를 안정하게 하므로 $[I+C_{LQGm}(s)G_m(s)]^{-1}C_{LQGm}(s)G_m(s)$는 안정하다. 또한 $B_z(s)$는 안정한 전역함수이므로 $T_m(s)$는 안정하다. 단지 예측기 구조상 대상시스템 G(s)는 안정해야 한다.

위의 LQG 제어기 설계시 상태잡음 및 측정잡음의 공분산 행렬을

$$W_m = q^2B_mB_m^T, \qquad R_m = I_m$$

으로하고 q를 무한이 크게하면 Kalman filter의 이득 F_m은 점근적으로 qB_mU_B 가 된다. 여기서 U_B는 Unitary 행렬이다. ($U_BU_B^T = I_n$) 그러므로 루우프 전달함수 $H_m(s)$는 q가 커짐에 따라서 점근적으로 다음과 같이 된다.

$$H_m(s) \rightarrow [I_m + E_m(s)]^{-1}[H_{mT}(s) - E_m(s)] \quad (15)$$

여기서 $H_{mT}(s)$는 제어기 설계시의 표적시스템으로

$$H_{mT}(s) = K_m(sI_n - A)^{-1}B_m \quad (16)$$

이고 $E_m(s)$는 회복오차로

$$E_m(s) = K_m(sI_n - A)^{-1}B_m(s)[I_m - B_z(s)] \quad (17)$$

으로 정의된다. 민감도 함수 (Sensitivity Function) 는

$$S_m(s) = [I_m + H_m(s)]^{-1} \quad (18)$$

로 정의되므로 q가 무한이 커짐에 따라서

$$\begin{aligned} S_m(s) &\rightarrow [I_m + \{I_m + E_m(s)\}^{-1}\{H_{mT}(s) - E_m(s)\}]^{-1}\\ &= [I_m + H_{mT}(s)]^{-1}[I_m + E_m(s)] \quad (19)\end{aligned}$$

가 된다.

3. 제어시스템의 성능 및 강인성 - 비최소위상 시스템에 대한 LQG/LTR 제어기와의 비교

식 (1)과 (2)로 표현되는 비최소위상 시스템에 LQG/LTR 방법을 적용하면 다음과 같은 루우프 전달함수와 민간도함수를 얻을 수 있다[11].

$$H(s) \rightarrow [I_m + E(s)]^{-1}[H_T(s) - E(s)] \quad (20)$$
$$S(s) \rightarrow [I_m + H_T(s)]^{-1}[I_m + E(s)] \quad (22)$$

여기서 $H_T(s)$는 표적시스템으로

$$H_T(s) = K(sI_n - A)^{-1}B \quad (23)$$

이고 E(s)는 회복오차로

$$E(s) = K(sI_n - A)^{-1}[B - B_mB_z(s)] \quad (24)$$

로 정의된다. 여기서 K는 비최소위상 시스템 {A,B,C}에 대한 상태되먹임 이득으로 식 (7)과 (9)에서 $\{B_m, Q_m, R_m\}$ 대신 {B,Q,R}을 대입하여 얻는다.

위의 결과와 앞절에서 얻은 결과를 비교하면 루우프 전달함수와 민감도함수의 형태는 같지만 표적시스템 $\{H_T(s), H_{mT}(s)\}$ 와 회복오차 $\{E(s), E_m(s)\}$ 가 다름을 알 수 있다. 결국 설계된 제어시스템의 성능은 표적시스템의 성질과 회복오차의 크기에 따라서 결정된다.

식 (15)와 (23)으로 표현되는 표적시스템의 성능의 좋고 나쁨은 결국 $\{Q_m, R_m\}$과 {Q,R}의 선택에 좌우되나 식 (23)은 비최소위상 시스템에 대한 LQ 조절기 이므로 얻을 수 있는 성능에 한계가 있다. 그러나 식 (15)는 최소위상 시스템에 대한 LQ 조절기 이므로 $\{Q_m, R_m\}$을 조절하여 임의의 성능을 얻을 수 있다.

식 (19)와 (24)로 정의된 회복오차는 일반적인 다변수 시스템에서 비교하기 힘들다. 그러나 단일입출력 시스템이고 비최소위상 영점이 하나인 경우 이들의 값을 쉽게 구할 수 있으며 그 값들은 다음과 같다.

$$E_m(s) = \frac{2s}{z + s} H_{mT}(s)$$

$$E(s) = \frac{2z}{z + s} H_T(z)$$

여기서 z 는 비최소위상 영점의 위치이다. 위의 두식의 크기는 다음의 세가지 주파수 영역에서 비교해볼 수 있다.

1) $\omega \ll z$ 인 경우
$E_m(\omega) \approx 0$
$E(\omega) \approx 2\, H_T(z)$
2) $\omega \approx z$ 인 경우
$|E_m(j\omega)| \approx 2|H_{mT}(jz)|$
$|E(j\omega)| \approx 2\, H_T(z)$
3) $\omega \gg z$ 인 경우
$|E_m(j\omega)| \approx 2|H_{mT}(j\omega)|$
$|E(j\omega)| \approx 0$

위 식들을 비교해 보면 저주파수에서는 $E_m(s)$가 작고 고주파수에서는 E(s)가 작은 것 처럼 해석될 수 있다. 그러나 일반적으로 제어시스템은 저대역필터 (Low pass filter) 의 성질을 갖고 있으므로 $\omega \gg z$ 인 경우 $|E_m(j\omega)| \approx 2|H_{mT}(j\omega)|$ 는 매우 작은 값이 된다. 그러므로 $E_m(s)$가 E(s) 보다 저주파수 대역에서는 작고 고주파수 대역에서는 거의 비슷함을 알 수 있다.

제어시스템의 강인성은 이득여유(gain margin:GM)와 위상여유(phase margin:PM) 및 모델불확실성에 대한 안정도 강인성으로 판단된다. 다변수 시스템의 경우 이득 및 위상여유는 return difference matrix의 특이치(singular value)의 하한으로 결정되며 그 하한을 $\alpha \le 1$ 라고 하면 $GM = 1/[1\pm\alpha]$ 가 되고 $PM = \cos^{-1}[1-\alpha^2/2]$ 가 되는데 α가 1에 가까울 수록 GM과 PM은 커진다[12].

정리1. 비최소위상 시스템에 LQG/LTR 방법을 적용했을 때 return difference matrix의 특이치(singular value)의 하한을 α_o라 하고 본논문에서 제안된 제어시스템의 경우를 α_m이라 하면 그 값은 다음과 같다.

$$\alpha_o = 1/[1+\sigma_1\{E(j\omega)\}]$$
$$\alpha_m = 1/[1+\sigma_1\{E_m(j\omega)\}]$$

증명 : 비최소위상 시스템에 LQG/LTR 방법을 적용했을 때 return difference matrix는

$$F(s) = I_m + H(s) \rightarrow I_m + [I_m + E(s)]^{-1}[H_T(s) - E(s)]$$
$$= [I_m + E(s)]^{-1}[I + H_T(s)]$$
$$F(s)F^*(-s) \rightarrow [I_m+E(s)]^{-1}[1+H_T(s)][1+H_T(-s)]^*[I_m+ E(-s)]^{-*}$$
$$\geq [I_m+E(s)]^{-1}[I_m+ E(-s)]^{-*}$$
$$\therefore \alpha_o = \sigma_m[I_m+E(j\omega)]^{-1} = 1/\sigma_1[I_m+E(j\omega)] = 1/[1+\sigma_1\{E(j\omega)\}]$$

이 되고 본논문에서 제안된 제어시스템의 경우 비슷하게 계산하면

$$\alpha_m = \sigma_m[I_m+E_m(j\omega)]^{-1} = 1/[1+\sigma_1\{E_m(j\omega)\}]$$

이 된다. 여기서 $\sigma_m[\cdot]$과 $\sigma_1[\cdot]$은 각각 최소 및 최대 특이치를 표시한다.

위 정리에서 보듯이 GM과 PM은 회복오차가 작을 수록 큰 값을 갖게된다. Cross-over 주파수가 저주파이므로 특히 저주파에서 회복오차가 작은 것이 큰 GM과 PM을 갖게 되는데 위에서 비교한 바와 같이 저주파에서 $E_m(s)$가 $E(s)$보다 작으므로 본 논문에서 제안된 제어시스템이 더 좋은 GM과 PM을 갖게 된다. 모델불확실성은 다음과 같이 표시된다.

$$G_P(s) = G(s)[I_m + L(s)], \quad \sigma_1[L(j\omega)] < l_m(\omega)$$

Doyle과 Stein의 결과[2]로 부터 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리2. 비최소위상 시스템에 LQG/LTR 방법을 적용했을 때와 본논문에서 제안된 방법을 적용했을 때 $l_m(\omega)$가 다음의 관계를 만족하면 시스템은 L(s)에 대하여 안정하다.

$$l(\omega) < \frac{1}{\sigma_1[\{(I_m+H_T(j\omega)\}^{-1}\{H_T(j\omega)-E(j\omega)\}]} = \mu_o$$
$$l(\omega) < \frac{1}{\sigma_1[\{I_m+H_{mT}(j\omega)\}^{-1}H_{mT}(j\omega)]} = \mu_m$$

여기서 μ_o와 μ_m은 각각 비최소위상 시스템에 LQG/LTR 방법을 적용했을 때와 본논문에서 제안된 방법을 적용했을 때 허용될 수 있는 모델불확실성의 범위를 나타내며 클 수록 시스템의 강인성이 좋다. μ_o와 μ_m의 크기를 직접 비교하기는 어렵지만 μ_o에는 회복오차의 영향을 받고 μ_m은 회복오차의 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 특히 μ_m은 최소위상 시스템에 LQG/LTR방법을 적용했을 때 얻은 강인성과 같다.

4. 결 론

본 논문에서는 비최소위상 시스템에 대한 새로운 LQG/LTR 제어기 구조를 제안하고 비최소위상 시스템에 통상적인 LQG/LTR 방법을 적용시켰을 때 보다 우수함을 보였다. 본 연구에서 제안된 방법은 비최소위상 시스템을 최소위상 시스템 부분과 전역필터 부분으로 나누고 최소위상 시스템 부분에 대하여 통상적인 LQG/LTR 제어기를 설계하고, 전체 제어시스템의 구조에 예측기 형태를 추가함으로써 제어기 설계과정에서 무시한 전역필터 부분의 영향을 줄였다. 본 논문의 결과를 Zhang이 분석한 결과[11]와 비교하여 보면 표적시스템 설계시성능 조절이 쉽고 회복오차도 작음을 알 수 있다. 또한 이득 및 위상여유와 모델불확실성에 대한 강인성도 우수함을 보였다. 그러므로 본 논문에서 제안된 방법은 비최소위상 시스템에 대한 제어기 설계에 유용하리라 생각된다.

본 논문에서는 안정한 비최소위상 시스템만을 대상으로 하였는데 앞으로 불안정한 시스템을 포함하는 설계기법이 연구될 필요가 있다.

알림 : 본 연구는 국방과학연구소의 지원에 의하여 이루어졌음을 밝혀드립니다.

참고문헌

[1] J.C. Doyle and G. Stein, "Robustness with observers," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-24, pp. 607-611, Aug. 1979.

[2] J.C. Doyle and G. Stein, "Multivariable feedback design : concepts for a classical/modern synthesis," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, pp. 4-16, Feb. 1981.

[3] P. Kapasouris, M. Athans, and H.A. Spang, "Gain-scheduled multivariable control for the GE-21 turbofan engine using the LQG/LTR methodology," in Proc. ACC, pp. 109-118, June 1985.

[4] Invited Session on LQG/LTR Methodology, in Proc. ACC, June 1986.

[5] D.B. Ridgely et al., "Linear-quadratic-Gaussian with loop transfer recovery methodology for an unnamed aircraft," J. Guid., Contr. and Dyna., vol. 10, no. 1, pp. 82-89, 1986.

[6] C.L. Sheperd and L. Valavani, "Autopilot design for bank-to-turn missiles using LQG/LTR methodology," in Proc. ACC, pp.579-586, June 1988.

[7] W.H. Kwon, S.W. Kim, and P.G. Park, "On the multi-variable Robust control for a boiler-turbine systems," IFAC Power System/Control, Aug. 22-25, 1989, Seoul.

[8] 한형석, "LQG/LTR 방법을 이용한 수중운동체의 다변수 제어기 구성 및 성능 분석," 석사학위논문, 서울대학교, 1988.

[9] 최중락, 이장규, "LQG/LTR방법을 이용한 강인한 서어 보메커니즘의 제어기 설계," '86 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 483-487, 1986. 10.

[10] J.B. Moore and L. Xia, "Loop recovery and robust state estimate feedback designs," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 512-517, June 1987.

[11] Z. Zhang and J.S. Freudenberg, "Loop transfer recovery for nonminimum phase plants," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-35, pp. 547-553, May 1990.

[12] N.A. Lehtomaki, N.R. Sandell, and M. Athans, "Robustness results in linear-quadratic Gaussian based multivariable control designd," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-26, pp. 75-93, Feb. 1981.