미지의 잡음을 갖는 동적 시스템의 유한한 오차의 상태 궤환 제어

김광춘o, 구근모, 김종환
한국과학기술원 전기및 전자공학과

Bounded Error State Feedback Control of Dynamic Systems with Unknown Disturbances

Kwang-Chun Kim, Keun-Mo Koo and Jong-Hwan Kim
Dept. of Elec. Eng., KAIST

Abstract - A dynamic system containing uncertain elements is considered. The upper bound of the values of these uncertainties is estimated. Using the estimated value a bounded error state feedback control is proposed based on Corless and Leitmann's result [1].

I 서론

Corless and Leitmann[1]은 불확실한 동적 시스템의 uniform ultimate boundedness를 보장하는 연속 상태 궤환을 제안하였다. 이 방법은 강인한 제어기를 설계하는 가장 유용한 방법중의 하나이다. 그러나 불확실성의 상한이 알려져야만 한다.

이 논문은 Lyapunov second stability 정리를 이용하여 미지 잡음의 상한에 대한 간단한 근사 법칙을 제안한다. 이때 상태 궤환 제어 미지의 잡음을 갖는 동적 시스템에 대한 uniform ultimate boundedness 를 보장한다. 결과의 새로운 면은 미지의 잡음의 크기는 알려져 있지 않다는 사실에 있다.

uncertainty matching 조건을 사용하여, 시스템은 다음과 같이 기술된다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= f(x(t),t) + B(x(t),t)u(t) + B(x(t),t)e(x(t),t) \\
x(t_o) &= x_o
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 $t \in R$는 시간, $x(t) \in R^n$ 는 상태, $u(t) \in R^m$는 제어, 그리고 $e(x(t),t)$ 는 lumped uncertain element이다. 시스템 $f(\cdot) : R^n \times R \to R^n$ 와 $B(\cdot) : R^n \times R \to R^{n \times m}$ 는 알려졌다. 상태 궤환 제어 $u_p(x(t),t)$, 제어되는 시스템(1)은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= g(x(t),t) + B(x(t),t)p(x(t),t) + B(x(t),t)e(x(t),t) \\
x(t_o) &= x_o
\end{aligned}
\tag{2}
$$

여기서 $g(\cdot) : R^n \times R \to R^n$와 원점 $x(t) = 0$는 점근적으로 안정하다. 전체 상태 궤환 제어는 $u_p(\cdot) + p(\cdot)$이다.

여기이후, uniform ultmate boundedness 에 대한 상태 궤환 제어 $p(\cdot)$ 를 미지의 잡음에 대해 논한다.

미지 잡음의 상한 근사를 이용하여, 상태 궤환 제어 $p(\cdot)$: $R^n \times R \to R^m$ 가 다음을 만족하도록 유도된다. 주어진 (x_o, t_o)에 대해, 대응하는 응답 $x(\cdot) : [t_o, \infty) \to R^n$ 이 존재하고 그러한 모든 응답은 유한 시간 안에 $x = 0$ 근처에 들어가고 그 이후에도 그 영역 안에 있다. 이러한 목적으로 미지의 잡음에 대한 근사 법칙이 제안[2 - 5] 되었고 그 법칙을 사용하여 그 시스템의 uniform ultimate boundedness를 보장하는 제어가 제안 되었다.

II 제어 법칙의 유도

다음의 [1]과 유사한 가정이 사용된다.

i) 알려진 함수 $f(\cdot)$, $B(\cdot)$ 와 미지의 함수 $e(\cdot)$ 는 Caratheodory 이고 모든 $t \in R$에 대해 $f(0,t) = 0$ 를 만족한다.

ii) 미지의 요소의 norm은 상수 ρ에 의해 제한된다.

$$\|e(x(t))\| \le \rho \tag{3}$$

여기서 미지의 $\rho \in R$는 후에 근사될 것이다.

iii) compact set $E \subset R^n$ 와 compact interval $[a,b] \subset R$이 주어진다면, 모든 $(x,t) \in E \times [a,b]$에 대해

$$\begin{aligned} \|g(x,t)\| &\le m_1(t) \\ \|B(x,t)\|\rho &\le m_2(t). \end{aligned}$$

을 만족하는 Lebesgue integrable functions $m_i(\cdot) : [a,b] \to R$, $i = 1,2$가 존재한다.

iv) 모든 $(x,t) \in R^n \times R$ 에 대해

$$\gamma_1(\|x\|) \le V_1(x,t) \le \gamma_2(\|x\|) \tag{4}$$

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \nabla_x^T V_1(x,t) g(x,t) \le -\gamma_3(\|x\|) \tag{5}$$

를 만족하는 C^1 함수 $V_1(\cdot) : R^n \times R \to R_+$와 연속이고

$$\gamma_i(0) = 0, \quad i = 1,2,3 \tag{6}$$

$$\lim_{r\to\infty} \gamma_i(r) = \infty, \quad i = 1,2 \tag{7}$$

를 만족하는 엄격한(strictly) 증가 함수 $\gamma_i(\cdot) : R_+ \to R_+$, $i = 1,2,3$이 존재한다.

위의 가정에 의해, ultimate uniform boundedness를 보장하는 근사 법칙과 상태 궤환 제어에 관한 다음 정리를 제안한다.

Theorem 1 $\epsilon > 0$이라 하고 각각 아래의 두 식을 따르는 근사 $\dot{\hat{\rho}}(\cdot)$ 와 제어 $p(\cdot)$ 를 선택한다.

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \begin{cases} \gamma\|\mu\| & if\ \|\mu\| > \epsilon \\ 0 & if\ \|\mu\| \le \epsilon \end{cases} \tag{8}$$

$$p(x,t) = \begin{cases} -\frac{\mu}{\|\mu\|}\hat{\rho}(t) & if\ \|\mu\| > \epsilon \\ -\frac{\mu}{\epsilon}\hat{\rho}(t) & if\ \|\mu\| \le \epsilon \end{cases} \tag{9}$$

여기서 $\mu = B^T(x,t)\nabla_x V_1(x,t)$ 와 γ는 양의 상수이다. 그때, 그 폐루프 시스템은 [1]에서 정의 된것처럼 *uniformly ultimately bounded (u.u.b.)*이다.

증명: uniform ultimate boundedness에 대한 증명은 [1]에서의 증명과 비슷하다. 그래서 우리는 식(8)과 식(9)를 얻는 방법에 대해 서술 할 것이다.

미지의 잡음을 고려하여, 다음의 Lyapunov 함수 후보를 선택하자[5].

$$V(x,t) = V_1(x,t) + \frac{1}{2\gamma}[\rho - \hat{\rho}(t)]^2 \tag{10}$$

윗 식의 시간에 대한 도함수는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,t) &= \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \nabla_x^T V_1(x,t)[g(x,t) + B(x,t)p(x,t) \\ &\quad + B(x,t)e(x,t)] - \frac{1}{\gamma}[\rho - \hat{\rho}(t)]\dot{\hat{\rho}}(t) \\ &\le -\gamma_3(\|x\|) + \nabla_x^T V_1(x,t)B(x,t)p(x,t) + \\ &\quad \|\nabla_x^T V_1(x,t)B(x,t)\|\rho - \frac{1}{\gamma}\rho\dot{\hat{\rho}}(t) + \frac{1}{\gamma}\hat{\rho}\dot{\hat{\rho}}(t) \end{aligned} \tag{11}$$

그러므로 식(8)과 식(9)고 부터, 만약 $\|\mu\| > \epsilon$ 라면

$$\dot{V}(x,t) \le -\gamma_3(\|x\|)$$

그리고 만약 $\|\mu\| \le \epsilon$ 라면

$$\dot{V}(x,t) \le -\gamma_3(\|x\|) + \epsilon_o$$

여기서 $\epsilon_o = \epsilon(\rho + \hat{\rho})$이다.

그러므로 uniform ultimate boundedness는 [1]의 결과와 용어를 따른다. ∎

III 결론

본 논문에서 미지의 잡음을 갖는 동적 시스템의 제한된 오차 상태 제어가 Corless와 Leitmann의 결과를 토대로 제안되었다. 그들의 결과와 비교해 보면,본 논문에서는 불확실한 요소의 상한치가 알려졌다는 가정을 하지 않았다. 상한이 근사되고 근사된 값을 사용하여 uniform ultimate boundedness를 보장하는 상태 궤환 제어가 설계된다.

참고 문헌

[1] M. J. Corless and G. Leitmann, "Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.26, No.5, pp. 1139-1144, Oct. 1981.

[2] B. B. Peterson and K. S. Narendra, "Bounded Error Adaptive Control," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.27, No.6, pp.1161-1168, Dec. 1982.

[3] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, "Robust Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.31, No.4, pp.306-315, April 1986.

[4] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall International, 1989.

[5] J. Imura, T. Sugie, and T. Yoshikawa, "Adaptive Robust Control of Robot Manipulators," *in Proc. of Int. Symposium on the M. T. N. S.*, Kobe, Japan, June 1991.